QK1
.J5969
1902
v. 26

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

VINGT-SIXIÈME ANNÉE, 1901-1902

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1902

SHOUT
SHARE
IT

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT :

Cette revue, publiée en exécution de l'article 3 des statuts, paraît tous les 3 mois, depuis janvier 1877, par livraisons de 350 pages environ. Elle forme chaque année deux forts volumes in-8°.

Le prix d'abonnement est de 20 francs par an, pour tous les pays de l'Union postale.

Les membres de la Société ont droit à une réduction de 25 %.

ON S'ABONNE

au secrétariat de la Société scientifique de Bruxelles

11, rue des Récollets, 11

LOUVAIN.

L'administration rachète le numéro de Janvier 1897 de la Revue, ou l'année 1897 entière ; faire l'offre au secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets, Louvain.

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE : **M. Paul Mansion,** *6, quai des Dominicains, Gand.*

AE 49.1

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

VINGT-SIXIÈME ANNÉE, 1901-1902
PREMIER FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1902

B402

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PAGES
Statuts **5**
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques **9**
Lettres de S. S. le Pape Léon XIII au Président et aux Membres de la Société scientifique de Bruxelles **11**
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles **15**
  Liste des membres fondateurs. . . . . *Ibid.*
  — des membres honoraires. **16**
  — générale. **18**
  — géographique **40**
  — des membres décédés. **46**
  — des membres inscrits dans les Sections **47**
Membres du Conseil 1900-1901 . . . . **53**
  — — 1901-1902 . . . . **54**
Bureaux des Sections 1901-1902 . . . . **55**
Questions de concours proposées en 1901 . . . . **56**
Session du 21 novembre 1901. . . . . **57**
  Première Section . . . . *Ibid.*
  Deuxième — **68**
  Troisième — **78**
  Quatrième — **87**
  Cinquième — **89**
  Assemblée générale **90**
    Discours de M. le chanoine Boulay sur *L'Enseignement des sciences naturelles dans les séminaires et les collèges* **91**
    Conférence du R. P. Lucas, S. J., sur *La Lumière noire et les radiations nouvelles* **99**
    Discours de M. Pasquier **102**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. 1
Sur le quadrilatère complet, par M. J. Neuberg 13
Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de Saint-Vincent et les manuscrits de della Faille, par le R. P. Henri Bosmans, S. J. 22
Sur la génération de quelques courbes remarquables par le Campylographe du P. Marc Dechevrens, S. J., par le R. P. Potron, S. J. . 41
Quelques observations sur la Serre et les régions voisines, par M. le chanoine Bourgeat 57

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

Adresse du secrétaire : **M. Paul Mansion**, *6, quai des Dominicains, Gand.*

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

BRUXELLES, POLLEUNIS ET CEUTERICK, IMPRIMEURS, RUE DES URSULINES, 37.
MÊME MAISON A LOUVAIN, RUE DES ORPHELINS, 32.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem
vera dissensio esse potest.
CONST. DE FID. CATH., c. IV

VINGT-SIXIÈME ANNÉE, 1901-1902

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1902

Mo. Bot. Garden
1903.

PREMIÈRE PARTIE

—

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : “ *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* „ (*).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (**).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(*) Const. de Fid. cath. c. IV.

(**) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des Questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles. En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui nommer un successeur pour achever son mandat (*).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra

---

(*) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (*).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques.* II. *Sciences physiques.* III. *Sciences naturelles.* IV. *Sciences médicales.* V. *Sciences économiques.*

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13.— Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable

---

(*) Ancien art. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale en octobre pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. Annales, 1878, t. II, 1re partie, p. 161 ; 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879 ;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses ANNALES s'il y a lieu.

LETTRES
DE
S. S. LE PAPE LEON XIII
AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem verum dissensionem esse posse*; quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^a de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque

in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri anno primo.

Leo PP. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

Chers fils, salut et bénédiction apostolique

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica*, le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis Bruxellas

LEO PP. XIII

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de sodalitate vestra fuimus ominati, id, elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet « Nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse ». Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur ; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis, vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae apud S. Petrum die 20 Martii anno 1901, Pontificatus Nostri vicesimo quarto.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils, les membres de la Société scientifique de Bruxelles à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que « entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister ». Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 mars 1901, l'an vingt-quatrième de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LISTES
DES
MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
ANNÉE 1902

Liste des membres fondateurs

S. É. le cardinal Dechamps (1), archevêque de	Malines.
François de Cannart d'Hamale (1)	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (1)	Anvers.
Le chanoine Maes (1)	Bruges.
Le chanoine De Leyn	Bruges.
Leirens-Eliaert	Alost.
Frank Gillis (1)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Cher de Schoutheete de Tervarent	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Michel	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave de Croy (1)	Le Rœulx (Hainaut).
Le Cte de t'Serclaes (1)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (1)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite, membre de l'Institut (1)	Paris.
L'École libre de l'Immaculée Conception	Vaugirard-Paris.
L'École libre Sainte-Geneviève	Paris.
Le Collège Saint-Servais	Liége.
Le Cte de Bergeyck	Beveren-Waes.
L'Institut Saint-Ignace	Anvers.

---

(1) Décédé.

Philippe Gilbert (1), correspondant de l'Institut	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège de la Compagnie de Jésus	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.
Le chanoine de Wouters (1)	Braine-le-Comte (Hain.).
Antoine D'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (1), archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa (Hongrie)
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens, archevêque de	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin (1), évêque de	Namur.
Eugène Pecher	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontifé	Catane.
S. Exc. Mgr Rinaldini, nonce apostolique	Madrid.
S. Exc. Mgr Granito di Belmonte, nonce apostolique	Bruxelles.
Éd. Goedseels	Uccle.

Liste des membres honoraires

Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
Amagat, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'Ecole polytechnique	Paris.
Mgr Baunard, recteur de l'Université catholique.	Lille.
Joachim Barrande (1)	Prague.
A. Béchamp	Lille.
Béchaux, correspondant de l'Institut	Paris.

---

(1) Décédé.

Le Prince Boncompagni (1) de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
L. De Bussy, membre de l'Institut	Paris.
Desplats	Lille.
P. Duhem, correspondant de l'Institut	Bordeaux.
J.-H. Fabre	Sérignan.
Le docteur Foerster	Aix-la-Chapelle.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut	Paris.
P. Hautefeuille, membre de l'Institut	Paris.
Dr Heis (1)	Münster.
Charles Hermite (1), membre de l'Institut	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (1), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
A. de Lapparent, membre de l'Institut	Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut	Paris.
F. Le Play (1)	Paris.
Le général Newton	New-York.
D.-P. Oehlert, correspondant de l'Institut	Laval.
Louis Pasteur (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (1) de la Société royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l'Institut	Paris.
Victor Puiseux (1), membre de l'Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Secchi, S. J. (1) de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery	Pantin.
Aimé Witz	Lille.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
Zeiller, membre de l'Institut	Paris.

---

(1) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles

Abbeloos (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique émérite de l'Université, 3, montagne du Collège. — Louvain.

d'Acy (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.

Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).

d'Adhémar (V^te^ Robert), professeur suppléant aux Facultés catholiques, 121, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

Alexis-M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.

Allard (François), industriel. — Chatelineau.

Amagat, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'Ecole polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.

André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture. — Héverlé.

d'Annoux (C^te^ H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — Orléans (Loiret — France).

Arcelin (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon, 12, quai des Messageries. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).

Arduin (abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

Baivy (D^r^), place Saint-Aubin. — Namur.

Balbas (Thomas), ingénieur des mines. — San-Sébastian (Espagne).

di Bartolo (Can. Salvatore), 71, Ruggiero Settimo. — Palermo (Sicile).

Baunard (Mgr), recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Bayet (Adrien), 33, Nouveau Marché-aux-Grains. — Bruxelles.

Beauvois (Eug.). — Corberon (Côte-d'Or — France).

Béchaux, correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

Bedel (abbé R.), prêtre de Saint-Sulpice, directeur du Grand Séminaire. — Aix (Bouches-du-Rhône — France).

Beernaert (Auguste), Ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France, 11, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Belpaire (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.

de Bergeyk (C^{te}), château de Beveren-Waes (Flandre orientale).

Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

Berlingin (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Peuchot par Viviers (Aveyron — France).

Berryer (Paul), avocat, 3, rue Fabry. — Liége.

Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.

Béthune (Mgr Félix), 40, rue d'Argent. — Bruges.

Bibot (D^r), Place Léopold. — Namur.

Bleuset, S. J. (R. P.), Collège Saint-François-Xavier, 18, rue de Rome. — Verviers.

Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

de la Boëssière-Thiennes (M^{is}), 19, rue aux Laines. — Bruxelles ; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).

Bolsius, S. J. (R. P. Henri), A. 14, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

Borginon (D^r Paul), 58, rue Dupont. — Bruxelles.

Boulay (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 5, rue Mercier. — Lille (Nord — France).

Bouqué, professeur à l'Université, 15, rue Breydel. — Gand.

Bouquillon (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington (Brookland, D. C. — Etats-Unis d'Amérique).

Bourgeat (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

Boussinesq, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, 73, rue Claude Bernard. — Paris.

du Boys (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, 54, rue du Mans. — Alençon (Orne — France).

van den Branden de Reeth (S. Gr. Mgr), archevêque de Tyr, 82, rue du Bruel. — Malines.

Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.

Breithof (F.), 85, rue de Bruxelles. — Louvain.
de Brouwer (Michel), ingénieur, 24, rue d'Ostende. — Bruges.
van der Bruggen (B^{on} Maurice), Ministre de l'Agriculture. — Bruxelles.
Bruylants, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.
Buisseret (Anatole), professeur à l'École des cadets, 5, rue Bosret. — Namur.
Buisseret (Joseph), professeur à l'École normale de l'État. — Nivelles.
de Bussy (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.
Cabeau (abbé Charles), professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.
Camboué, S. J. (R. P. Paul), missionnaire apostolique. — Tananarive (Madagascar).
Capart (Jean), 227, rue du Trône. — Bruxelles.
Capelle (abbé Éd.), 82, rue Bonaparte. — Paris (VI^{e}).
Cappellen (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.
Caratheodory (Costa), 101, avec Louise. — Bruxelles.
Cartuyvels (Jules), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture et des Travaux publics, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.
Cicioni (R. D. Giulio Prior), professeur au Séminaire de Perugia (Italie).
Cirera y Salse (D^{r} Luis), profesor libre de electroterapia, 19, prâl, calle Fontanella. — Barcelone (Espagne).
Cirera, S. J. (R. P. Richard), 21, Lauria. — Barcelone (Espagne).
Claerhout (abbé J.), directeur des Écoles catholiques de Pitthem. (Fl. occid.).
Cloquet (L.), professeur à l'Université, 2, rue Saint-Pierre. — Gand.
Cogels (J.-B. Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.
Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Han. Obeso). — Bilbao (Espagne).
Collège de la Compagnie de Jésus, 11, rue des Récollets. — Louvain.
Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 10 et 11, Parkstreet. — Calcutta (Indes anglaises. — via Brindisi).

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 88, rue Saint-Gilles. — Liége.

Collège de Bellevue. — Dinant.

Colombier, 18, rue des Fossés Saint-Jacques. — Paris (V^e).

Convent (D^r Alf.), à Woluwe-Saint-Lambert.

Cooreman (Gérard), 1, place du Marais. — Gand.

Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.

Courtoy (D^r), place de la Monnaie. — Namur.

Cousin (L.), ingénieur, 10, rue Simonis. — Bruxelles.

Cousot (D^r Georges), membre de la Chambre des Représentants. — Dinant.

Craninckx (B^{on} Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.

de Croy (P^{ce} Juste), 63, rue de la Loi. — Bruxelles; ou le Rœulx.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Dallemagne (G.), ingénieur, 340, rue Saint-Gilles. — Liége.

Daniels (D^r Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).

Dansette (Gaston), 81, chaussée de Charleroi. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Daubresse (Paul), ingénieur, 42, rue des Orphelins. — Louvain.

Davignom (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

De Baets (chan. Maurice), professeur à l'Université de Louvain. — Lubbeek (Louvain).

Debaisieux, professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.

De Becker (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

De Bien (Fernand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.

De Bloo (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.

De Brouwer (chan.), curé-doyen. — Ypres.

De Buck (D^r D.), 7, rue des Boutiques. — Gand.

Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Jersey (Iles de la Manche).

De Fooz, 18, rue de Bériot. — Louvain.

Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — Cureghem-lez-Bruxelles.

De Greeff, S. J. (R. P. Henri), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

De Jaer (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

De Jaer (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — Mons.

Delacre (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 16, boulevard du Fort. — Gand.

Delaire (A.), secrétaire général de la Société d'économie sociale, 238, boulevard Saint-Germain. — Paris.

Delannoy, conservateur des étalons des poids et mesures, 14, rue du Cornet. — Bruxelles.

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 215, rue Royale. — Bruxelles.

De Lantsheere (Léon), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, 83, rue du Commerce. — Bruxelles.

Delattre, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Delaunois (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz (Hainaut).

Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Delemer, 24, rue de Voltaire. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), 5, rue de la Charité. — Bruxelles.

Deleu (L.), ingénieur aux chemins de fer de l'État, 84, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles (Bruxelles).

De Leyn (chan. A.) 52, rue du Marécage. — Bruges.

Delvigne (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification. — Bruxelles.

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, 4, rue de l'Horticulture. — Ixelles (Bruxelles).

Demanet (chan.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du Saint-Esprit. — Louvain.

De Moor (Dr), médecin en chef de l'Hospice Guislain, 57, rue des Tilleuls. — Gand.

De Munnynck, O. P. (R. P.), couvent des RR. PP. Dominicains, rue Juste-Lipse. — Louvain.

De Muynck (abbé), professeur à l'Université, Collège du Pape. — Louvain.

Denoël, ingénieur de 1re classe à l'Administration centrale des mines, 55, rue Américaine. — Bruxelles.

Denys (D^{r} J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles,

Deschamps, S. J. (R. P. Alfred), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Deschamps (Fernand), docteur en droit, 13, rue des Fabriques. — Bruxelles.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Desplats (D^{r}), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Tilly (lieutenant-général J.), de l'Académie royale de Belgique, 162, rue Masui. — Bruxelles.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 5, rue de Ligne. — Bruxelles.

De Veer, S. J., (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 448, Singel. — Amsterdam.

Devuyst, inspecteur de l'Agriculture, 5, rue de la Station. — Gand.

De Walque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Walque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liége.

D'Hondt (Frédéric), directeur du laboratoire communal. — Courtrai.

Dierckx, S. J. (R. P. Fr.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Dorlodot (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université catholique, 44, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (Namur).

Doutreloux (S. G. Mgr), Evêque de Liége.

Dressel, S. J. (R. P.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Fauquemont (Limbourg hollandais).

Drion (B^{on} Adolphe), avocat. — Gosselies.

Dubois (Ernest), professeur à l'Université, 26, quai de l'Ecole. — Gand.

Duchateau-Frentz (D^{r}), rue Joseph II. — Bruxelles.

Dufrane (D^{r}), chirurgien à l'hôpital, 25, rue d'Havré. — Mons.

Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure. — Gand.

Duhem (Pierre), correspondant de l'Institut, professeur de physique à la Faculté des sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dupont (D^{r} Émile), médecin de bataillon, chef des laboratoires de bactériologie et de radiographie à l'Hôpital militaire, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Duquenne (D^{r} Louis), 235, rue Sainte-Marguerite. — Liége.

Durant (Henri), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dusmet y Alonzo (J.-M.), docteur en sciences naturelles, 7, plaza Santa-Cruz. — Madrid.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 339, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard-Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes. — Paris.

de l'Escaille (Jos.), ingénieur. — Hamont, par Neerpeelt (Limbourg).

Eynaud (L.), inspecteur général du Génie maritime, 19, rue du Colisée. — Paris.

Fabre (J.-H.), naturaliste. — Sérignan par Vaucluse (Vaucluse — France).

Fabry (Louis), docteur ès-sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille.

Fagnart (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 7, rue Nieuwpoort. — Gand.

Faidherbe (Dr Alexandre), 38, rue de l'Hospice. — Roubaix (Nord — France).

de Favereau de Jenneret (Bon), Ministre des Affaires étrangères. — Bruxelles.

Fernandez Sanchez (José), catedràtico de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

Ferrata (S. É. le cardinal), à Rome.

Ferron (Eug.), commissaire du Gouvernement grand-ducal près les chemins de fer, 8, avenue de la Porte-Neuve. — Luxembourg (Grand-Duché).

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), 12, calle de Isabel la Católica. — Madrid.

Folie (F.), membre de l'Académie royale de Belgique. — Grivegnée.

Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).

de Foville (abbé), directeur du Séminaire Saint-Sulpice. — Paris.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier-Villars (Albert), 55, quai des Grands Augustins. — Paris.

Gautier (chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

Gelin (E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Georgel (Mgr), vicaire général de l'évêché d'Oran (Karguentah. — Algérie).

Gérard (Ern.), ingénieur en chef, inspecteur général au Ministère des Chemins de fer, Postes et Télégraphes, chef du cabinet du Ministre, 25, avenue des Arts. — Bruxelles.

Gilbert (Paul), ingénieur à Heer-Agimont (Namur).

Gillard, S. J. (R. P.), professeur au Collège Saint-Servais, 88, rue Saint-Gilles. — Liége.

Gillès de Pélichy (Bon Ch.), membre de la Chambre des Représentants, château d'Iseghem (Flandre Occidentale).

Gilson, professeur à l'Université, 501, boulevard du Château. — Gand.

Glibert (Dr D.), inspecteur du travail. — Uccle.

Glorieux (Dr), 36, rue Jourdan. — Bruxelles.

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle.

Gonzalez y Castejon, major d'État-Major, professeur de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goossens (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

Goossens, S. J. (R. P. Fernand), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Goris (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Graffin (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.

Grandmont (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile-Italie).

Granito di Belmonte (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Bruxelles.

Grégoire (abbé Victor), professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

Grinda (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, 74 y 76, Fuencarral. — Madrid.

de Grossouvre (A.), ingénieur en chef des mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

Guelton (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Guermonprez (Dr), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

Hachez (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de l'Astronomie. — Bruxelles.

Hagen, S. J. (R. P.). Georgetown College Observatory. — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Hahn, S. J. (R. P. Guillaume), Collège de N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Halleux, ingénieur des mines, rue Joniaux, 5. — Etterbeek (Bruxelles).

Halot (Alex.), consul du Japon, secrétaire du Conseil supérieur de l'État indépendant du Congo, 318, avenue Louise. — Bruxelles.

Hamonet (abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, vice-président du Conseil général des mines, directeur honoraire de l'Ecole des mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris.

Hautefeuille (P.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 28, rue du Luxembourg. — Paris.

Havenith, lieutenant-adjoint d'Etat-Major, 128, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

de la Haye (Auguste), major au 13^{e} régiment de ligne, 9, boulevard de Meuse. — Jambes (Namur).

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

Helleputte (G.), membre de la Chambre des Représentants, professeur à l'Université de Louvain. — Vlierbeek-lez-Louvain.

de Hemptinne (Alexandre), 56, rue de la Vallée. — Gand.

de Héneffe, ingénieur agricole, 76, rue Royale Sainte-Marie. — Bruxelles.

Henrard (D^{r} Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

Henrard (D^{r} Félix), 216, boulevard du Hainaut. — Bruxelles.

Henry (Albert), avocat, 47, rue de la Ruche. — Bruxelles.

Henry (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Henseval (D^{r} Maurice), 11, avenue du Vélodrome. — Ostende.

Hervier (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heylen (S. G. Mgr), Evêque de Namur.

Heymans (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 7, boulevard des Hospices. — Gand.

Heynen (W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (Luxembourg); et 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

Houtard (B^{on} J.). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

Houze (D^{r} Oct.). — Binche.

Humbert (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École polytechnique, 6, rue Daubigny. — Paris.

Huyberechts (D^{r} Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

Hy (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 87, rue La Fontaine. — Angers (Maine-et-Loire — France).

Iniguez y Iniguez (Francisco), catedrático de Astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 47, courte rue Neuve. — Anvers.

Jacobs (Mgr), ancien curé-doyen de Sainte-Gudule, 226, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Jacobs (F.), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.

Jacopssen, S. J. (R. P. Raymond), ancienne abbaye. — Tronchiennes (Gand).

de Joannis (abbé Joseph), 33, rue du Cherche-Midi. — Paris.

Joly (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), avocat, 56, avenue Brugmann — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 48, rue de Varenne. — Paris.

Jossart, 6, rue Lucien Namèche. — Namur.

Jourdain (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.

Kaïser (G.), ingénieur, inspecteur du travail au Ministère de l'Industrie, 19, rue Charles-Martel. — Bruxelles.

Kaisin (F.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse. — Louvain.

Kennis (G.), ingénieur civil, bourgmestre, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek (Bruxelles).

Kieffer (abbé J.-Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitche (Lorraine — Allemagne).

Kirsch (R. P. Alexandre-M.), C. S C., Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des forêts, Villa Dalmassière, par Voiron (Isère-France).

Kurth (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy, — Liége.

Laflamme (Mgr), Université de Laval. — Québec (Canada).

Lagasse-de Locht (Charles), inspecteur général des ponts et chaussées, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Lahousse (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.

Lamarche (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.

Lambert (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert,

Lambin, ingénieur des ponts et chaussées, secrétaire du Cabinet du Ministre des Finances et des Travaux publics, avenue de la Brabançonne. — Bruxelles.

Lambiotte (Omer), ingénieur de charbonnages. — Anderlues.

Lambiotte (Victor), ingénieur, directeur-gérant des charbonnages, d'Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).

Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal, 31, rue Saint-Jean. — Arlon.

Lambrechts (Hector), 103, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Laminne (Chan. Jacques), supérieur du Petit Séminaire de Saint-Trond.

Lamy (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 149, rue des Moutons. — Louvain.

de Lapparent (A.), membre de l'Institut, membre correspondant de la Société géologique de Londres, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

Laruelle (Dr), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.

Lebouteux (P.). — Verneuil par Migné (Vienne — France).

Lebrun (Dr Hector), 31, rue Vauthier. — Bruxelles.

Lebrun (Dr), rue de Bruxelles. — Namur.

Lechalas (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine-Inférieure — France.

Leclercq (Jules), correspondant de l'Académie royale de Belgique, 89, rue de la Loi. — Bruxelles.

Leconte (Félix), installations électriques, 1, rue des Arts. — Lille (Nord-France); ou 25, rue Royale. — Tournai.

Leemans (Joseph), ingénieur civil des mines, 20, rue du Nord. — Bruxelles.

Lefebvre (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

Legrand (abbé Alfred), rue de Bruxelles. — Namur.

Leirens-Eliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des mines, 23, rue du Luxembourg — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (Liége).

Lemaitre (Dr), rue de Montigny. — Charleroi.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier. — Lille (Nord-France).

Le Paige (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

Leplae (E.), professeur à l'Université, 16, place du Peuple. — Louvain.

Leray (R. P. A.), Eudiste, 12, rue du Quinconce. — Angers (Maine-et-Loire — France).

de **Liedekerke de Pailhe** (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du **Ligondès** (Vicomte), colonel d'artillerie. — Bourges (Cher — France).

de **Limburg-Stirum** (Cte Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de **Locht** (Léon), professeur à l'Université de Liége, Château de Trumly. — Trooz (Liége).

Lorin, 186, boulevard Saint-Honoré. — Paris.

Lucas, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (l'abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Maestriaux (Valdor), professeur à l'École supérieure de commerce, 33, rue Guillaume-Tell. — Bruxelles.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

Martens (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Martin, docteur, boulevard Ad aquam. — Namur.

Martinez y Saez (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, 6, calle de San Quintin. — Madrid.

Massange de Louvrex (D^{r}), 4, rue Forgeur. — Liége.

Matagne (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Matthieu (Émile), avocat, Marché-aux-Bêtes. — Huy.

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (C^{te}), ingénieur de la marine, rue Pasteur. — Lorient (Morbihan — France).

Meessen (D^{r} Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (C^{te} Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mercier (Mgr D.), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

de Mérode-Westerloo (C^{te}), rue aux Laines. — Bruxelles.

Meunier (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse — Louvain.

Meunier (Fernand), 92, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Meurs, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Micha, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Miranda y Bistuer (Julian), Dean de la S. I. Catedral de Segovia (Espagne).

Moeller (D^{r}), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moeller (D^{r} Nicolas), 46, rue de Berlin. — Bruxelles.

Monchamp (Mgr Georges), membre de l'Académie royale de Belgique, vicaire général de l'Evêché. — Liége.

Mònier (Marcel), laboratoire de biologie de Liége, 31, rue Wazon. — Liége.

de Montessus de Ballores (F.), chef d'escadron, commandant au 28^{e} d'artillerie. — Vannes (Morbihan — France).

de Montessus de Ballores (V^{te} Robert), licencié-ès-sciences, membre de la Société mathématique de France et du Cercle mathématique de Palerme, 12, rue de Meaux. — Senlis (Oise-France).

Monthaye, major d'État-Major, 38, rue de la Tourelle. — Bruxelles.

de Moreau d'Andoy (B^{on}), 11, rue d'Archimède. — Bruxelles.

Moreux (abbé Th.), professeur au Collège Saint-Célestin. — Bourges (Cher — France).

Mullenders (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin. — Liége.

de Nadaillac (M^{is}), 18, rue Duphot. — Paris; ou Rougemont par Cloyes (Eure-et-Loir — France).

Nava di Bontifé (S. É. le cardinal), archevêque de Catane. (Sicile - Italie).

Nerincx (Alfred), professeur à l'Université de Louvain, secrétaire de l'Institut de Droit international, 8, rue Bosquet. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Neuberg (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Sclessin. — Liége.

Nickers (abbé), curé d'Izel, par Florenville (Luxembourg).

Nollée de Noduwez, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, 146, rue Royale. — Bruxelles.

Nyssens (Julien), ingénieur, 44, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

Nyssens (Pierre), directeur du laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

d'Ocagne (Maurice), professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boëtie. — Paris.

de Olavarria (Marcial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la Commission de la carte géologique d'Espagne, 82, Huertas. — Madrid.

OEhlert (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Chatelet.

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Patroni (Mgr Giuseppe), prelato domestico de Sua Santita, 42, via dei Cestari. — Rome.

Pecher (Eugène), 379, avenue Louise. — Bruxelles.

Peeters (docteur), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Peeters (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.

Pepin (Théophile), 31, rue Masséna. — Lyon (Rhône-France).

Picard (É.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 13, rue Soufflot. — Paris (Ve).

Picquenard (C. A.), docteur, 19, rue de Brest. — Quimper (Finistère — France).

Pieraerts (chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

de Pierpont (Édouard), château de Rivière. — Profondeville (Namur).

Pierre (abbé Oscar), professeur au Collège de Bellevue. — Dinant.

Poisot (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

Poullet (Prosper), associé de l'Institut de Droit international, professeur à l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Prat, (abbé Fr.), professeur à l'Université Catholique, 3, place Saint-Barthélémy. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

Proost (Alphonse), directeur général de l'Agriculture, 16, rue Anoul. — Bruxelles; ou Mousty-lez-Ottignies (Brabant).

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

Prudham (abbé), directeur du Collège Stanislas, 22, rue N.-D. des Champs. — Paris.

Pulido garcia (José), 71, rue de San Mamede. — Lisbonne.

Pyfferoen (Oscar), professeur à l'Université, 4, rue du Nouveau Bois. — Gand.

Quairier, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

Rachon (abbé Prosper), curé de Ham-sur-Heure, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

Ranwez (Fernand), professeur à l'Université, 56, rue de Tirlemont. — Louvain.

Rector (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

de Reul (Gustave), ingénieur, directeur de l'Ecole industrielle, 10, boulevard Cauchy. — Namur.

de Ribaucourt (Cte), 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde (Brabant).

Richald (J.), ingénieur des ponts et chaussées, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

de Ridder (Paul), 96, rue Joseph II. — Bruxelles.
Rinaldini (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Madrid.
Risueno (Emiliano Rodriguez), catedratico de Historia natural en la Universidad, 16, pràl, calle Duque de la Victoria. — Valladolid (Espagne).
Roberti (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.
Roland (Pierre), ingénieur, 49, rue des Orphelins. — Louvain.
de Romrée (C^{te}), château de Vichenet. — Le Mazy (Namur).
Roux (Cl.), professeur aux Facultés catholiques, 25, rue du Plat. — Lyon (Rhône — France).
Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.
Rutten (D^{r}), place Léopold. — Namur.
de Salvert (V^{te}), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 1bis, rue du Potager. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).
Sanz (Pelegrin), ingeniero de caminos, 13 y 15 — 3ro, calle de Lope de Vega. — Madrid.
de Sauvage (C^{te}), 22, avenue de Friedland. — Paris.
Scarsez de Locqueneuille (Anatole), Langemarck (Fl. occ.); ou 42, rue du Taciturne. — Bruxelles.
Schaffers, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.
Scheuer, S. J. (R. P. Pierre), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Schmidt (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne.
Schmitz, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.
Schmitz (Théodore), ingénieur civil des mines, 31, rue Jordaens. — Anvers.
Schobbens, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.
Schollaert, président de la Chambre des Représentants, place Saint-Antoine. — Louvain.
Schoonjans, S. J. (R. P. Ch.), professeur à l'Institut Saint-Ignace, 47, courte rue Neuve. — Anvers.
de Schoutheete de Tervarent (Ch^{er}). — Saint-Nicolas.
Schreiber, agronome de l'État. — Hasselt.
de Selliers de Moranville (Ch^{er}), commandant d'État-Major, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Sibenaler (N.), professeur à l'Université, 106, rue de Namur. — Louvain.

Simon (Dr J.-B.), 108, rue Haute. — Bruxelles.

Siret (Henri), ingénieur, 59, rue du Transvaal. — Anvers.

Siret (Louis), ingénieur. — Cuevas (prov. Almeria — Espagne).

Smekens (Théophile), président honoraire du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smits (Eugène), ingénieur, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

del Socorro (José Maria Solano, Mes), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, 41, bajo, calle de Jacometrezo. — Madrid.

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solvyns (Albert), commissaire d'arrondissement. — Tronchiennes-lez-Gand ; ou, 138, Coupure. — Gand.

Soreil, ingénieur. — Maredret-sous-Sosoye, par Anthée (Namur).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

Spina, S. J. (R. P. Pedro), Colegio del Sagrado Corazón de Jesus, 5, sacristia de Capucinas. — Puebla (Mexique).

Springael (Auguste), ingénieur, villa de l'Abbaye. — Saint-André-lez-Bruges.

Staelpaert (abbé), professeur au Collège Saint-Pierre, rue des Récollets. — Louvain.

Stainier (Xavier), professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de la Commission géologique de Belgique, rue Pierquin. — Gembloux.

van den Steen de Jehay (Cte Frédéric), secrétaire de légation. — Constantinople.

Stillemans (S. G. Mgr), évêque de Gand.

Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

Storms (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).

Stouffs (Dr), rue de Charleroi. — Nivelles.

van der Straten-Ponthoz (Cte François), 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Le Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.

Surbled (D^{r}), 40, rue de Joinville. — Paris.

Suttor, ingénieur, 19, rue des Bogards. — Louvain.

Swolfs (D^{r}), 27, rue de l'Association. — Bruxelles.

Swolfs (chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Henri Speecq. — Malines.

Tannery (Paul), ingénieur, directeur de la Manufacture des tabacs. — Pantin (Seine — France).

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée, 26, rue Marnix. — Gand.

Thibaudier, ingénieur de la marine, directeur des constructions navales, directeur du matériel au Ministère de la Marine, 6, cité Vaneau. — Paris.

Thiéry (abbé Armand), Institut des Hautes-Études, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thirion, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Thiry (Fr.), secrétaire de l'Association conservatrice cantonale de Templeuve, bourgmestre. — Pecq (Hainaut).

Tilman (Firmin), ingénieur. — Anderlues (Hainaut).

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége.

Torroja y Caballé (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, n^{os} 13 et 15, c^{to} 3^{o} dra, calle de Lope de Vega. — Madrid.

de Trazegnies (M^{is}). — Corroy-le-Château, par Gembloux ; ou 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

de T'Serclaes (C^{te} Jacques), capitaine d'état-major, professeur à l'École de guerre, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

t'Serstenens (Gaston), château de Baudemont, par Virginal.

d'Ursel (C^{te} Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant) ; ou 25, rue de la Science. — Bruxelles.

de la Vallée Poussin, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 192, rue de Namur. — Louvain.

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 192, rue de Namur. — Louvain.

de la Vallée Poussin (Joseph), chef de cabinet du Ministre de la Justice, 192, rue de Namur. — Louvain.

Van Aertselaer (chan.), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

Van Aubel, professeur de physique à l'Université, 130, chaussée de Courtrai. — Gand.

Van Aubel (Ch.), assistant à l'Université de Liége, 72, square Marie-Louise. — Bruxelles ; ou 3, rue Sainte-Véronique. — Liége.

Van Ballaer (chanoine), curé du Sablon, 6, rue Bodenbroek. — Bruxelles.

Van Bastelaer (Léonce), 24, rue de l'Abondance. — Bruxelles.

Van Biervliet (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

Van Caeneghem (abbé), directeur de l'École supérieure commerciale et consulaire. — Mons.

Van den Bossche (G.), avocat, 31, rue Baudeloo. — Gand.

Van den Gheyn (chan. Gabriel), supérieur de l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

Van den Gheyn, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, conservateur à la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Vandenpeereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

Vanderlinden, ingénieur en chef des ponts et chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vander Linden (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle.

Van der Mensbrugghe, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.

Vanderryst, inspecteur adjoint de l'Agriculture. — Tongres.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége, 16, rue du Gouvernement Provisoire. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.

Van de Vyver, chargé de cours à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Van de Woestyne (chan.), professeur au Grand Séminaire. — Bruges.

Van Emelen (Léopold), docteur en sciences physiques et mathématiques, 491, boulevard du Château. — Gand.

Van Gehuchten, professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Ém.), 11, rue Traversière. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 15, rue du Trône. — Bruxelles.

Vannutelli (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome..

Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines. — Gand.

Van Overbergh (Cyrille), directeur général de l'Enseignement supérieur, 102, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Van Overloop (Eugène), 152, rue Royale. — Bruxelles.

Van Swieten (Raymond), 3, quai aux Pierres-de-Taille. — Bruxelles.

Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

Venneman, docteur en médecine, professeur à l'Université, 35, rue du Canal. — Louvain.

Verhelst (abbé F.), professeur au Collège Saint-Jean-Berchmans, 9, rempart Saint-Georges. — Anvers.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (R. P.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadie. — Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

Vignon (Paul), préparateur de Zoologie à la Sorbonne, 9, boulevard Latour-Maubourg. — Paris.

Visart de Bocarmé (Cte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre. — Bruges.

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Vollen (E.), docteur en droit, rue de Paris. — Louvain.

de Vorges (Albert), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).

de **Vorges** (Cte E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.

Vuylsteke, professeur à l'Université de Louvain, 59, rue du Congrès. — Bruxelles.

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment au 2e chasseurs à cheval, 5, rue de la Grosse Pomme. — Mons.

Waucquez (Victor), avocat, 101, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Wautelet (A.), ingénieur de l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

de **Wavrin** (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Fl. orientale).

de **Weck** (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu-sous-Romont (canton de Fribourg — Suisse).

Wéry (Dr Aug.). — Sclayn (Namur).

Wéry (Vincent), président honoraire du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

de **Wildeman**, conservateur du Jardin botanique de l'État, 10, rue du Soleil. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Wilmotte (abbé), professeur au Petit Séminaire. — Floreffe (Namur).

Witz (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Wolf, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.

Wolters (Frédéric), professeur à l'Université, 55, rue du Jardin. — Gand.

Wolters (G.) administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des ponts et chaussées, 21, rue de l'Avenir. — Mont-Saint-Amand-lez-Gand.

Wouters (chanoine Louis), inspecteur de l'enseignement, 73, rue de l'Empereur. — Anvers.

Zahm (R. P. J.-A.), C. S. C., Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis d'Amérique).

Zeiller (René), membre de l'Institut, professeur à l'École supérieure des mines, 8, rue du Vieux Colombier. — Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1902)

BELGIQUE

Flandre occidentale : **Bruges** : Mgr F. Béthune. — de Brouwer (M.). — Coppieters de Stockhove (abbé Ch.). — De Leyn (chan. A.). — Van de Woestyne (chan.). — Visart de Bocarmé (C^{te} A.). — S. G. Mgr Waffelaert. — **Courtrai** : D'Hondt (Fréd.). — **Iseghem** : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Pitthem** : Claerhout (abbé J.). — **Ostende** : Henseval (D^{r} M.) — **Saint-André** (Bruges) : Springael (Aug.). **Ypres** : De Brouwer (chan.).

Flandre orientale : **Gand** : Bouqué. — Cloquet (L.). — Cooreman (G.). — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — De Buck (D^{r} D.). — Delacre (M.). — De Moor (D^{r}). — Devuyst. — Dubois (E.). — Dugniolle (M.). — Dusausoy (Cl.). — Dutordoir (H.). — Fagnart (E.). — Gilson. — de Hemptinne (A.). — Heymans (J. F.). — Lahousse (D^{r}). — Mansion (P.). — Nyssens (P.). — Pyfferoen (O.). — S. G. Mgr Stillemans. — Théron (J.). — Van Aubel. — Van Biervliet (J.). — Van den Bossche (G.). — Van den Gheyn (chan. G.). — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe. — Van de Vijver. — Van Emelen (L.). — Van Ortroy (F.). — Wolters (F.). — Wolters (G.). — **Alost** : Collège Saint-Joseph. — Leirens-Eliaert. — **Beveren-Waes** : de Bergeyck (C^{te}). — **Saint-Nicolas** : de Schoutheete de Tervarent (Ch^{er}). — **Somergem** : de Wavrin (M^{is}). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Tronchiennes** : Jacopssen, S. J. (R. P. R.). — Solvyns (A.).

Province d'Anvers : **Anvers** : Belpaire (F.). — Cogels (J.-B.-Henri). — Institut Saint-Ignace. — Schmitz (Th.). — Schobbens. — Schoonjans, S. J. (R. P. Ch.). — Siret (H.). — Smekens (Th.). —

Verhelst (abbé F.). — Wouters (abbé L.). — **Malines** : S. G. Mgr van den Branden de Reeth. — Dessain (Ch.). — Gautier (chan.). — S. É. le cardinal Goossens. — Swolfs (chan.).

LIMBOURG : **Hasselt** : Schreiber. — **Hamont** (par Neerpelt) : de l'Escaille (J.). — **Saint-Trond** : Laminne (chan.). — **Tongres** : Vanderryst.

LUXEMBOURG : **Arlon** : Lambot (O.). — **Izel** (par Florenville) : Nickers (abbé). — **Virton** : Cabeau (abbé Ch.). — Lefebvre (abbé M.).

PROVINCE DE BRABANT : **Bruxelles** : Bayet (A.). — Beernaert (Aug.). — Bertrand (L.). — de la Boëssière-Thiennes (M^{is}). — Borginon (D^{r} P.). — van der Bruggen (B^{on} M.). — Capart (J.). — Caratheodory (C.). — Cartuyvels (J.). — Collège Saint-Michel. — Cousin (L.). — Craninex (B^{on} O.). — de Croy (P^{ce} J.). — Cuylits (D^{r} J.). — Davignon (J.). — De Bien (F.). — De Jaer (C.). — Delannoy. — De Lantsheere (D^{r} J.). — De Lantsheere (L.). — Delcroix (D^{r} A.). — Delétrez (D^{r} A.). — Delvigne (chan. A.). — Denoël. — De Preter (H.). — Deschamps (F.). — De Smedt S. J. (R. P. Ch.). — De Tilly (lieut.-génér. J.). — De Vadder (V.). — Dubois (G.). — Duchateau-Frentz (D^{r}). — Dumont (D^{r} A.). — Dupont (E.). — Durant (H.). — de Favereau de Jenneret (B^{on}). — de Garcia de la Vega (B^{on} V.). — Gérard (E.). — Glorieux (D^{r}). — Goris (Ch.). — S. Exc. Mgr Granito di Belmonte. — — Hachez (F.). — Halot (A.). — Havenith. — Henrard (D^{r} E.). — Henrard (D^{r} F.). — Henry (A.). — Heynen (W.). — Huyberechts. (D^{r} Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kaïser (G.). — Lagasse-de Locht (Ch.). — Lambin. — Lambrechts (H.). — Laruelle (D^{r}). — Lebrun (D^{r} H.). — Leclercq (J.). — Leemans (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — de Liedekerke de Pailhe (C^{te} Éd.). — de Limburg-Stirum (C^{te} Ad.). — Maestriaux (V.). — Matagne (D^{r} H.). — Meessen (D^{r} W.). — de Mérode-Westerloo (C^{te}). — Meunier (F.). — Moeller (D^{r}). — Moeller (D^{r} N.). — Monthaye. — de Moreau d'Andoy (B^{on}). — Nollée de Noduwez. — Nyssens (J.). — Pecher (E.). — Peeters (D^{r}). — Pieraerts (chan.). — Proost (A.). — Provincial (R. P.), de la Compagnie de Jésus. — Quairier. — de Ribaucourt (C^{te}). — Richald (J.). — de Ridder (P.). — Scarsez de Locqueneuille. — de Selliers de Moranville (Cher). — Simon (Dr J.-B.). — Smits (E.). — Stinglhamber (É.). — van der Straten-Ponthoz (Cte F.). — Swolfs (Dr). — de Trazegnies (Mis). — de T'Serclaes (Cte J.). — Van Aertselaer (chan.). — Van Aubel (Ch.). — Van Bastelaer (L.). — Van den Gheyn S. J. (R. P. J.). — Van der Smissen (Ed.). — Vanderstraeten (Dr A.). — Van Hoeck (Dr Ém.). — Van Keerberghen (Dr). — Van Overbergh (Cyr.). — Van Overloop (E.). — Van Swieten (R.). — Vuylsteke. — Waucquez (V.). — de Wildeman. — **Cureghem** (Bruxelles) : Degive (A.). — **Etterbeek** (Bruxelles) : Halleux. — **Ganshoren** : Storms (abbé C.). — **Héverlé** : André (J.-B.). — **Ixelles** (Bruxelles) : Deleu (L.). — Delvosal (J.).

Louvain : Mgr Abbeloos. — Breithof (F.). — Bruylants. — Cappellen (G.). — Collège de la Compagnie de Jésus. — Daubresse (P.). — Debaisieux. — De Becker (chan. J.). — De Fooz. — Delattre S. J. (R. P.). — Demanet (chan.). — De Munnynck, O. P. (R. P.). — De Muynck (abbé). — Denys (Dr J.). — Deschamps, S. J. (R. P. A.). — De Walque (F.). — Dierckx, S. J. (R. P. Fr.). - de Dorlodot (chan. H). — Dumont (A.). — Goossens, S. J. (R. P. F.). — Grégoire (abbé V.). — Guelton (G.). — Mgr A. Hebbelynck. — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Mgr Lamy. — Lefebvre (Dr). — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Martens (E.). — Maubert (Frère). — Mgr D. Mercier. — Meunier (abbé Alph.). — Meurs, S. J. (R. P.). — Micha. — Pasquier (Ern.). — Poullet (Pr.). — Ranwez (F.). — Roberti (M.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J. (R. P.). — Scheuer, S. J. (R. P.). — Schmitz, S. J. (R. P. G.). — Schollaert. — Sibenaler (N.). — Staelpaert (abbé). — Le Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (abbé A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — de la Vallée Poussin. — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — de la Vallée Poussin (J.). — Van Emelen (L.). — Van Gehuchten. — Venneman (Dr). — Verriest (Dr G.). — Vollen (E.).

Lubbeek (Louvain) : De Baets (chan. M.). — **Nivelles** : Buisseret (J.). — Stouffs (Dr). — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Dansette (G.). — Nerincx (A.). — Struelens (Dr). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Kennis (G.). — **Tubize**: Taymans (E.). — **Uccle** : Gilbert (Dr D.). — Goedseels (Éd.). — Maes (abbé). — **Virginal** : t'Serstevens (G.). — **Vlierbeek** (Louvain) : Helleputte (G.). — **Wauthier-Braine** : d'Ursel (Cte A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (D. A.). — Lambert (C.).

Province de Liége : **Liége** : Berleur (Ad.). — Berryer (P.). — Collège Saint-Servais. — Dallemagne (G.). — De Walque (G.). — S. G. Mgr Doutreloux. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (Dr X.). — Grillad, S. J. (R. P.). — Kurth (G.). — Lamarche (E.). — Le Paige (C.). — Massange de Louvrex (Dr). — de Meeus (Cte H.). — Mgr G. Monchamp. — Monier (M.). — Mullenders (J.). — Neuberg (J.).— S. G. Mgr Rutten. — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E.).

Grivegnée : Folie (F.). — **Huy** : Gelin (abbé E.). — Matthieu (E.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Trooz** : de Locht (L.). — **Verviers** : Bleuset, S. J. (R. P.).

Hainaut : **Mons** : De Jaer (J.). — Dufrane (Dr). — Van Caeneghem (abbé). — Warlomont (Dr R.). — Wéry (V.).

Anderlues : Lambiotte (O.). — Tilman (F.). — **Binche** : Houze (Dr Oct.). — **Charleroi** : Lemaître (Dr). — **Chatelet** : Pasquier (Dr A.). — **Chatelineau** : Allard (F.). —**Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Leuze** : Moulart (abbé). — **Monceau-sur-Sambre** : Houtard (Bon J.). — **Pecq** : Thiry (Fr.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens.

Province de Namur : **Namur** : Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Buisseret (A.). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Courtoy (Dr). — De Greeff, S. J. (R. P.). — Hahn, S. J. (R. P.). — S. G. Mgr Heylen. — Jossart. — Lebrun (Dr). — Legrand (abbé A.). — Lucas, S. J. (R. P.). — Martin (Dr). — de Reul (G.). — Rutten (Dr). — Visart de Bocarmé.

Dinant : Collège de Bellevue — Cousot (Dr). — Pierre (abbé O.). — **Floreffe** : de Dorlodot (S.). — Wilmotte (abbé). — **Gembloux** : Stainier (X.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Jambes** : de la Haye (A.). — **Le Mazy** : de Romrée (Cte). — **Maredret-sous-Sosoye** (Anthée) : Soreil. — **Profondeville** : de Pierpont (Ed.). — **Sclayn** : Wéry (Dr). — **Tamines** : Lambiotte (V.).

FRANCE

Paris : d'Acy (E.). — Alexis-M. G. (Frère). — Amagat. — Béchaux. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — de Bussy (L.). — Capelle (Éd.). — Colombier. — Delaire (A.). — Ecole libre de l'Immaculée Conception. — École libre de Sainte-Geneviève. — Eynaud (L.). — S. Exc. Mgr Ferrata. — de Foville (abbé). — Gauthier-Villars (A.). — Mgr Graffin. — Hamonet (abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Hautefeuille (P.). — Humbert (G.). — de Joannis (abbé). — Jordan (C.). — de Lapparent (A.). — Lemoine (G.). — Lorin. — de Nadaillac (M^{is}). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Prudham (abbé). — de Sauvage (C^{te}). — Surbled (D^{r}). — Thibaudier. — Vignon (P.). — de Vorges (C^{te} E. Domet). — Wolf. — Zeiller (R.).

Départements : *Allier :* **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — *Aveyron :* **Peuchot** (par Viviers) : Berlingin (M.). — *Bouches-du-Rhône :* **Aix** : Bedel (abbé R.). — **Marseille** : Fabry (L.). — *Cher :* **Bourges** : de Grossouvre (A.). — du Ligondès (V^{te}). — Moreux (abbé Th.). — *Côte-d'Or :* **Corberon** : Beauvois (Eug.). — **Dijon** : Poisot (M.). — *Drome :* **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (abbé A.). — *Haute-Garonne :* **Toulouse** : Prat (abbé F.). — *Finistère :* **Quimper** : Picquenard (D^{r} C.-A.). — *Gironde :* **Bordeaux** : Duhem (P.). — *Isère :* **Voiron** : de Kirwan (Ch.) — *Loire :* **Saint-Étienne** : Hervier (abbé J.). — *Loiret :* **Orléans** : d'Annoux (C^{te} H.). — *Maine-et-Loire :* **Angers** : Hy (abbé). — Leray (R. P. A.). — *Mayenne :* **Laval** : Œhlert (D.-P.). — *Haute-Marne :* **Langres** : Raclot (abbé V.). — *Meurthe-et-Moselle :* **Ham-sur-Heure** (par Longuyon) : Rachon (abbé P.). — **Nancy** : Vaultrin. — *Morbihan :* **Lorient** : de Maupeou (C^{te}). — **Vannes** : de Monsessus de Ballores (F.). — *Nord :* **Lille** : d'Adhémar (V^{te} R.). — Mgr Baunard. — Boulay (chan.). — Bourgeat (chan.). — Delemer. — Desplats (D^{r}). — Guermonprez (D^{r}). — Leconte (F.). — Lenoble. — Witz. (A.). — **Roubaix** : Faibherbe (D^{r} A.). — Wautelet (A.). — *Oise :* **Compiègne** : de Vorges (A.). — **Senlis** : de Montessus de Ballores (V^{te} R.). — *Orne :* **Alençon** : du Boys. — *Basses-Pyrénées :* **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (R. P.). — *Rhône :* **Saint-Georges-de-Reneins** : de Sparre (C^{te}). — *Saône-et-Loire :* **Châlon-sur-Saône** : Arcelin (A.). — *Seine :* **Pantin** : Tannery (P.). — *Seine-et-Oise :* **Versailles** : de Salvert (V^{te}). — *Seine-Inférieure :* **Rouen** : Lechalas (G.). — *Vaucluse :* **Serignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.). — *Vienne :* **Verneuil** (par Migné) : Lebouteux (P.).

ESPAGNE

Madrid : Dusmet y Alonzo (J. M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez y Castejon. — Grinda (J.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — Martinez y Saez (Fr.). — de Olavarria (M.). — S. Exc. Mgr Rinaldini. — Sanz (P.). — del Socorro (J.-M.-S.). — Torroja y Caballé (Ed.). — **Barcelone** : Cirera y Salse (Dr L.). — Cirera, S. J. (R. P. R.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Han. Obeso). — **Cuevas** (prov. Almeria) : Siret (L.). — **Lequeitio** (Vizcaya) : Adan de Yarza (R.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — **Santiago** (Galice) : Fernandez Sanchez (J.). — **Segovia** : Miranda y Bistuer (J.). — **Tortosa** (Tarragona) : R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valencia** : Vicent, S. J. (R. P.). — **Valladolid** : Risueno (E.-R.).

PAYS-DIVERS

ALLEMAGNE : **Bitche** (Lorraine) : Kieffer (abbé J.-J.). — **Cologne** : Schmidt (A.).

ANGLETERRE : **Jersey** (Iles de la Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P.).

AUTRICHE : **Bozen** (Tyrol) : Forni (Cte P.).

HOLLANDE : **Amsterdam** : De Veer, S. J. (R. P.). — **Fauquemont** (Limbourg hollandais) : Dressel, S. J. (R. P.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P.).

GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG : **Luxembourg** : Ferron (E.). — Soisson (G.).

ITALIE : **Rome** : S. E. le cardinal Ferrata. — Mgr G. Patroni. — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Catane** : S. .E le cardinal Nava di Bontifé. — **Palermo** : di Bartolo (Can. S.). — **Perugia** : Cicioni (R.-G.). — **Taormina** : Grandmond (Alph.).

PORTUGAL : **Lisbonne** : Pulido Garcia (J.).

SUISSE : **Fribourg** : Daniels (Dr Fr.). — Kirsch (M. J.-P.). — **Fille-Dieu-sous-Romont** (canton de Fribourg) : de Weck (abbé A.).

TURQUIE : **Constantinople** : van den Steen de Jehay (Cte Fréd.).

CANADA : **Québec** : Mgr La Flamme.

ÉTATS-UNIS : **Notre-Dame, Indiana** : Kirsch (R. P. Al.-M.). — Zahm (R. P. J.-A.), C. S. C. — **Washington** (Brookland, D. C.) : Bouquillon (abbé Th.). — Hagen, S. J. (R. P.).

MEXIQUE : **Puebla** : Spina, S. J. (R. P. P.).

INDES ANGLAISES : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

ALGÉRIE : **Oran** : Mgr Georgel.

MADAGASCAR : **Tananarive** : Camboué, S. J. (R. P. P.).

Membres décédés

N. BREITHOF.	Louvain.
Abbé CLASEN	Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).
CHAUTARD	Croissanville (Calvados — France).
S. G. Mgr DOUTRELOUX . . .	Liége.
DE JONCQUIÈRES	Paris.
LEDRESSEUR	Louvain.
Cte Ch. DE LIEDEKERKE . . .	Bruxelles.
Alb. NYSSENS	Bruxelles.
Gust. PARDON	Dour (Hainaut).

Listes des membres inscrits dans les sections

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire

MM. Adan de Yarza.
V^{te} d'Adhémar.
Balbas.
Chan. di Bartolo.
Belpaire.
Berlingin.
Boussinesq.
du Boys.
F. Breithof.
de Bussy.
Abbé Cabeau.
Caratheodory.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
Daubresse.
De Bien.
De Bloo.
De Fooz.
Jules De Jaer.
Deleu.
Delvosal.
Denoël.
De Tilly.
Durant.
Dusausoy.
Dutordoir.
de l'Escaille.
Eynaud.
Fabry.
Fagnart.
Folie.
Gauthier-Villars.
MM. Abbé Gelin.
Gilbert.
R. P. Gillard, S. J.
Goedseels.
Gonzalez.
Grinda.
de Grossouvre.
Hachez.
Hagen.
Haton de la Goupillière.
Havenith.
de la Haye.
Helleputte.
Humbert.
Iñiguez,
Fern Jacobs.
Camille Jordan.
Jourdan.
Kaïser.
Kennis.
Charles Lagasse-de Locht.
Lamarche.
Lambert.
Lambin.
Lechalas.
Leemans.
Le Paige.
V^{te} du Ligondès.
Mansion.
C^{te} de Maupeou.
C^{te} de Meeus.
Micha.

MM. Vte de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.
J. Nyssens.
Pierre Nyssens.
d'Ocagne.
de Olavarria.
Pardon.
E. Pasquier.
Abbé Pepin.
É. Picard.
Richald.
de Ridder.
Vte de Salvert.
Pelegrin Sanz.
Sibenaler.
Smits
Soisson.
Soreil.

MM. Cte de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
Suttor.
Paul Tannery.
Théron.
Thibaudier.
Timmermaus.
Torroja y Caballé.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Cte Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
Van Emelen.
R. P. Verschaffel.
Wautelet.
Wolf.
F. Wolters.
G. Wolters.

2e Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. Allard.
Amagat.
André.
Bayet.
R. P. Bleuset, S. J.
Blondel.
Branly.
Bruylants.
Abbé Capelle.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
Dallemagne.
R. P. Dechevrens, S. J.
R. P. De Greeff, S. J.
Delacre.
Delannoy.
Delemer.
Chanoine Demanet.
Abbé De Muynck.

MM. De Preter.
Francois De Walque.
R. P. Dressel, S. J.
Duhem.
Dumas-Primbault.
André Dumont.
Ferron.
Chanoine Gautier.
Gérard,
R. P. Goossens, S. J.
Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
Abbé de Joannis.
Jossart.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte.

MM. Lambot.
Laminne.
Leconte.
Lemoine.
Lenoble.
R. P. Leray.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Abbé Maes.
Frère Maubert.
R. P. Meurs, S. J.
Mullenders.
Chanoine Pieraerts.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
Fern. Ranwez.
de Reul.
Roland.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
MM. Schmidt.
R. P. Schoonjans, S. J.
Springael.
Abbé Staelpaert.
Abbé Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Thiry.
Tilman.
Van Aubel.
Van der Mensbrugghe.
Van Overbergh.
Abbé Verhelst.
Abbé Wilmotte.
Witz
R. P. Zahm.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie. Ethnographie, Science du langage. — Géographie

Mgr Abbeloos.
MM. d'Acy.
Frère Alexis.
Arcelin.
Abbé Arduin.
Beauvois.
Abbé Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. Bolsius, S. J.
Chanoine Boulay.
Abbé Bouquillon.
Chanoine Bourgeat.
Anatole Buisseret.
Joseph Buisseret.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
Cicioni.
Cloquet.
Daniels.
MM. Chanoine De Baets.
Chanoine De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.
Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. P.
Gustave De Walque.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine de Dorlodot.
Bon Drion.
Dugniolle.
Dusmet y Alonzo.
J.-H. Fabre.
R. P. Fita, S. J.
Abbé de Foville.
Mgr Georgel.
Mgr Graffin.
Abbé Grégoire.
Henseval.
Abbé Hervier.

MM. Heynen.
Abbé Hy.
Abbé Kieffer.
Mgr Kirsch.
R. P. Kirsch.
de Kirwan.
Kurth.
Mgr Lamy.
A. de Lapparent.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
Abbé Maurice Lefebvre.
Lejeune de Schiervel.
C^{te} Adolphe de Limburg-Stirum,
Édouard Martens.
Martinez y Saez.
Henri Matagne
Mgr Mercier.
Abbé Meunier.
Fernand Meunier.
Mgr Monchamp.
Monier.
F. de Montessus.
M^{is} de Nadaillac.
Abbé Nickers.
Nollée de Noduwez.
D.-P. OEhlert.
Picquenard.
de Pierpont.
Abbé F. Prat.
Abbé Rachon.

MM. C^{te} de Ribaucourt.
Risueño.
Roux.
Scarsez de Locqueneuille
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
H. Siret.
L. Siret.
M^{is} del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
Abbé Storms.
Chanoine Swolfs.
de la Vallée Poussin.
Jos. de la Vallée Poussin.
Chan. Van Aertselaer.
Van Bastelaer.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Vanderryst.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Vaultrin.
R. P. Vicent, S. J.
Vignon.
Albert de Vorges.
M^{is} de Wavrin.
de Wildeman.
Chanoine Wouters.
Zeiller.

4^{e} Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bibot.
Borginon.
Bouqué.
L. Cirera y Salse.
Convent.
Courtoy.

MM. Cuylits.
Debaisieux.
De Buck.
Degive.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.

MM. Delétrez.
De Moor.
Denys.
R. P. Deschamps, S. J.
Desplats.
Duchateau.
Dufrane.
Achille Dumont.
Dupont.
Duquenne.
Faidherbe.
Francotte.
Gilson.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
R. P. Hahn, S. J.
Heymans.
Étienne Henrard.
Félix Henrard.
Houze.
Huyberechts.
Lahousse.
Laruelle.
Lebrun.
Hector Lebrun.
Dr Lefebvre.

MM. Lemaître.
Martin.
Massange de Louvrex.
Meessen.
Moeller.
Nicolas Moeller.
A. Pasquier.
Peeters.
Proost
Rutten.
Schobbens.
Simon.
Stouffs.
Struelens.
Surbled.
Dr Swolfs.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Swieten.
Venneman.
Verriest.
Warlomont.
Aug. Wéry.

5e Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle

MM. Cte d'Annoux.
Béchaux.
Aug. Beernaert.
Cte de Bergeyck.
Berleur.
Berryer.
Bertrand.
Mgr Béthune.
Cappellen.

MM. Cartuyvels.
Abbé Claerhout.
Cooreman.
Cranincx.
Pce de Croy.
Dansette.
Davignon.
Herman De Baets.
Chanoine De Becker.

MM. Camille De Jaer.
Delaire.
Léon De Lantsheere.
Fernand Deschamps.
De Vadder.
Devuyst.
Halot.
D'Hondt.
Ernest Dubois.
B^{on} de Favereau.
B^{on} Gillès de Pélichy.
Grandmont.
Guelton.
Albert Henry.
B^{on} Hontard.
Albert Joly.
Léon Joly.
Lambrechts.
Lebouteux.
Abbé Legrand.
Leplae.
C^{te} Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Maestriaux.
Matthieu.
de Mérode-Westerloo.
Monthaye.
B^{on} de Moreau d'Andoy.

MM. Nerincx.
Pecher.
Jules Peeters.
Poisot.
Poullet.
Pyfferoen.
Roberti.
de Romrée.
C^{te} de Sauvage.
Schreiber.
de Selliers de Moranville.
Smekens.
van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
C^{te} Fr. van der Straten-Ponthoz.
Taymans.
M^{is} de Trazegnies.
Gaston t'Serstevens.
C^{te} d'Ursel.
Van den Bossche.
Van der Smissen.
C^{te} Amédée Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.
Vollen.
C^{te} Domet de Vorges.
Waucquez.
Abbé de Weck.
Vincent Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL

1900-1901

25e ANNÉE DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

1er Président d'honneur, M. le Dr Lefebvre,
2e Président d'honneur, M. le Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Président, M. G. Lemoine.
1er Vice-président, M. le Chanoine Delvigne.
2e Vice-président, M. A. Proost.
Secrétaire, M. Paul Mansion.
Trésorier, M. J. De Bruyn.
MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes.
Léon De Lantsheere.
Fr. De Walque.
G. De Walque.
Dr A. Dumont.
E. Goedseels.
Ch. Lagasse-de Locht.
Dr Moeller.
E. Pasquier.
Chanoine Swolfs,
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
G. Van der Mensbrugghe.

MEMBRES DU CONSEIL

1901-1902

Président, M. Proost.
1er Vice-président, M. le Chanoine Boulay.
2e Vice-président, M. E. Pasquier.
Secrétaire, M. P. Mansion.
Trésorier, M. E. Goedseels.
Membres, MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes.
L. Cousin.
L. De Lantsheere.
Chanoine Delvigne.
Lieutenant-Général De Tilly.
Fr. De Walque.
G. De Walque.
Dr Ach. Dumont.
Ch. Lagasse-de Locht.
Dr Lefebvre.
Comte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Chanoine Swolfs.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
G. Van der Mensbrugghe.
Éd. Van der Smissen.

BUREAUX DES SECTIONS

1901-1902

1re Section

Président, M. Fr. Daniels.
Vice-Présidents, MM. Ch.-J. de la Vallée-Poussin et Cl. Dusausoy.
Secrétaire, M. H. Dutordoir.

2e Section

Président, M. Louis Henry.
Vice-Présidents. MM. Van der Mensbrugghe et de Hemptinne.
Secrétaire, Le R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président, M. J. Leclercq,
Vice-Présidents, MM. le Ch. Bourgeat et le R. P. Van den Gheyn, S. J.
Secrétaire, M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Heymans.
Vice-Présidents, MM. Huyberechts et Delaunois.
Secrétaire, M. J. De Lantsheere.

5e Section

Président d'honneur, M. le Cte. van der Straten-Ponthoz.
Président, M. Ernest Dubois.
Vice-Présidents, MM. Léon Joly et Edmond Leplae.
Secrétaire, M. Alfred Nerincx.

QUESTIONS DE CONCOURS PROPOSÉES EN 1901

1° *Faire une étude approfondie des travaux de Simon Stévin sur la mécanique, en les comparant aux travaux antérieurs d'Archimède et aux travaux presque contemporains de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque.*

2° *Recherches nouvelles théoriques et expérimentales sur les cerfs-volants, aéroplanes, etc.*

3° *On demande de nouvelles recherches sur les insectes tertiaires.*

Les mémoires en réponse à ces questions doivent être envoyés au secrétariat avant le 1^{er} octobre 1902 (art. 14 du règlement).

SESSION DU 21 NOVEMBRE 1901

A GAND

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. Mansion donne lecture de la note suivante sur le Mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin intitulé : *Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée.*

On sait que, si $fz = 0$ est une équation algébrique, les courbes $|fz| =$ constante, $-i \log [fz : |fz|] =$ constante forment un système orthogonal. L'auteur s'occupe d'abord des propriétés des premières qu'il appelle des *cassinoïdes* et montre comment ces courbes se déforment quand la constante décroît de l'infini à une valeur infiniment petite : au début, la cassinoïde est un cercle enveloppant toutes les racines de l'équation $fz = 0$; à la fin, elle se réduit à des cercles infiniment petits entourant ces racines : elle passe d'une forme à l'autre par des scissions qui s'effectuent aux points-racines de l'équation dérivée. L'auteur déduit de ces propriétés des théorèmes curieux sur la position relative de ces points-racines et de ceux de $fz = 0$.

M. de la Vallée Poussin étudie ensuite les trajectoires des cassinoïdes dans leurs rapports avec les racines de $fz = 0$, $f'z = 0$, et en particulier, celles qu'il appelle *trajectoires frontières,* dont l'équation contient, dans le second membre, la valeur que prend le premier aux points racines de $f'z = o$.

Il arrive ainsi au théorème fondamental suivant : *On peut passer d'un point racine de fz à un autre en suivant les trajectoires fron-*

tières d'une seule manière; le chemin suivi passe au moins par un point-racine de la dérivée.

Nous proposons à la section de voter l'impression dans la seconde partie des ANNALES, du Mémoire de M. de la Vallée Poussin, qui contient, comme on le voit, une contribution importante à l'étude des fonctions algébriques.

Cette proposition est adoptée.

M. Mansion analyse le Mémoire de M. Neuberg : *Sur le quadrilatère complet.*

Dans ce travail, M. Neuberg étudie les propriétés du quadrangle ayant pour sommets les centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4, des quatre triangles formés par quatre droites données et celles des points de Lemoine de ces triangles. Voici quelques-unes de ces propriétés : 1. Le barycentre de six masses égales placées aux six sommets du quadrilatère complet formé par les quatre droites primitives est situé sur la droite qui joint les milieux des diagonales; il coïncide avec le barycentre de G_1, G_2, G_3, G_4. 2. Les diagonales du premier quadrilatère complet sont parallèles aux droites qui joignent les milieux des trois couples de côtés opposés du quadrangle complet G_1, G_2, G_3, G_4. 3. Le point K de Gauss du premier quadrilatère complet, c'est-à-dire le point dont la somme des carrés des distances aux côtés du quadrilatère est minimum, est le barycentre des six sommets de ce quadrilatère auxquels on suppose attachées des masses proportionnelles aux carrés des sinus des angles des côtés qui s'y rencontrent.

M. Neuberg rattache aux théorèmes établis par lui deux solutions du problème suivant : *Construire un quadrilatère complet dont on connaît les trois diagonales en grandeur et en direction.*

Le Mémoire de M. Neuberg contient un grand nombre de propriétés nouvelles du quadrilatère complet démontrées d'une manière simple et ingénieuse. Nous en proposons l'impression dans la seconde partie des ANNALES.

Cette proposition est adoptée.

M. le Comte de Sparre présente à la section un Mémoire intitulé : *Sur le mouvement du pendule conique dans le cas de petites oscillations.* — M. le Lieutenant-Général De Tilly est nommé commissaire pour examiner ce travail.

M. le vicomte d'Adhémar communique à la section, la Note suivante : *Sur une équation aux dérivées partielles à caractéristiques réelles* et en expose les principaux résultats.

Les équations aux dérivées partielles ont été étudiées à deux points de vue bien différents.

D'une part, au point de vue de Cauchy, tous les éléments de la question sont *analytiques* (développables en séries de Taylor), l'on atteint l'équation la plus générale mais l'on n'obtient l'intégrale que dans un *champ restreint*, avec la conviction que le domaine d'existence de la fonction intégrale est, en général, bien plus étendu que ce champ de convergence certaine des séries trouvées.

D'autre part, une autre école a pris des équations du second ordre et de forme simple, avec des conditions aux limites données pour l'intégrale et elle s'est proposé d'obtenir explicitement l'intégrale réelle, analytique ou non, et de reconnaître le domaine d'existence de cette intégrale. A cet ordre d'idées appartient le célèbre *Problème de Dirichlet.*

Le premier point de vue nous l'appellerons *Problème de Cauchy* et le second sera désigné sous le nom de *Problème Réel.*

Il est des points de contact entre les deux Problèmes : un élément fondamental lié à une équation aux dérivées partielles la (ou : les) caractéristique, au point de vue du Problème de Cauchy va jouer encore un rôle fondamental dans le Problème Réel. C'est un *fait* que rien, *à priori,* ne faisait prévoir.

Au point de vue de Cauchy, les caractéristiques des équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

sont définies par les relations

$$dx^2 \pm dy^2 = 0. \tag{2}$$

L'on dit que l'équation (1) est *elliptique* si l'on prend le signe +, *hyperbolique* dans le cas contraire.

Une équation du type elliptique peut être intégrée si l'on donne les valeurs de u sur une courbe *fermée* du plan (x, y).

Une équation du type hyperbolique exige la donnée de u et de $\frac{\partial u}{\partial x}$ mais sur *un arc de courbe* seulement, et cet arc de courbe ne doit être rencontré qu'une fois par une droite de la forme

$$y - y_0 = \pm (x - x_0). \tag{3}$$

Cet arc pourrait être formé de 2 segments de telles droites orthogonales, mais alors, sur ces segments, la donnée de u serait seule nécessaire et suffisante (*).

Or ces droites (3) ce sont [voir (2)] les caractéristiques de Cauchy de l'équation (1) hyperbolique.

Concluons. Dans le cas de 2 variables indépendantes, les caractéristiques, *courbes exceptionnelles* pour le théorème d'existence de Cauchy, sont, lorsqu'elles sont réelles, *courbes exceptionnelles* pour le Problème Réel.

Et la *réalité* ou *non réalité* des *caractéristiques* donne lieu à *deux Problèmes Réels* très différents l'un de l'autre.

Passons aux équations *à plus de 2 variables indépendantes* et montrons que ces coïncidences et différences se poursuivent.

En effet, d'une part, le Problème de Dirichlet, pour 3, 4, ..., n variables, se traite de la même manière que pour 2 variables, au moins quant au fond.

D'autre part, M. Volterra (**), dès 1894, a donné un mode de traitement de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \tag{A}$$

Dans ce Mémoire touffu, d'une lecture peu facile, M. Volterra montre quel rôle jouent les cônes

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 0. \tag{Λ}$$

Il les nomme *intuitivement* : « Caractéristiques » de l'équation (A).

(*) Voir G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, et BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1899, note de M. Picard.

(**) ACTA MATHEMATICA, t. XVIII.

En reprenant, il y a un an, l'étude de cette équation, j'ai reconnu immédiatement que les cônes (Λ) sont parmi les *multiplicités caractéristiques* telles que les a définies M. J. Beudon (*) dans le cas des équations à plus de 2 variables indépendantes.

Les plans inclinés à 45° sur l'horizon font aussi partie des caractéristiques de M. Beudon.

J'ai reconnu que ces plans comme ces cônes, multiciplités exceptionnelles pour le Problème de Cauchy, sont encore exceptionnelles pour le Problème Réel (**).

Il a plané un certain doute, pendant longtemps, sur la manière dont la notion de caractéristique devait être étendue au cas où le nombre des variables dépassait 2. Le point de vue de M. Beudon ne paraissait pas pleinement satisfaisant à M. Goursat (***), préoccupé surtout d'appliquer la belle méthode d'intégration de M. Darboux.

Il me semble que les quelques résultats que j'ai pu obtenir sur l'équation (A) aideront à montrer le grand intérêt des idées de M. Beudon.

Je crois que cela ressortira aussi des remarquables travaux dont s'occupe, en ce moment, M. l'abbé J. Coulon.

Après ces quelques mots sur *le rôle fondamental des caractéristiques dans le Problème Réel,* je dois dire encore que la *Méthode des approximations successives* est la méthode *toute naturelle* d'intégration dans ce problème. Elle consiste, on le sait, à déduire de l'intégrale d'une équation où le second membre est fonction des seules variables, l'intégrale de la même équation où le second membre peut renfermer la fonction inconnue et certaines de ses dérivées.

Par cette méthode, M. Picard a intégré les équations telles que :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f$$

(a, b, c, f étant fonctions de x et y).

(*) SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, t. XXV, 1897.

(**) COMPTES RENDUS, 11 février 1901, note de l'auteur. SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, juin 1901, note de l'auteur.

(***) M. E. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. II, p. 330, Paris, Hermann.

Il a même intégré des équations plus générales, telles que celle-ci, très importante dans la théorie des *fonctions fuchsiennes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{A}(x, y)\, e^u$$

M. Zaremba a étendu la méthode à l'équation (*) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + fu + h$$

M. Le Roy a considérablement et remarquablement étendu l'application d'idées analogues dans sa belle théorie des équations de la chaleur (**).

Dans les équations telles que (A) ou ses généralisations, étudiées par M. l'abbé J. Coulon, l'intégrale se présente sous forme de *dérivée* d'intégrales multiples.

Pour l'équation (A), je suis parvenu à trouver explicitement l'intégrale par la définition même de l'algorithme de dérivation.

Cette méthode est longue lorsqu'on l'applique au calcul effectif des dérivées, dérivées qu'il faut connaître pour intégrer l'équation (4).

Nous allons voir que le plus simple est d'utiliser une formule du *Calcul des variations.*

Soit donc

$$(4) \qquad \mathrm{A}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + fu + h.$$

Il faut, d'abord, étudier l'intégrale u et ses dérivées, de

$$(5) \qquad \mathrm{A}(u) = \mathrm{F}(x, y, z)$$

les données étant nulles sur la surface des données S (***).

(*) JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, 1897.

(**) Thèse. ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, 1898.

(***) SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, 1901, note de l'auteur.

Or, on a :

$$(6) \qquad 2\pi\, u\,(x_0, y_0, z_0) = \frac{\delta}{\delta z_0} \left\{ \iiint_{(W)} \mathrm{FV}_{\mathrm{A}}\, dx\, dy\, dz \right\}$$

W étant le volume limité

1° Par le cône

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2$$

2° Par S (voir la figure deux pages plus bas),

et

$$\mathrm{V}_{\mathrm{A}} = \log \left[\frac{z - z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z - z_0}{r}\right)^2 - 1} \right]$$

avec

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Établissons, d'après M. C. Jordan (*), la formule d'Ostrogradski, simplifiée pour notre usage. Soit

$$\mathrm{I} = \iiint_{\mathrm{W}(\lambda)} \varphi\,(x, y, z, \lambda)\, dx\, dy\, dz$$

le champ d'intégration W, comme φ, dépend d'un paramètre λ.

$$\mathrm{I} + \Delta\mathrm{I} = \iiint_{[\mathrm{W} + \Delta\mathrm{W}]} (\varphi + \Delta\varphi)\, dx\, dy\, dz\,;$$

Nous voulons calculer

$$\frac{\delta \mathrm{I}}{\delta \lambda} = \lim \frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta \lambda}\cdot$$

Pour cela, amenons les deux intégrales à avoir *même* champ d'intégration. Nous y arriverons en faisant correspondre à tout

---

(*) *Cours d'analyse*, 2e édition, t. III, p. 530. Paris, Gauthier-Villars.

point (x, y, z) de $(W + \Delta W)$ un point (X, Y, Z) de W par les formules

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= X + \xi \\ y &= Y + \eta \\ z &= Z + \zeta \end{aligned} \right.$$

avec la condition que la transformation vaille pour passer d'une frontière à l'autre. ξ, η, ζ sont des fonctions *infiniment petites* assujetties à cette seule condition.

Alors

$$I + \Delta I = \iiint_{(W)} \Psi J \, dX \, dY \, dZ,$$

J étant le jacobien

$$\left| \begin{matrix} 1 + \frac{\delta \xi}{\delta X} & \frac{\delta \xi}{\delta Y} & \frac{\delta \xi}{\delta Z} \\ \frac{\delta \eta}{\delta X} & 1 + \frac{\delta \eta}{\delta Y} & \frac{\delta \eta}{\delta Z} \\ \frac{\delta \zeta}{\delta X} & \frac{\delta \zeta}{\delta Y} & 1 + \frac{\delta \zeta}{\delta Z} \end{matrix} \right|,$$

Ψ étant la fonction $\varphi + \Delta\varphi$ exprimée en X, Y, Z.

On a

$$J = 1 + \frac{\delta \xi}{\delta X} + \frac{\delta \eta}{\delta Y} + \frac{\delta \zeta}{\delta Z} + \text{inf. petit.}$$

Or

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z) + \xi \frac{\delta \varphi}{\delta X} + \eta \frac{\delta \varphi}{\delta Y} + \zeta \frac{\delta \varphi}{\delta Z} + \cdots$$

et

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, y, z) &= \Delta\varphi(X, Y, Z) + \cdots \\ &= \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} \Delta\lambda + \cdots \end{aligned}$$

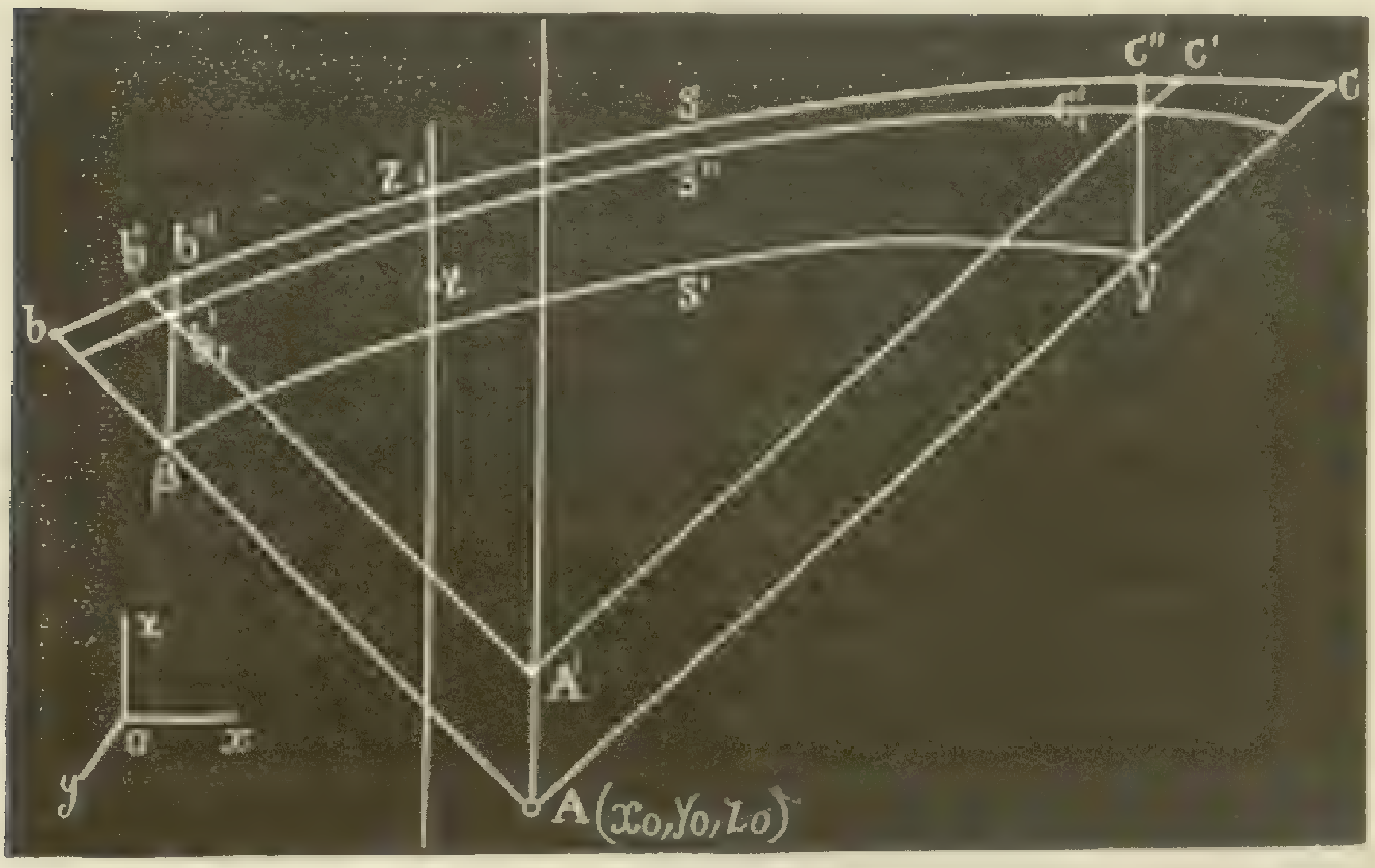
Donc

$$\Psi J = \varphi(X, Y, Z) + \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\Delta\lambda + \left[\frac{\delta}{\delta X}(\varphi\xi) + \frac{\delta}{\delta Y}(\varphi\eta) + \frac{\delta}{\delta Z}(\varphi\zeta)\right] + \cdots$$

Enfin, l'on a

$$(8) \quad \Delta I = \iiint_{(W)} \left\{\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\Delta\lambda + \frac{\delta}{\delta X}(\varphi\xi) + \frac{\delta}{\delta Y}(\varphi\eta) + \frac{\delta}{\delta Z}(\varphi\zeta)\right\} dX\, dY\, dZ;$$

c'est la formule cherchée. Appliquons-la.



Soit

$$W = Abc, \qquad FV_A = \varphi$$

Pour avoir la dérivée, par rapport à z_0 faisons

$$\lambda = z_0, \qquad \Delta\lambda = \Delta z_0 = \overline{AA'}.$$

Alors

$$W + \Delta W = A'b'c'.$$

Soient S'' et S' les surfaces obtenues en *abaissant* S respectivement de Δz_0^2 et $\Delta z_0^2 + \Delta z_0$

$$\text{vol. } A'b'c = \text{vol. } A'b'_1c'_1 + \text{vol. } (b'c', b'_1c'_1)$$

nous ferons correspondre $A'b'_1c'_1$ à $A\beta\gamma$ de W par les formules [voir : (7)]

$$(7') \qquad \begin{cases} \xi = 0, \qquad \eta = 0, \\ \zeta = \Delta z_0 = \text{constante}. \end{cases}$$

Puis nous ferons correspondre $(b'c', b'_1c'_1)$ à $(bc, \beta\gamma)$ de W ou, aux infiniment petits d'*ordre supérieur* près : $(b''c'', b'_1c'_1)$ à $(b''c'', \beta\gamma)$ par les formules

$$(7'') \qquad \begin{cases} \xi = 0, \qquad \eta = 0, \\ \zeta = (Z_1 - Z)\dfrac{\Delta z_0}{\Delta z_0 + \Delta z_0^2}, \end{cases}$$

Z_1 étant la cote d'intersection de la verticale du point avec S.

La formule (8) donne ainsi

$$\Delta I = \iiint\limits_{(Abc)} \frac{\delta\varphi}{\delta z_0} \Delta z_0 \, d\tau + \iiint\limits_{(A\beta\gamma)} \Delta z_0 \frac{\delta\varphi}{\delta Z} \delta\tau$$
$$+ \iiint\limits_{(bc,\, \beta\gamma)} \frac{\delta}{\delta Z}\left[\varphi\,(Z_1 - Z)\frac{\Delta z_0}{\Delta z_0 + \Delta z_0^2}\right] d\tau \,.$$

La deuxième intégrale donne une intégrale de surface

$$\Delta z_0 \iint\limits_{(\text{cône } A\beta\gamma \,+\, \text{surf. } \beta\gamma)} \varphi \, d\omega.$$

La troisième intégrale donne, de même une intégrale de surface étendue à bc qui est nulle, puisqu'alors $Z_1 - Z = 0$ et une intégrale étendue à $\beta\gamma$

$$- \iint\limits_{(\text{surf. } \beta\gamma)} \varphi \, \Delta z_0 \, d\omega$$

puisque, sur $\beta\gamma$ l'on a

$$Z_1 - Z \equiv \Delta z_0 + \Delta z_0^2.$$

En somme, l'on a

$$\Delta I = \iiint\limits_{(Abc)} \frac{\delta\varphi}{\delta z_0} \Delta z_0 \, d\tau + \Delta z_0 \iint\limits_{(\text{cône } Abc)} \varphi \, d\omega.$$

En particulier, pour (6), V_A étant *nul* sur le cône :

$$2\pi \, u(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_{(Abc)} F(x, y, z) \frac{\delta V_A}{\delta z_0} d\tau.$$

Le détail du calcul des dérivées premières et secondes de $u(x_0, y_0, z_0)$ sera publié ultérieurement.

L'on trouve, en appelant Z la cote maxima de S, les résultats suivants

$u(x_0, y_0, z_0)$ est de l'ordre de $(Z - z_0)^2$

$\frac{\delta u}{\delta x_0}, \frac{\delta u}{\delta y_0}, \frac{\delta u}{\delta z_0}$ sont de l'ordre de $(Z - z_0)$.

Cela permet, quelque grand que soit S, d'intégrer (4) par approximations successives.

M. J. Neuberg fait le rapport suivant sur le Mémoire de M. Mansion, intitulé : *Démonstration du Théorème de Jacques Bernoulli.*

La démonstration de ce théorème a occupé un grand nombre de géomètres : de Moivre, Stirling, Maclaurin, Euler, Laplace, Poisson, Bertrand, Poincaré. Ce n'est pas ici le lieu de retracer l'historique de la question ; je me borne à renvoyer à une note substantielle de M. Czuber dans le JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, t. VII, pp. 65-91.

Les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE renferment déjà deux communications sur le théorème de Bernoulli, l'une de M. Mansion (1892, t. XVI, 1re partie, pp. 85-87), l'autre de M. Goedseels (1894, t. XIX, 1re partie, pp. 4-7).

Dans le mémoire actuel, M. Mansion développe complètement une démonstration qu'il avait déjà esquissée dans les *Akten des fünften internationalen Kongresses Katholischer Gelehrten zu München*, 1900, pp. 427-428. Toutes les difficultés du problème y sont abordées de front, et les résultats y sont établis par une analyse souvent délicate, mais toujours rigoureuse. Je regrette que la nature même de la question ne me permette pas d'entrer dans les détails pour faire ressortir le mérite particulier de ce travail. Arrivera-t-on à simplifier la démonstration ? Il ne m'appartient pas de me prononcer sur ce point, notre savant collègue de Gand étant plus compétent que moi.

En résumé, j'estime que le mémoire qui nous est soumis constitue un progrès important dans une question intéressante et fixera l'attention des géomètres ; il est digne de figurer dans nos ANNALES.

Ces conclusions sont adoptées par la section. — Sur la demande de l'auteur, elle l'autorise à introduire, dans son travail, les simplifications ou améliorations qui pourraient lui être suggérées par la lecture du *Calcul des probabilités* publié tout récemment dans l'*Encyclopédie mathématique allemande.*

Le R. P. Bosmans présente à la section *Deux lettres inédites de Grégoire de S. Vincent, écrites à Gand en 1655.* Sur la proposition de M. Mansion, qui a lu le travail du R. P. Bosmans, la section en vote l'impression dans la seconde partie des ANNALES.

M. É. Goedseels fait ensuite une communication relative à *L'erreur moyenne dans la méthode des moindres carrés.* Il reviendra ultérieurement sur ce sujet.

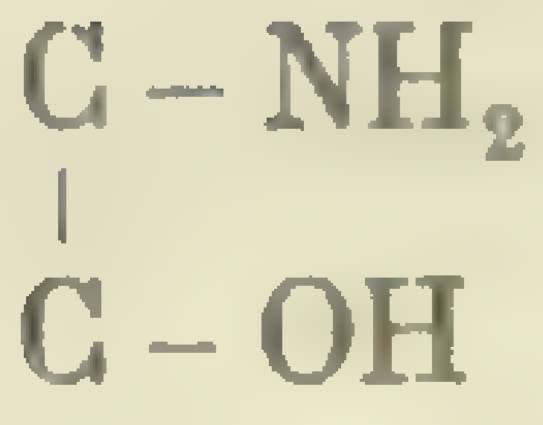
Vu l'heure avancée, des communications annoncées par M. Mansion *Sur les équations linéaires* et *Sur les rapports de la géométrie projective avec la géométrie métrique* sont renvoyées à la session suivante.

Deuxième section

M. Louis Henry fait les communications suivantes :

1. *Sur divers alcools-amines aliphatiques en* C_4 *et en* C_5

Il m'a paru intéressant de rechercher quelle influence exerce sur la volatilité de la molécule totale la transposition des radicaux - OH et - NH_2, dans les *alcools-amines* renfermant le système

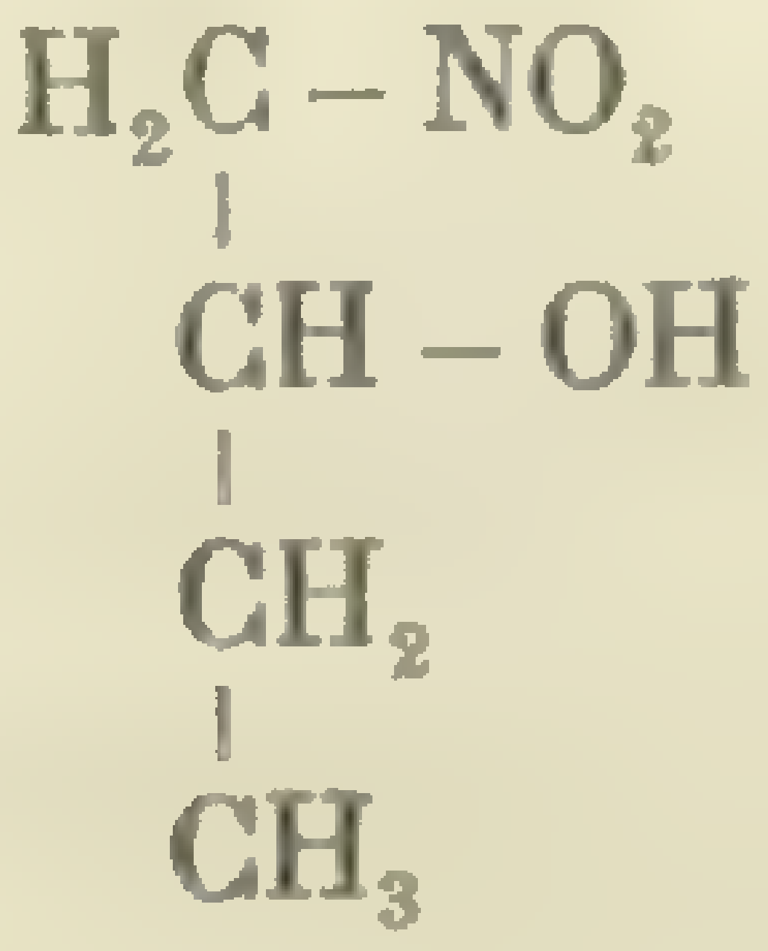


$$\begin{array}{l} C-NH_2 \\ \mid \\ C-OH \end{array}$$

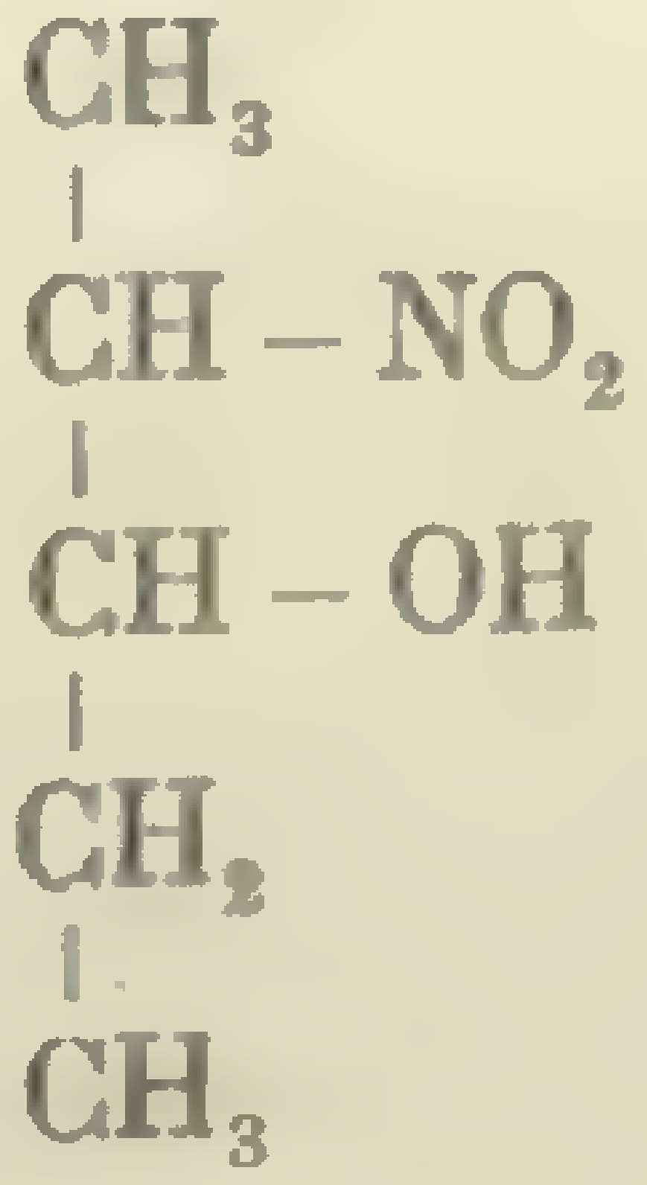
alors que tout n'est pas identique quant aux éléments ou groupements d'éléments fixés sur ces deux atomes de carbone.

C'est dans ce but que j'ai chargé deux de mes élèves, MM. Tordoir et Stiénon, d'examiner les alcools-amines en C_4 et en C_5 que l'on peut rattacher au *propanal* $CH_3 - CH - CHO$ et au *nitro-propane* primaire $H_3C - CH_2 - CH_2(NO_2)$.

M. Tordoir s'est occupé du *propanal*. La condensation de cette aldéhyde avec le *nitro-méthane* et le *nitro-éthane* fournit les alcools nitrés suivants :

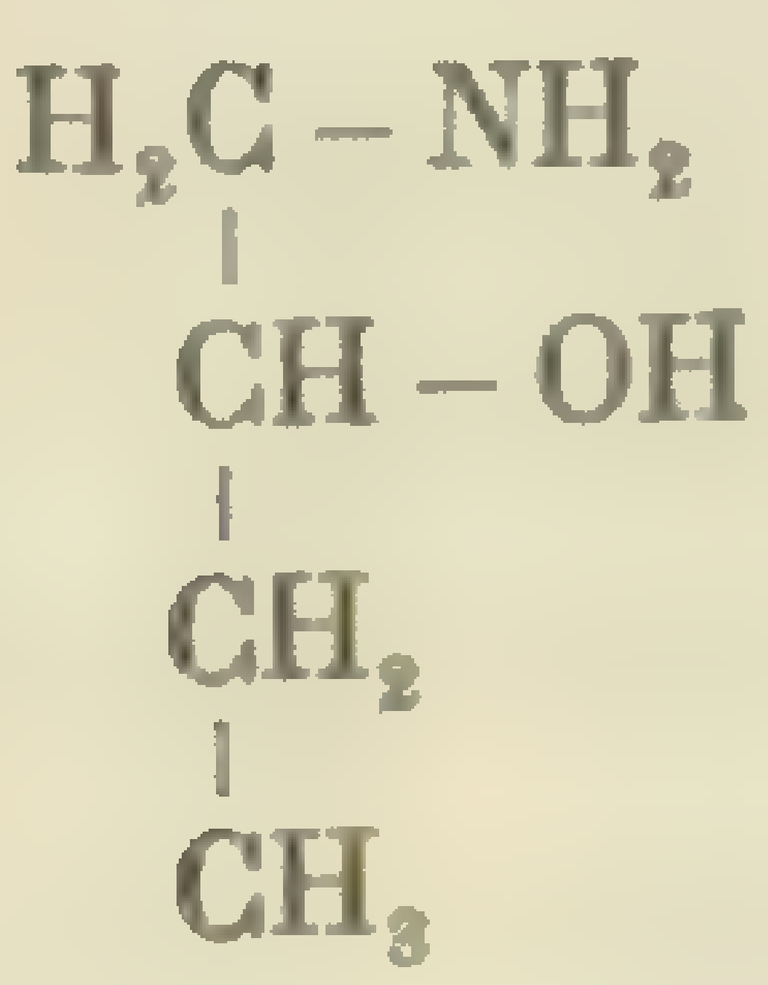


$$\begin{array}{l} H_2C-NO_2 \\ \mid \\ CH-OH \\ \mid \\ CH_2 \\ \mid \\ CH_3 \end{array}$$

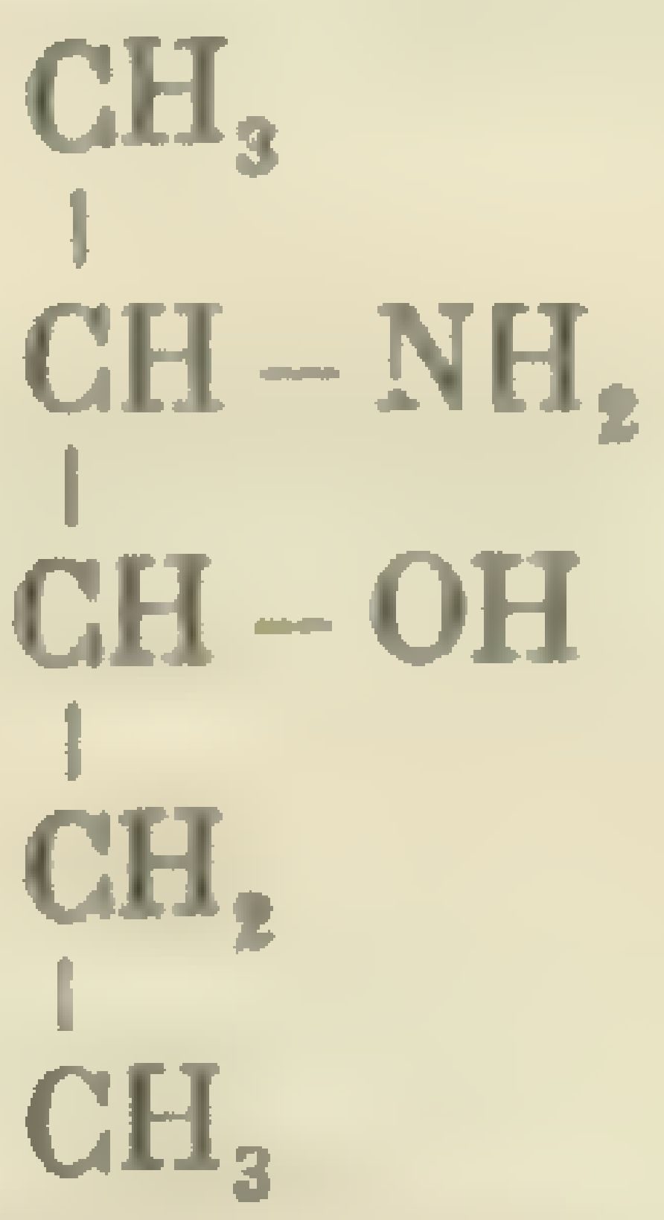


$$\begin{array}{l} CH_3 \\ \mid \\ CH-NO_2 \\ \mid \\ CH-OH \\ \mid \\ CH_2 \\ \mid \\ CH_3 \end{array}$$

lesquels, par voie de réduction, fournissent à leur tour les alcools-amines :



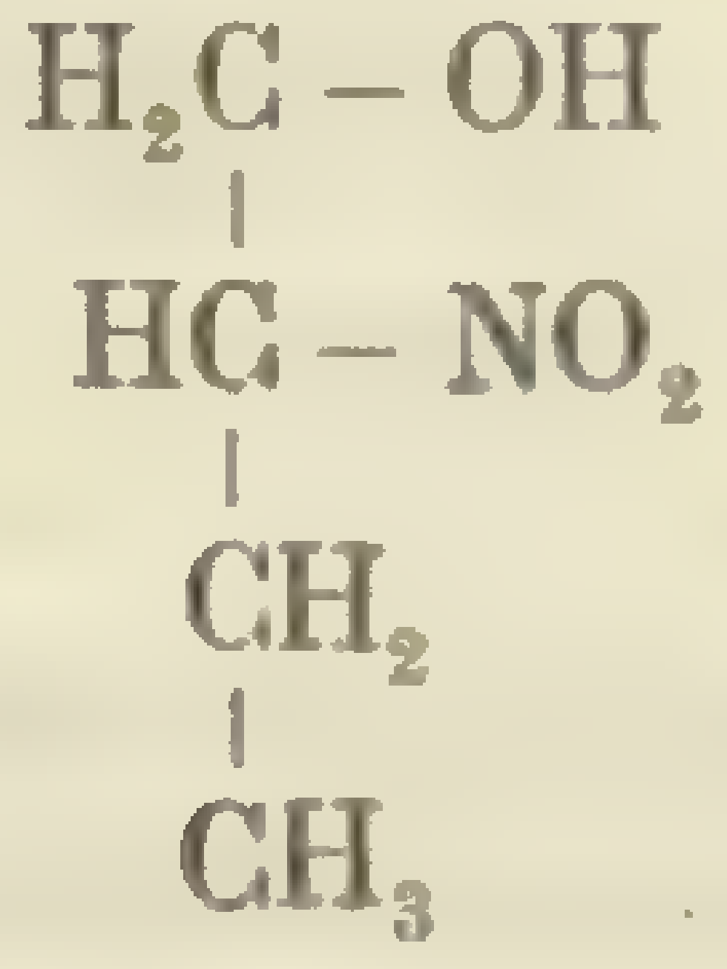
$$\begin{array}{l} H_2C-NH_2 \\ \mid \\ CH-OH \\ \mid \\ CH_2 \\ \mid \\ CH_3 \end{array}$$



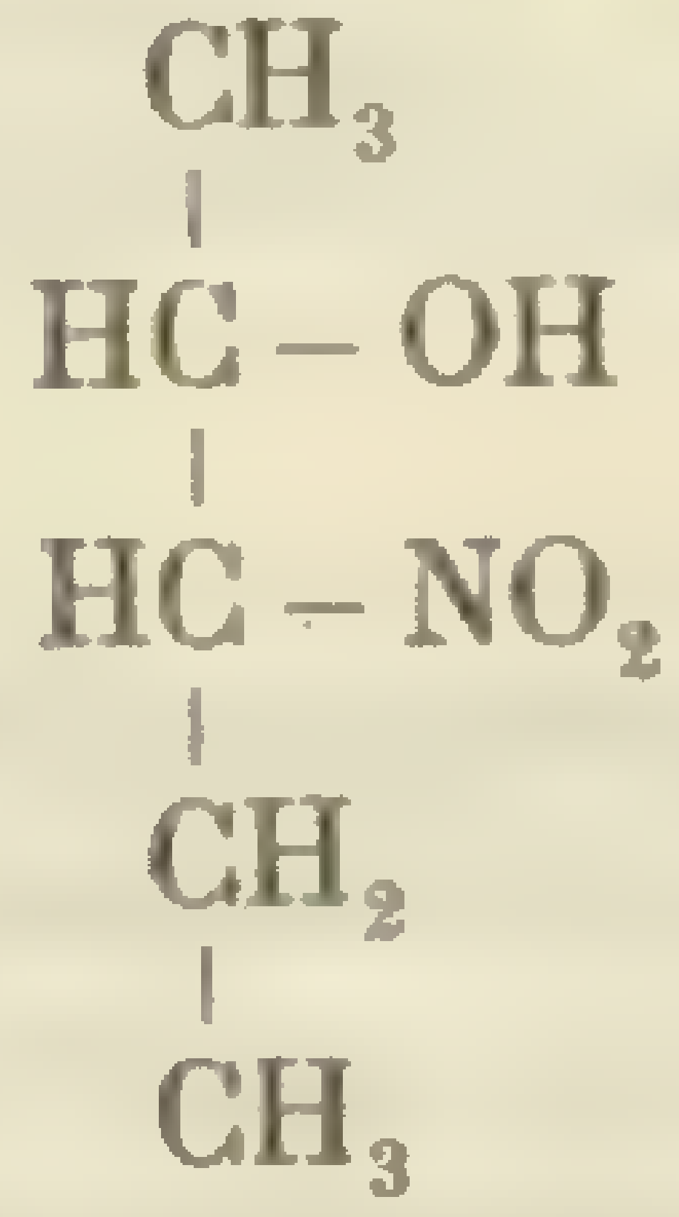
$$\begin{array}{l} CH_3 \\ \mid \\ CH-NH_2 \\ \mid \\ CH-OH \\ \mid \\ CH_2 \\ \mid \\ CH_3 \end{array}$$

Ce sont l'un et l'autre des liquides quelque peu épais, bouillant, sous la pression ordinaire, à 171°-172°.

M. Stiénon s'est occupé du *nitro-propane*. La condensation de ce composé avec le *méthanal* $H_2C = O$ et *l'éthanal* $H_3C - CHO$ fournit les alcools nitrés suivants, isomères des précédents :

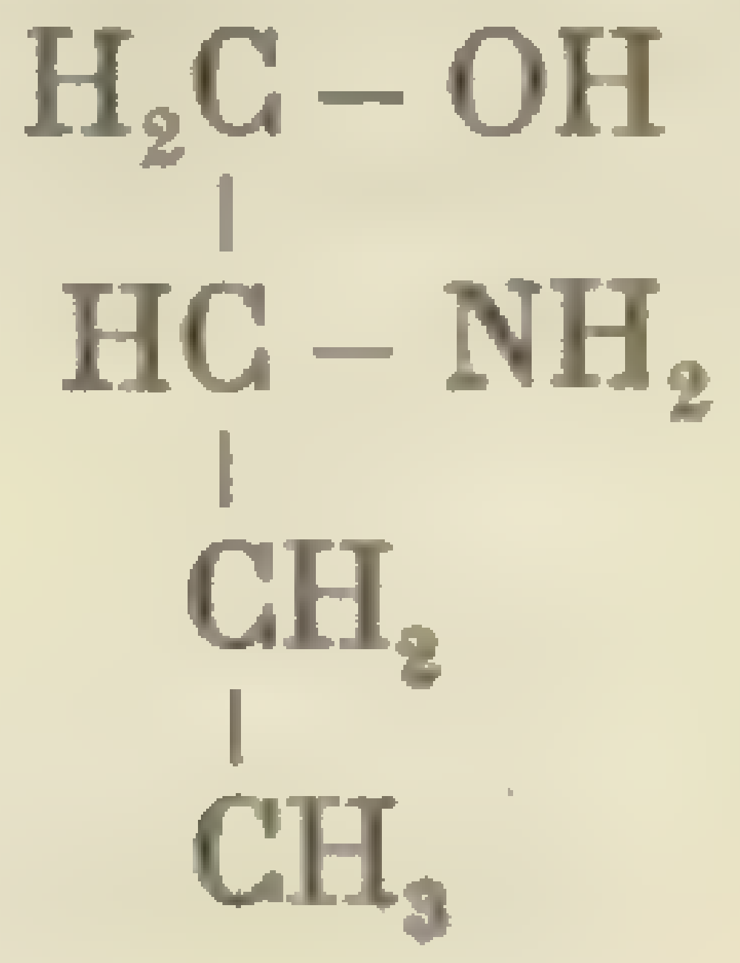


$$\begin{array}{c} H_2C - OH \\ \vert \\ HC - NO_2 \\ \vert \\ CH_2 \\ \vert \\ CH_3 \end{array}$$

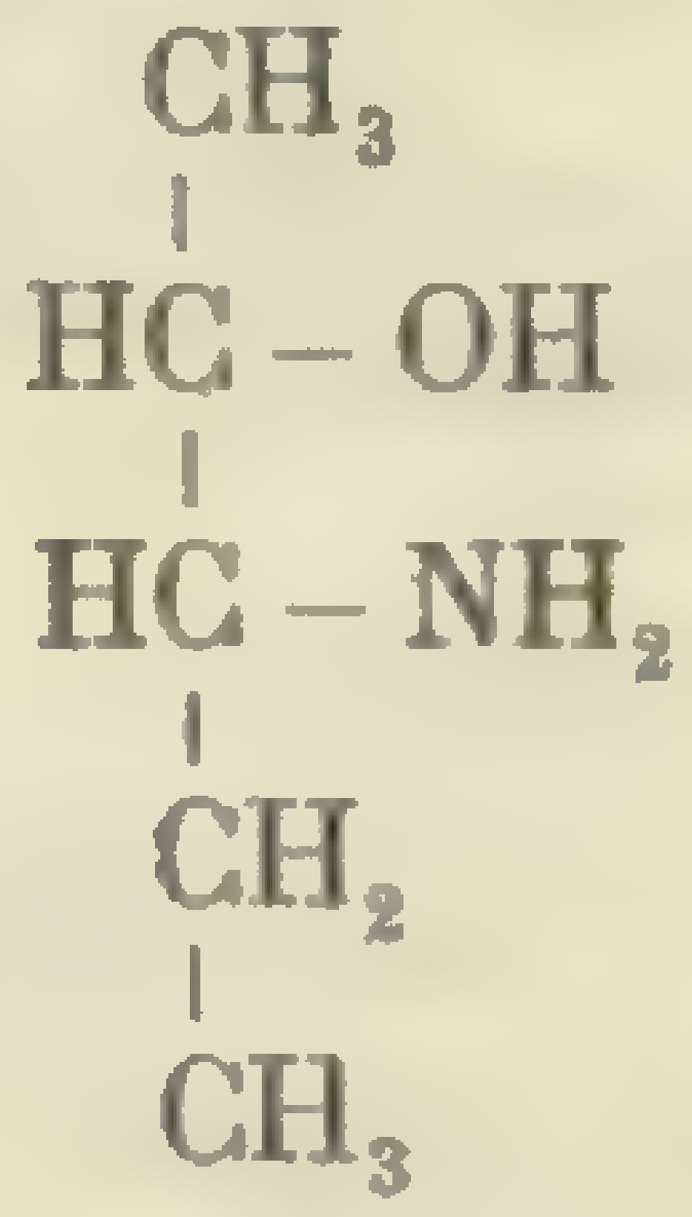


$$\begin{array}{c} CH_3 \\ \vert \\ HC - OH \\ \vert \\ HC - NO_2 \\ \vert \\ CH_2 \\ \vert \\ CH_3 \end{array}$$

Ceux-ci, soumis à l'action des agents réducteurs hydrogénants, se sont transformés dans les alcools-amines que voici :



$$\begin{array}{c} H_2C - OH \\ \vert \\ HC - NH_2 \\ \vert \\ CH_2 \\ \vert \\ CH_3 \end{array}$$

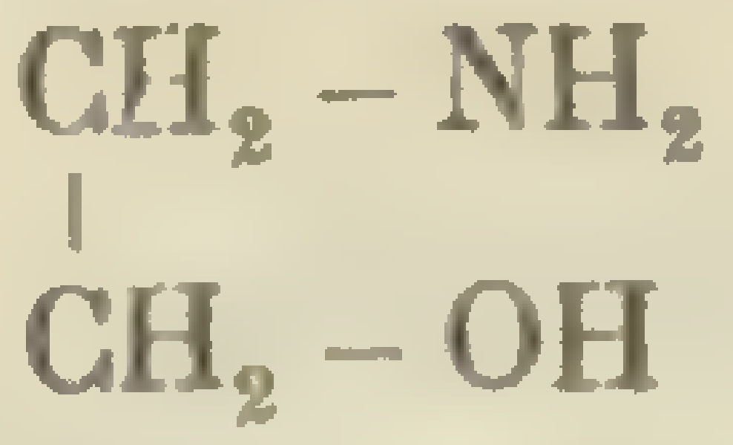
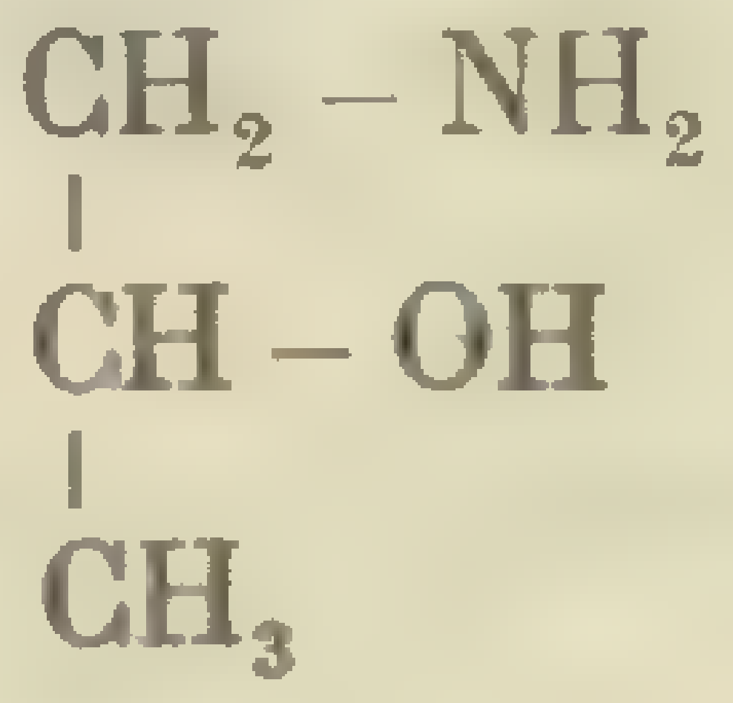
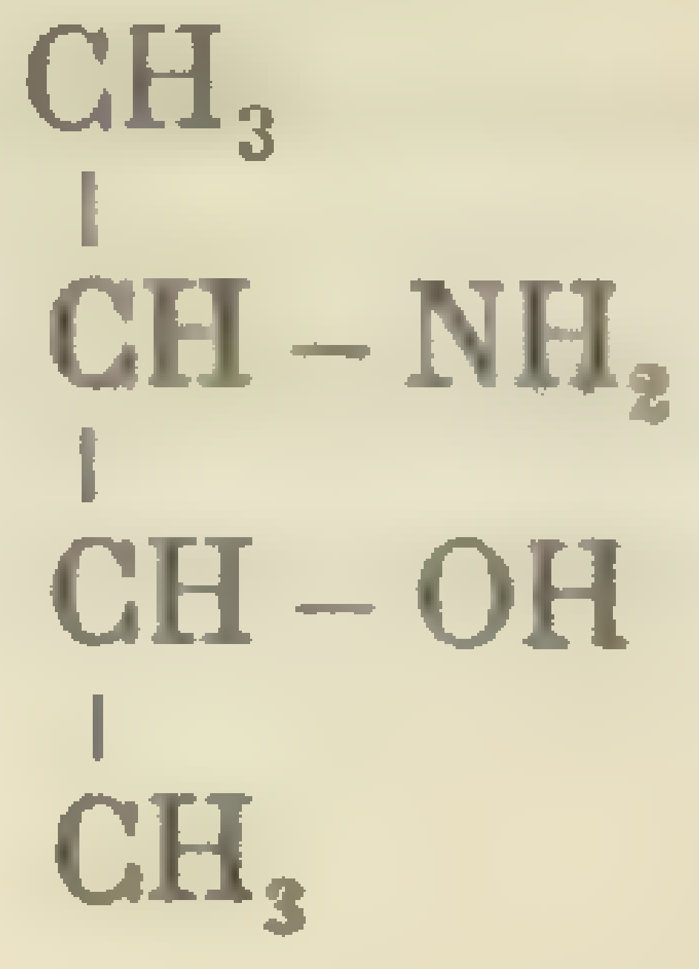


$$\begin{array}{c} CH_3 \\ \vert \\ HC - OH \\ \vert \\ HC - NH_2 \\ \vert \\ CH_2 \\ \vert \\ CH_3 \end{array}$$

lesquels entrent en ébullition, sous la pression ordinaire, aussi à la température de 171°-172° environ.

La question posée est donc ainsi résolue négativement.

Je rappellerai à cette occasion les points d'ébullition d'autres alcools-amines déjà connus :

L'éthanol-amine	 $\begin{array}{c} CH_2 - NH_2 \\ \vert \\ CH_2 - OH \end{array}$	Éb. 172°
Le propanol-amine secondaire	 $\begin{array}{c} CH_2 - NH_2 \\ \vert \\ CH - OH \\ \vert \\ CH_3 \end{array}$	Éb. 160-161°
Le butanol-amine bi-secondaire	 $\begin{array}{c} CH_3 \\ \vert \\ CH - NH_2 \\ \vert \\ CH - OH \\ \vert \\ CH_3 \end{array}$	Éb. 160-161°

En comparant ces points d'ébullition avec ceux des alcools-amines que je viens de signaler, on peut en conclure :

1° Que l'*éthylisation* de l'éthanol-amine, dans quelque groupement qu'elle ait lieu, n'affecte pas sensiblement le point d'ébullition ;

2° Que la *méthylisation* du même composé l'abaisse au contraire de 10° environ, soit qu'elle ait lieu dans *un* seul ou dans les *deux* composants de ce produit ;

3° Que deux alcools-amines homologues voisins, différant par $-CH_2$, diffèrent seulement d'environ une dizaine de degrés dans leur point d'ébullition.

2. *Sur certains dérivés éthyléniques*

Au cours de mes recherches sur les dérivés éthyléniques, j'ai constaté certains faits qui se rattachent à la question générale des *circonstances avec lesquelles est en rapport l'aptitude réactionnelle* des éléments à l'état de combinaison.

Cette aptitude réactionnelle dans son intensité surtout, parfois aussi dans son genre, est en rapport :

1° *Avec l'état thermique des éléments en combinaison.*

Perdre de la chaleur, c'est perdre de l'affinité ; en acquérir, c'est acquérir de l'affinité. En une certaine manière, il est vrai de dire que *l'affinité chimique, c'est la chaleur*. Il est évident qu'il n'est pas ici question de la chaleur extérieurement sensible, c'est-à-dire de la chaleur thermométrique.

2° *Avec la présence dans la molécule, dans un voisinage plus ou moins immédiat, de certains éléments étrangers.*

C'est à cette relation d'influence réciproque des éléments combinés, dans leurs aptitudes réactionnelles, que j'ai donné le nom, justifié selon moi, de *solidarité fonctionnelle*. Il y a là une mine inépuisable à exploiter. Depuis longtemps je m'efforce de démontrer expérimentalement, dans les faits particuliers, ce fait général.

J'en reviens aux composés *éthyléniques*.

a) État thermique. — Les éthers bi-acides que forme le glycol H_4C_2 - $(OH)_2$ avec les acides gras se préparent aisément par la réaction du *bibromure d'éthylène* H_4C_2 - Br_2 sur les sels potassiques des acides gras K - $C_nH_{2n-1}O_2$, à l'état sec, chauffés au bain d'air, dans un ballon muni d'un tube droit servant de réfrigérant. J'ai préparé ainsi ces éthers depuis l'étage C_1 l'acide formique, jusqu'à C_5 l'acide valérique.

Or, on constate que la réaction est aisée et rapide à partir de C_2 inclus, tandis qu'elle est lente et relativement difficile avec le formiate potassique. On pourrait, au premier abord, croire le contraire, car K 39 représente dans le formiate une proportion centésimale bien plus considérable que dans les autres sels plus carbonés.

	K °/₀
Formiate potassique	46,43
Acétate	39,8
Valérate	27,85

La raison de cette différence d'aptitude réactionnelle de K dans ces divers sels se trouve dans la différence d'état thermique de ce métal, différence manifestée par *la chaleur de neutralisation de ces acides*, ou, ce qui revient au même, par la chaleur de formation de ces sels à l'aide de leurs constituants, acide et KOH.

Il ne faut pas tenir compte des chaleurs de neutralisation par la *voie humide*.

$$C_nH_{2n}O_2 \text{ aq.} + \text{KOH aq.} = KC_nH_{2n-1}O_2 \text{ aq.} + H_2O + Q.$$

Déterminées dans ces conditions, les chaleurs de neutralisation Q sont toutes à peu de chose près les mêmes et varient entre 13 et 14 c.

Les réactions dont je m'occupe sont des réactions de la *voie sèche*, par conséquent les chaleurs de formation des sels à considérer sont celles aussi de la *voie sèche*, c'est-à-dire des constituants acides et base dans leur état naturel.

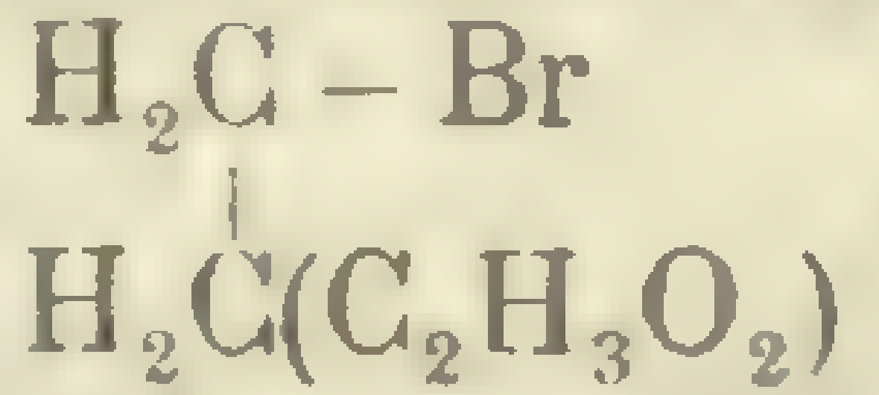
$$\text{Acide liquide} + \text{KOH solide} = \text{Sel solide} + H_2O \text{ solide} + Q.$$

Ces valeurs Q en calories sont les suivantes :

Acide formique	28,30
— acétique	24,4
— propionique	24,4

Q a une valeur plus faible encore pour NaOH dans l'acide valérique.

On aperçoit de suite les conséquences de cette différence notable, entre la chaleur de formation du *formiate potassique* et celle de l'acétate du même métal et des acides plus carbonés (*).

On devine à présent quelle doit être l'action du bibromure d'éthylène sur un mélange de deux sels d'acides gras différents. Voici quelques réactions exécutées dans cette direction. Avant de les indiquer je ferai remarquer que j'ai employé, non le bibromure d'éthylène lui-même $H_4C_2 - Br_2$, mais la *bromo-acétine*  $\begin{array}{l} H_2C - Br \\ \ \ \ \ | \\ H_2C(C_2H_3O_2) \end{array}$ et cela pour deux motifs, d'abord pour diminuer la quantité du sel nécessaire, ensuite pour rendre la réaction du composant éther bromhydrique, $H_2\underset{|}{C}\,Br$, plus vive et plus aisée, comme on le verra plus loin. J'ajoute que ces réactions ont été déterminées au milieu d'un liquide absolument inerte sur ses divers facteurs, la *diacétine éthylénique* $H_4C_2 - (C_2H_3O_2)_2$ qui, bouillant à 186°, permet d'atteindre une température suffisamment élevée.

(*) La différence d'état thermique du *potassium* K, dans le *formiate* et *l'acétate* résulte encore de la différence des chaleurs de formation de ces sels à l'aide de leurs éléments. Les voici (¹) pour ces composés considérés à l'état solide :

C, H, K, O_2	+ 164,0 calories.
C_2, H_3, K, O_2	+ 175,7 »

Quel que soit le mode d'après lequel ces pertes de chaleur se répartissent dans les élémenfs constitutifs de ces corps, il est incontestable que le potassium en a subi une plus considérable dans le *formiate* que dans *l'acétate*.

(¹) M. Berthelot, *Thermochimie*, t. II, p. 198.

1^er^ Système. — Bromo-acétine + $K - CHO_2$ + $K - C_5H_9O_2$. Le valérate est seul atteint. Il se forme de *l'acéto-valérine éthylénique* $C_2H_4 < \begin{matrix} C_2H_3O_2 \\ C_5H_9O_2 \end{matrix}$ Éb. 223° (*).

(*) Voici le bulletin détaillé d'une expérience :

a) Avant la réaction.

Sels.

$K - CHO_2$	16 gr. (1)	> 44 gr.
$K - C_5H_9O_2$	28 gr.	

Liquides.

$Br\,CH_2 - CH_2\,(C_2H_3O_2)$	33 gr.	> 91 gr.
$(C_2H_4) - (C_2H_3O_2)_2$	58 gr. (2)	

b) Après la réaction.

1° $K - C_5H_9O_2$ supposé entré en réaction seul.

Sels.

$K - C_5H_9O_2$	16 gr.	> 40 gr.
$K - Br$	24 gr.	

Liquides.

$C_2H_4 < \begin{matrix} C_2H_3O_2 \\ C_5H_9O_2 \end{matrix}$	37 gr.	> 95 gr.	. . . . Éb. 223°
$C_2H_4 - (C_2H_3O_2)_2$	58 gr.		

2° $K - CHO_2$ entré en réaction seul.

Sels.

$K - C_5H_9O_2$	28 gr.	> 52 gr.
$K - Br$	24 gr.	

Liquides.

$C_2H_4 < \begin{matrix} CHO_2 \\ C_2H_3O_2 \end{matrix}$	26 gr.	> 84 gr.	. . . . Éb. 182-183°
$C_2H_4\,(C_2H_3O_2)_2$	58 gr.		

En fait, on a recueilli 41 grammes de mélange salin solide, après dissolution et dessiccation de celui-ci. On y a trouvé, par titration, à l'aide du permanganate potassique, gr. 15,7 de $K - CHO_2$.

De plus, par une distillation jusqu'à siccité, sous pression réduite et à la fin presque dans le vide, du mélange réactionnel, on a recueilli 93 grammes de liquide, mélange de la diacétine employée et de l'acétine mixte formée. A la distillation de ce mélange, le thermomètre s'est élevé jusqu'à 225°. De 210° à 225°, on a recueilli 20 grammes d'acéto-valérine.

(1) Ces quantités correspondent à 2/10 de molécule gramme.

(2) Soit 4/10 de molécule gramme.

2e Système. — Bromo-acétine $+ K - CHO_2 + K - C_2H_3O_2$. L'acétate est seul atteint, ainsi que le constate l'examen du mélange des sels restants.

3e Système. — Bromo-acétine $+ K - C_2H_3O_2 + K - C_5H_9O_2$. Réaction des deux sels.

Les faits que je viens de relater constituent certes une application intéressante du *principe du travail maximum.*

b) Solidarité fonctionnelle.— La *bromo-acétine éthylénique*, produit de l'action de l'acide H Br gazeux sur la *diacétine* $H_4C_2 - (C_2H_3O_2)$ constitue un composé d'une importance capitale dans l'ordre des dérivés éthyléniques, par la facilité avec laquelle elle se laisse transformer en d'autres dérivés importants, telles que la monobromhydrine $H_4C_2 < \begin{matrix} OH \\ Br \end{matrix}$ le glycol lui-même $H_4C_2 - (OH)$, etc.

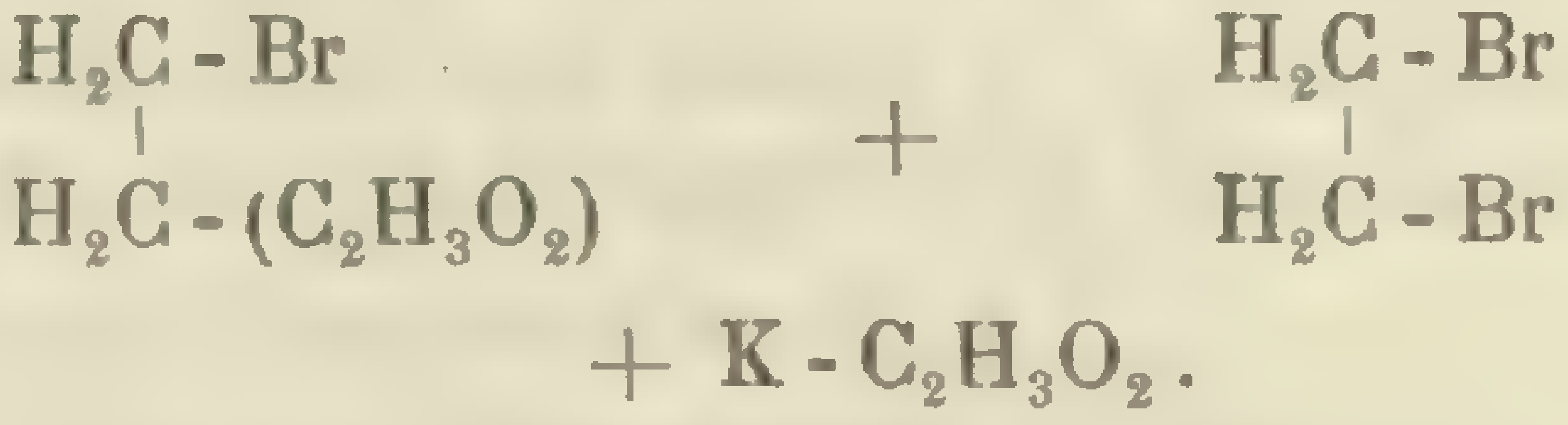
Il est bien à regretter que l'on ne parvienne pas à transformer directement le *bibromure d'éthylène* $H_4C_2\ Br_2$ en ce composé, par la réaction de l'acétate de potassium en quantité insuffisante pour obtenir la *diacétine* $H_4C_2 - (C_2H_3O_2)_2$.

Après des tentatives réitérées et infructueuses pour obtenir ce résultat, je me suis demandé quelle est la cause de leur insuccès. Je l'ai trouvée dans la modification que détermine dans le composant $\underset{|}{H_2C} - Br$, le composant voisin *méthyléno-oxyacétyle* $\underset{|}{H_2C} - O - CO - CH_3$.

J'ai déjà fait remarquer que le voisinage plus ou moins immédiat de l'oxygène détermine dans les composants éthers haloïdes une recrudescence d'aptitude réactionnelle considérable. C'est ainsi que *l'acétate d'éthyle bi-chloré bi-primaire* $\begin{matrix} Cl\ CH_2 - CO_2 \\ Cl\ CH_2 - CH_2 \end{matrix} > O$ réagit sur l'iodure de sodium dans l'alcool, exclusivement par le composant $Cl\ \underset{|}{C}H_2$ de *l'acétyle* $Cl\ CH_2 - CO$.

Le bibromure d'éthylène $\begin{matrix} H_2C\ Br \\ | \\ H_2C\ Br \end{matrix}$ est un être chimique double, formé de deux moitiés symétriques et identiques. Quoique sa réaction sur l'acétate de potassium soit rapide, elle est en réalité successive, et la pensée conçoit qu'à un moment donné un seul des composants $\underset{|}{C}H_2\ Br$ a réagi sur $K - C_2H_3O_2$, pour former $Br\ CH_2 - CH_2\ (C_2H_3O_2)$. L'existence de ce composé intermédiaire ne peut être que passagère. La présence du composant *oxyacé-*

tique $H_2C - C_2H_3O_2$ détermine en effet dans le composant restant éther haloïde $H_2C - Br$ une modification, une recrudescence d'aptitude réactionnelle. Celui-ci réagit à son tour sur l'acétate potassique, de préférence au même composant d'une molécule de bibromure d'éthylène intact. La réaction devient ainsi nécessairement totale et complète, moléculairement parlant. L'expérience directe constate qu'il en est ainsi. On a soumis à l'action de la chaleur, dans les conditions indiquées, un mélange équimoléculaire de bromo-acétine, de bibromure d'éthylène et d'acétate potassique



$$\begin{array}{l} H_2C - Br \\ \mid \\ H_2C - (C_2H_3O_2) \end{array} + \begin{array}{l} H_2C - Br \\ \mid \\ H_2C - Br \end{array} + K - C_2H_3O_2 .$$

Il s'est formé de la diacétine éthylique, aux dépens de la bromoacétine qui a seule pris part à la réaction, et l'on a retrouvé intégralement le bibromure d'éthylène.

J'ajoute pour terminer cet objet que les choses ne se passent pas de la même manière à l'étage C_3, dans les dérivés triméthyléniques. Le *bibromure de triméthylène* $Br\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,Br$, chauffé avec une seule molécule de $K - C_2H_3O_2$, fournit en notable quantité du *bromo-acétate de triméthylène* $Br\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(C_2H_3O_2)$ en même temps que de la diacétine correspondante $(C_2H_3O_2)_2\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(C_2H_3O_2)$. L'influence du composant oxygéné *acétique* $H_2C - O - (CO - CH_3)$ sur le composant $H_2C - Br$ ne se fait donc sentir que dans un rayon fort restreint, puisque l'interposition d'un chaînon $H_2C <$ suffit, sinon pour la faire disparaître totalement, du moins pour l'atténuer considérablement. Je n'ai pas été à même de constater ce qu'il en est à l'étage C_4 dans le *bibromure de tétraméthylène* $Br\,CH_2 - (CH_2)_2 - CH_2\,Br$.

Le P. Thirion présente, au nom du P. Marc Dechevrens, un travail du P. Potron. intitulé : *Sur la génération de quelques courbes remarquables par le campylographe du P. Marc Dechevrens.* Il expose le sujet et les conclusions de ce mémoire dont la section vote l'impression. On la trouvera dans la seconde partie de ce volume des ANNALES.

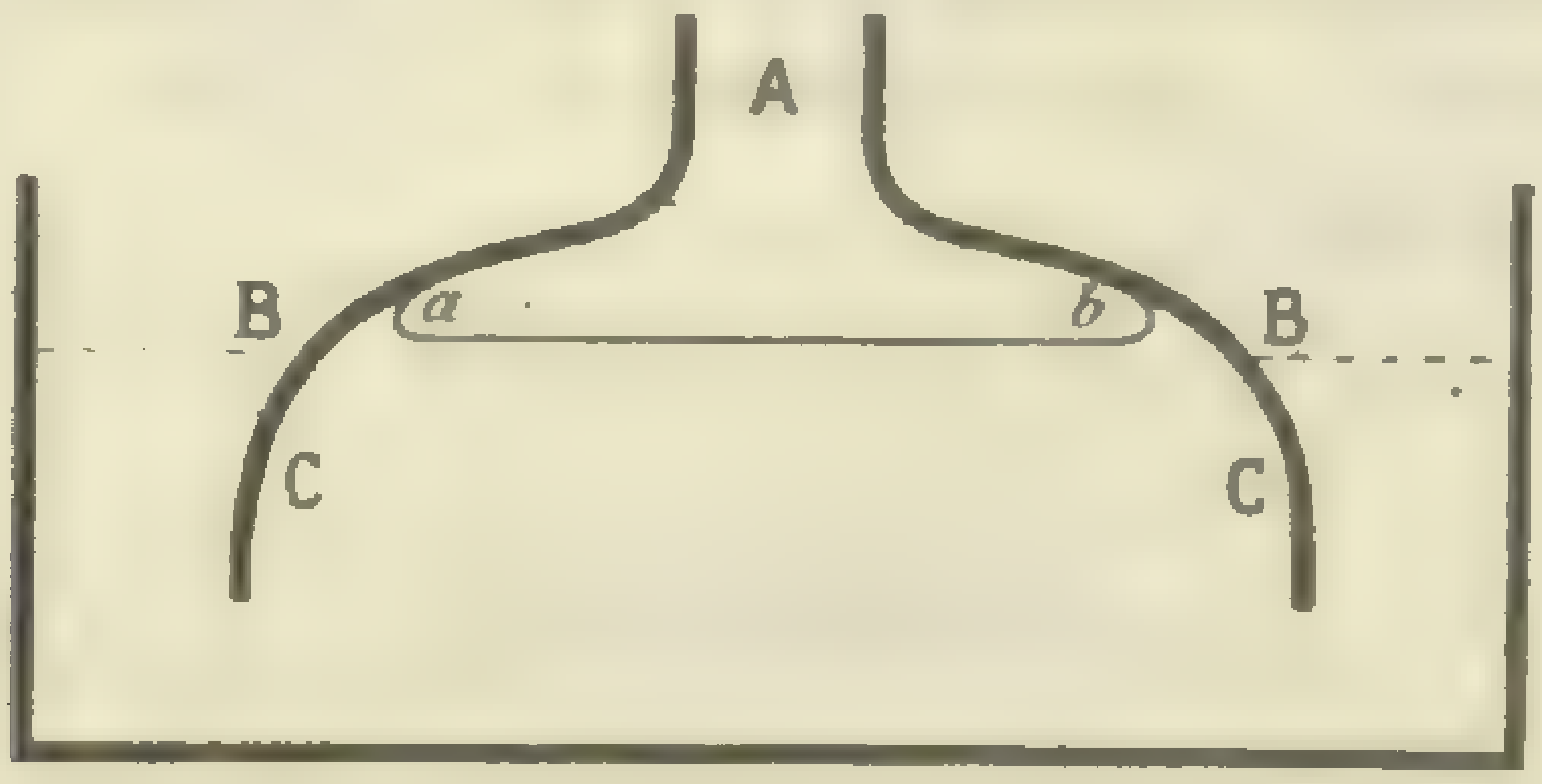
M. J. Delemer esquisse rapidement le mémoire qu'il présente à la section *Sur certaines équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en physique mathématique et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité.*

M. Van der Mensbrugghe et le P. Thirion sont chargés de l'examen de ce mémoire.

M. Van der Mensbrugghe fait la communication suivante *Sur une expérience de capillarité :*

Au commencement du mois d'octobre dernier, M. Vanden Berghe, répétiteur de chimie générale à l'Université de Gand, m'a fait connaître le fait suivant :

Soit un appareil en verre (voir fig.) présentant une portion cylindrique A de 3 centimètres de diamètre et se raccordant par une surface courbe tronconique B à une autre portion cylindrique C de 10 à 12 centimètres de largeur; si on plonge cet appareil dans l'acide sulfurique de manière que le niveau extérieur passe par une partie de B faisant un angle très petit avec l'horizon, on constate à l'intérieur un relèvement capillaire *a* très prononcé, et en outre, on juge que le niveau intérieur du liquide s'élève partout au-dessus du niveau *r*.



Pour observer des effets du même genre, j'ai pu utiliser des appareils ayant des formes analogues, seulement j'ai préféré opérer avec de l'eau distillée. Voici les dimensions de l'appareil qui m'a donné le résultat le plus marqué :

Diamètre de la partie A	6 centim.
" " " B	18 "
Côté de la surface tronconique	7 centim.
Angle d'incl. de ce côté sur le diam. de la section droite de C	36°

J'ai fait affleurer le niveau extérieur de l'eau avec le milieu de la partie B, et j'ai pu constater que le ménisque s'élevait de plus de 6 millimètres au-dessus du niveau extérieur ; ce fait est dû, je pense, à ce que le liquide de tension F par exemple, ne peut mouiller parfaitement le verre sans s'élever d'autant plus sensiblement que la surface intérieure de l'appareil est plus rapprochée du niveau ; dès lors la courbure moyenne de la surface du ménisque devient plus forte, et conséquemment la traction $\mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}}\right)$, ou R et R′ sont les rayons de courbure principaux au point considéré, peut soutenir une colonne liquide plus élevée.

Quant au niveau du liquide, qui paraît plus haut à l'intérieur de l'appareil qu'à l'extérieur, j'ai pu constater que cette apparence est due à une simple illusion d'optique ; d'ailleurs en tenant l'œil à fort peu près dans le plan du niveau extérieur, on fait disparaître l'illusion dont il s'agit.

Troisième section

M. De Walque présente le rapport suivant sur le mémoire de M. le chanoine Bourgeat : *Observations sur la Serre et les régions voisines.*

J'ai lu avec intérêt la notice de notre savant confrère et j'en propose volontiers l'impression.

Cette lecture est fatigante pour celui qui, comme moi, n'a pas sous les yeux une carte détaillée de la région. J'ai été agréablement surpris de trouver, à la suite du texte, un croquis dont il n'est fait mention nulle part, mais qui aide singulièrement à comprendre les vues de l'auteur. A mon avis, il devrait former une planche à annexer au texte.

Malheureusement, ce croquis ne peut être reproduit tel qu'il est. J'estime donc qu'il devrait être renvoyé à l'auteur, avec son manuscrit, avec prière de le dessiner correctement, à échelle double, pour être reproduit par la photozincographie. Les écritures, qui devraient être aussi soignées, devraient également être faites à échelle double. Enfin, j'estime que le tout pourrait faire une planche double de deux pages.

M. de la Vallée Poussin, second commissaire, dépose le rapport suivant sur le même mémoire :

Le travail de M. Bourgeat sur le massif de la Serre et les régions voisines groupe avec clarté les faits les plus significatifs concernant cette région remarquable. Les conclusions tirées par l'auteur paraissent pour la plupart justifiées. Il signale plusieurs points douteux qui attendent des recherches nouvelles. Je suis de l'avis de M. De Walque quant à la carte annexée à ce mémoire : elle fournirait des indications très utiles au lecteur, à la condition d'être retouchée comme le propose mon savant collègue. En définitive, le mémoire de M. Bourgeat offre un intérêt incontestable, et j'en propose très volontiers l'insertion dans les **Annales** de la Société.

M. le chanoine de Dorlodot, troisième commissaire, ajoute ces quelques mots :

Je me range à l'avis de mes savants confrères pour proposer l'insertion du travail de M. Bourgeat dans les Mémoires de la Société, avec les coupes schématiques dont l'auteur n'a envoyé jusqu'ici qu'un croquis. J'ajoute également que la carte que l'auteur nous promet, bien qu'elle ne soit pas tout à fait indispensable, facilitera beaucoup la lecture du mémoire et en augmentera singulièrement l'intérêt.

La section vote l'impression du mémoire de M. le chanoine Bourgeat aux **Annales.**

Le Néolithique de la Flandre occidentale fait l'objet, de la part de M. l'abbé Claerhout, d'une intéressante étude. L'impression en est décidée, après une courte discussion entre l'auteur, M. le chanoine Boulay et le R. P. Schmitz.

I. *Le Néolithique de surface*

C'est M. le baron Ch. Gillès de Pélichy qui le premier a exploré méthodiquement la Flandre occidentale et a pu y reconnaître environ vingt-cinq stations préhistoriques. Avant lui on n'avait à signaler que la découverte isolée de deux ou trois haches polies.

Il serait fastidieux de citer les noms des endroits où M. Ch. Gillès de Pélichy a découvert soit des fonds de cabane, soit des instruments, soit de la poterie préhistoriques.

On peut regarder comme un fait probable que les néolithiques ont occupé le sommet des collines et les éminences sablonneuses de la région.

Les intéressantes découvertes de M. Gillès de Pélichy consistent surtout en belles lames de couteaux, fragments de haches polies, grattoirs de divers types, pointes de flèches à ailerons, en forme d'amande et à tranchant transversal. Dans certaines stations, notamment dans la station très riche de Steenbrugge, M. Gillès de Pélichy a trouvé de ces pointes minuscules, finement travaillées, dont on n'a pu encore avec certitude déterminer l'usage, mais qu'on croit avoir servi au tatouage.

Les instruments sont généralement de petite dimension; la matière première était rare et les ateliers préhistoriques étaient relativement éloignés de notre territoire; ils ressemblent à l'outillage, recueilli à Mendonck par M. Van Overloop et aux trouvailles préhistoriques du pays de Waes, qu'on peut étudier au musée de Saint-Nicolas.

Les néolithiques de la Flandre ont parfois confectionné leurs instruments avec les cailloux roulés, ramassés sur le sol; on reconnaît aussi très souvent le silex de Spiennes et le silex noir d'Obourg (*).

Nous avons fait quelques recherches sur la colline, appelée le *mont de Pitthem,* qui s'élève à droite de la chaussée de Pitthem à Thielt. Nos efforts furent couronnés de succès; bientôt les enfants de nos écoles et les ouvriers nous apportèrent un nombre assez considérable de lames, de grattoirs, de tranchets, d'éclats retouchés, de perçoirs, une belle pointe de flèche triangulaire avec ailerons et pédoncule à la base et un fragment de hache polie. Quelques silex sont remarquables par leur belle patine et quelques-uns offrent même une apparence paléolithique.

Personne n'aurait hésité à désigner la colline de Pitthem comme une station préhistorique; mais voici le fait sur lequel nous voulons attirer l'attention des savants; poussés par l'émulation, les enfants des autres hameaux du village se sont également mis en quête et presque journellement ils réussissent à ramasser de

---

(*) CH. GILLÈS DE PÉLICHY. *Les stations préhistoriques de la Flandre occidentale.* CONGRÈS DE GAND, seconde partie, p. 28. Gand, 1897.

belles lames et de beaux grattoirs, des nuclei et des déchets de taille dans un grand nombre de champs. Nous arrivons à la conclusion suivante : le néolithique recouvre entièrement la commune de Pitthem, qui a une superficie de 2423 hectares.

A moins de vivre au milieu du peuple et surtout au milieu des enfants des écoles, on ne pourrait jamais aboutir à ce résultat, qui nous paraît assez inattendu dans un village de nos plaines des Flandres (*).

⁂

Que savons-nous de nos populations préhistoriques?

Il serait prématuré de formuler un jugement définitif sur leurs caractères ethniques et sur leurs migrations.

Quelques différences observées dans l'outillage, la poterie ou l'aménagement des cabanes et des foyers ne présentent pas une base suffisante pour en déduire l'existence de civilisations distinctes. Les instruments grossiers et l'outillage finement retouché se rencontrent souvent dans une même station : qui peut dire qu'ils dérivent d'une différence de race ou d'origine?

D'autres éléments font également défaut : les recherches n'ont pas encore amené la découverte de sépultures de l'âge de la pierre polie.

Tout ce qu'on peut faire, c'est rattacher cette race primitive à la race de Mendonck (**), à la race brachycéphale, que n'ont pu altérer les invasions des races blondes et qui a persisté jusqu'à nos jours. M. Gillès de Pélichy a même signalé la station néolithique de *Ter Heest* (Clercken) où vit encore dans de petites cabanes en terre glaise, une tribu qui paraît avoir le mieux conservé tous les caractères de la race néolithique. Seulement à l'heure actuelle, elle s'altère rapidement ; elle est déjà fortement mélangée d'éléments germaniques ; sur 52 enfants de *Ter Heest*, il n'y a plus que 11 enfants qui ont les yeux noirs de la vieille race,

---

(*) Les silex recueillis à Pitthem font partie des collections de la *Société d'Archéologie de Bruxelles* et sont mis en dépôt provisoire au musée du Cinquantenaire.

(**) BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XV, p. 267, Bruxelles, 1897.

de la colonie primitive de ce hameau ; il y a 32 enfants qui ont les cheveux blonds de la race germanique, laquelle par infiltrations successives est devenue prépondérante à Ter Heest.

II. *Le Néolithique des Alluvions*

La tourbe s'est formée à l'époque néolithique (*) ; la formation a pris fin pendant l'époque Romaine et l'extraction de la tourbe a fréquemment amené la découverte de vestiges Belgo-Romains. Il arrive qu'on ramasse des instruments en silex sur la plage ; ils proviennent de la couche de tourbe. Les découvertes sont cependant fort rares ; nous ne croyons pas que des instruments en silex aient apparu dans les travaux du canal maritime. Le musée du Cinquantenaire à Bruxelles possède une superbe hache polie, trouvée à Lampernisse ; il se peut qu'elle provienne d'une tourbière ; nous pouvons certifier qu'elle a été recueillie avec des objets de diverses époques, sur l'emplacement d'une ferme aujourd'hui disparue.

Dans tous les pays de l'Europe les pleuplades néolithiques ont érigé des palafittes ; on avait déjà observé quelques traces de ces habitations palustres en Belgique ; en 1899, nous avons découvert les premiers vestiges importants de constructions lacustres, dans la Flandre occidentale, dans l'estuaire d'un ruisseau qui se jette dans la vieille Mandel à Denterghem.

La couche archéologique, recouverte par les alluvions du ruisseau, nous a fourni un outillage franchement Robenhausien. Parmi des déchets de taille, des rognons, des blocs de matière et des nuclei nous avons recueilli des lames, des grattoirs discoïdes, des pointes de flèche en forme d'amande, des tranchets, des ciseaux, des fragments de hache polie et une superbe pointe de flèche triangulaire, longue de 45 millimètres, finement retouchée, avec ailerons et pédoncule à la base. C'est certainement un des plus beaux spécimens qu'on puisse rencontrer dans les musées.

Les instruments en corne et en os, si rares dans les collections publiques de la Belgique, présentent une ressemblance frappante

---

(*) A. Rutot. *Études des modifications du sol des Flandres.* Congrès de Gand, seconde partie, p. 5. Gand, 1897.

avec l'outillage amené au jour dans les stations lacustres de la Suisse. Signalons une hache en bois de cerf, percée d'un trou rond pour passer un manche de bois, plusieurs manches d'outils en bois de cerf, deux gaines de haches perforées, une belle portion de ramure, ayant servi de pioche, des côtes de bœuf, employées comme lissoirs, un poinçon fait d'un cubitus de cheval, une dent canine de chien percée au sommet de la racine. d'un trou de suspension.

Le R. P. Deschamps, S. J., présente à la section les os de la jambe de Pierre De Rudder.

M. A. Proost communique la note ci-jointe sur la culture du raisin en plein air.

La culture du raisin en plein air, qui fit jadis l'objet d'une industrie importante en Belgique, est presque abandonnée aujourd'hui parce que ce fruit ne parvient pas à complète maturité ou qu'il est atteint de maladies cryptogamiques développées par le froid et l'humidité. Tel est l'oïdium (*Erysiphe Tucheri*) qui développe son mycelium sur l'épiderme des rameaux, sur les feuilles et les jeunes grappes au commencement de l'été, lorsque les vignes ont commencé souvent par donner de belles espérances à l'horticulteur. Chacun sait qu'on peut arrêter le développement de ce parasite par le soufrage, moins praticable à l'air libre qu'en serre. On a beaucoup disserté sur les causes qui favorisent l'apparition et le développement de cette maladie ; nous avons pu constater, a maintes reprises, que le froid et l'humidité sont les facteurs principaux.

Dans une serre froide, exposée au midi, à Mousty, nous avons fait pénétrer une partie des rameaux d'une ancienne vigne qui contractait l'oïdium chaque année et ne mûrissait jamais son raisin de Franckenthaler. Dès la première année, nous vîmes les grappes, développées à l'intérieur de la serre, mûrir parfaitement, sans contracter la maladie, et donner des grains superbes, tandis que les grappes voisines, situées à l'extérieur, étaient couvertes d'oïdium.

Cependant, chose curieuse, cette année où le soleil n'a pas marchandé les calories, non seulement la maladie a frappé comme d'habitude les rameaux de l'extérieur, mais elle a pénétré jusqu'aux parties contiguës de l'intérieur de la serre, ce qui dérange quelque peu la théorie de ceux qui enseignent des généralisations trop hâtives. Il est vrai que la vigne n'a guère reçu que du fumier et que l'acide phosphorique et la chaux n'ont pas été restitués à temps, comme nous l'avions ordonné au jardinier.

A ce point de vue, on ne saurait assez recommander aux horticulteurs de travailler leur sol et de restituer ces deux éléments de préférence sous la forme *de phosphates de scories.*

Dans beaucoup de jardins situés sur des coteaux sablonneux ou limoneux, de même que dans les anciennes prairies d'alluvion, la chaux finit souvent par disparaître à peu près complètement, et c'est alors qu'on voit éclater, malgré les fumures ordinaires, au fumier et au purin, tout le cortège des maladies des arbres fruitiers déterminées surtout par des cryptogames. Beaucoup de jardiniers n'y voient que du feu parce qu'ils ignorent la CHIMIE AGRICOLE.

On sait que le *sulfate de cuivre* est le meilleur agent pour entraver le développement des crytogames qui s'attaquent aux plantes cultivées. Il est la base de la *bouillie bordelaise* (*), remède infaillible contre la maladie de la pomme de terre quand il est appliqué à temps et judicieusement. Cette année, il a été appliqué à Mousty avec un succès complet pour préserver la *cloque* du pêcher, comme pour entraver le développement du *sené (sinapis arvensis),* cette plaie de nos champs sablo- ou calcaro-limoneux.

M. A. Proost s'occupe, depuis deux ans, de champagnisation au laboratoire d'analyses de l'État à Louvain. Les bouteilles subissent en ce moment les opérations du retournement, qui a pour but d'amener graduellement sur le bouchon le dépôt formé par la refermentation. Tout marche normalement, et le vin sera prêt pour l'expédition avant la fin de l'hiver. Il doit encore subir les

---

(*) La bouillie bordelaise convient également pour combattre le *midliou (pernospora viticola)*, le black rot *(phoma uvicola)*, le rot blanc *(conyothyrium diplodiella)*, l'anthracnose *(sphaceloma ampelinum)*, et le pourridié *(dematophora necatrix)*, tous parasites de la vigne.

opérations suivantes : dégorgement, addition de la liqueur sucrée d'expédition; bouchage définitif; enfin légère refermentation pour refaire la pression.

L'essai de cette année semble devoir être décisif, en ce qui concerne la qualité tout au moins.

M. A. Proost fait passer sous les yeux des membres de la section quelques lépidoptères et deux diptères arrêtés au cours de leur développement à l'état d'imago.

M. Fernand Meunier fait remarquer à ce sujet que l'étude morphologique du " déballage „ des insectes mérite d'être entreprise par ceux qui s'intéressent aux progrès de la physiologie générale. L'examen minutieux de séries d'espèces appartenant aux divers ordres permettra de savoir suivant quelle loi ces êtres se dégagent insensiblement de leurs langes après l'éclosion.

Après avoir présenté une éphippigère littéralement envahie par des vers nématoïdes du genre *Gardius*, et quelques curiosités entomologiques du Natal : un gigantesque tuyau de phryganide, un énorme cocon de bombycide et une curieuse chenille épineuse provenant de la collection de M. A. Proost, M. F. Meunier montre le moulage de l'empreinte et de la contre-empreinte, ainsi qu'une photographie d'une nouvelle espèce de cigale que M. Luis Mariano Vidal vient de trouver dans les schistes du kiméridgien de Lerida en Catalogne. C'est la première fois qu'une trouvaille d'insecte est signalée dans les terrains secondaires de l'Espagne. A en juger d'après la faune ichthyologique, le niveau stratigraphique où ce cicadaire a été observé semble être synchronique à celui de Solenhafen. Cet hémiptère homoptère paraît appartenir au genre *Eocicada*, dont le type *E. microcephala* a été décrit en 1888 par le D^{r} Oppenheim de Berlin.

En terminant, M. F. Meunier dit qu'il publiera la diagnose de ce rarissime Cicadaire dans le mémoire stratigraphique de M. L. M. Vidal.

La méthode d'analyse des terres appliquées au laboratoire d'analyse de l'État à Gand, est exposée dans une savante monographie de M. Pierre Nyssens. Ce travail trouvera place aux Annales.

Le R. P. Schmitz, S. J., signale à la section un intéressant essai de restitution de flore mio-pliocène.

M. Pierre Marty, le zélé conservateur du Musée d'Aurillac (Cantal) — remarquable par les collections J.-B. Rames — met tout en œuvre pour réunir dans le parc du château de Caillac (*) les végétaux actuels homologues de ceux qu'il recueille dans les fameux gisements de Cinérites du Cantal.

On sait que ce nom désigne une roche (**) constituée de cendres andésitiques empâtant des débris fragmentés de basalte et de domite qui formaient le sol du pays au moment où les derniers volcans du Cantal répandaient ces cendres sur les pentes des vallées ou dans les lacs.

Ces cinérites sont très riches en plantes fossiles. Elles ont fourni à de Saporta des matériaux d'étude précieux. M. Marty continue activement les fouilles et même il a été assez heureux, aidé qu'il est par la sagacité des recherches de M. Boule, professeur au Muséum d'histoire naturelle de Paris, de pouvoir s'attaquer à de nouveaux gisements, qui vont singulièrement allonger la liste des espèces végétales connues pour cet horizon géologique.

Mais M. Marty ne se borne pas à la récolte des types fossiles, il tâche de découvrir dans la flore actuelle les espèces qui semblent être le plus apparentées aux espèces fossiles, il les plante dans son parc et les acclimate à nouveau de nos jours, dans le pays, où elles ont eu un si beau développement à l'époque mio-pliocène.

Sur 42 espèces fossiles que M. Marty a reconnues dans les cinérites, il en relève 23 — plus de 50 °/₀! — qui sont actuellement encore indigènes dans les environs même des localités où gisent les flores passées; 14 espèces disparues de la région, et considérées comme exogènes, M. Marty les a rapatriées et on peut les voir florissantes de vie dans le parc de Caillac. Enfin cinq espèces en sont encore aux premiers pas de la réacclimatation. Elles vivent à Caillac, mais encore à l'abri des serres.

(*) Le château de Caillac se trouve un peu à l'Est du méridien de Paris, par 45° lat. N. et à 625 mètres d'altitude, non loin d'Yolet-le-Doux.

(**) A. de Lapparent, *Traité de Géologie*, 4ᵉ édit., p. 1692.

Il paraît au P. Schmitz que cette tentative est des plus suggestive et digne de fixer l'attention de tout observateur. Conduite avec persévérance elle pourra établir, avec tout le poids que donne l'expérience, un fait nouveau à l'appui de cette idée qui tend à en rabattre de l'énorme diversité des conditions de la vie aux époques géologiques.

Il y a eu des différences, des variations; qui en disconviendrait? Mais il ne faut pas, dès qu'on rencontre une difficulté d'interprétation, en appeler à la fantasmagorie de conditions extraordinaires dont l'imagination peut peupler à plaisir les profondeurs des temps géologiques.

Une nouvelle note sur le glaciaire dans le Jura méridional, adressée à la section par M. l'abbé Bourgeat, est envoyée à l'examen de M. de la Vallée Poussin et du R. P. Schmitz.

Quatrième section

Le programme de la journée comportait la visite de différentes installations universitaires, et d'instituts médicaux privés. Le temps faisait donc défaut pour la communication de travaux originaux. Cependant grâce à l'obligeance de nos confrères, M. le professeur Heymans et M. le D^{r} De Buck, chacun a pu se déclarer satisfait de la réunion à Gand.

La matinée fut consacrée à parcourir les laboratoires de MM. les professeurs Lahousse et Heymans.

Le premier fit des démonstrations intéressantes sur les propriétés physiologiques des nerfs, et expliqua le fonctionnement de certains appareils de physiologie fort perfectionnés.

Le second, en nous montrant ses installations, expliqua les fonctionnements techniques d'un laboratoire bien ordonné, et les qualités exigées des travailleurs qui le fréquentent. Il exposa aussi, d'après le plan, comment seront construits et comment sont conçus les nouveaux instituts universitaires : salle de cours, bibliothèque, cabinets de travail, etc.

Nous eûmes aussi l'occasion de visiter l'établissement d'aliénés, *le Strop,* bien connu, où nous fûmes aimablement accueillis par le frère Amédée, directeur, et par M. le Dr Maere, médecin de la maison. Il est superflu de donner une description détaillée de l'ensemble de cet asile. Disons qu'il est divisé en ailes ou en sections plus ou moins séparées, affectées chacune à des malades d'une classe sociale différente. C'est là une des caractéristiques de l'établissement de pouvoir offrir à celui qui y entre des conditions matérielles auxquelles il est habitué par son genre de vie antérieure. Les aliénés n'y sont pas isolés, ni cloîtrés, ils ont à leur disposition de vastes cours, un grand jardin, de spacieuses galeries : ils jouissent de jeux en usage dans le pays, et même d'appareils de gymnastique, tous disposés à l'air. Ajoutons que la propreté la plus minutieuse règne partout, que l'éclairage, le chauffage, la ventilation sont bien assurés. Comme nous y passions à l'heure de midi, la plupart d'entre nous auraient volontiers fait arrêt à la cuisine devant les mets odorants et appétissants destinés aux pensionnaires.

Nous disposions enfin encore de quelques moments pour pousser jusqu'à Gentbrugge. Malheureusement le temps était court, et le R. P. Deschamps, S. J., dut résumer sa conférence sur la guérison de Pierre de Rudder : la démonstration des os du sujet émerveilla tout le monde sur ce cas extraordinaire.

La visite de l'Institut chirurgical de Gentbrugge donna à tous les membres un précieux enseignement. Elle montre ce que peut l'initiative personnelle, jointe à un désir toujours plus vif de faire avancer la science, par l'exercice de la médecine et de la chirurgie, par les travaux d'amphithéâtre et les recherches de laboratoire. Il y a à peine quelques années cet institut n'était qu'un petit hospice, destiné à une certaine catégorie de pensionnaires : aujourd'hui il est devenu un hôpital admirablement outillé. Non pas que les bâtiments soient immenses, ils sont au contraire modestes, mais disposés dans un ordre parfait sur une étendue dont on a cherché à tirer le plus de parti possible. Les salles communes de malades sont largement aérées, bien éclairées ; propres et riantes avec leurs lits en fer, les draps blanchis, le plancher reluisant, les murs blancs, de larges fenêtres, de grandes portes s'ouvrant sur des corridors frais. Les chambres particulières de malades ont elles aussi un cachet de confort, de gaieté, on n'y est pas étranger, on se sentirait presque chez soi. — La salle d'opérations et la salle de pansements répondent à toutes les exigences de la chirurgie moderne : de la peinture, du verre, du fer, des meubles en petite quantité, tout enfin arrangé pour pouvoir être rapidement nettoyé et pour se salir difficilement. — Le laboratoire et la bibliothèque n'offrent pas grand espace, mais l'encombrement, régulièrement disposé en quelque sorte, permet de se rendre compte qu'on y travaille énormément. Nous connaissons d'ailleurs la somme considérable de travail qui s'y effectue, car c'est là que notre excellent confrère, M. le Dr De Buck, puise tous les matériaux des communications et des travaux si nombreux dont il a déjà enrichi la science, et où il continue journellement son patient labeur digne des meilleures récompenses. Si nous avons tous sincèrement félicité notre confrère d'avoir fondé et de diriger avec tant de talent ce bel institut, nous lui avons souhaité de le voir prospérer et occuper bientôt la plus grande partie du vaste enclos qui reste encore disponible.

Certes les absents ont eu tort, parce que nous avons vu et appris, et aussi parce qu'un grand nombre de membres de la Société des sciences médicales de Lille assistait à cette réunion.

Cinquième section

M. Maurice Vanlaer, professeur à l'Université catholique de Lille, a fait un exposé critique des différents projets de loi sur les retraites ouvrières en France. Voici le résumé de cette communication.

Un projet de loi, déposé par le gouvernement, a été discuté déjà par la Chambre des députés. Quelles sont les grandes lignes de ce projet ? A-t-il quelque chance d'aboutir, et d'aboutir à brève échéance ?

Le projet du gouvernement français impose l'assurance à un nombre considérable d'individus. Il organise cette assurance obligatoire sur la base d'une caisse unique, centralisant toutes les sommes versées et tout le service des pensions. Cette caisse capitalise pour le compte des assurés les sommes réellement versées par chacun d'eux, et alloue une pension exactement proportionnelle aux versements. L'invalidité donne droit simplement à la liquidation anticipée de la pension, à quoi vient s'ajouter une légère majoration provenant de l'État.

Des critiques se sont élevées de toutes parts contre le projet du gouvernement français, critiques dont le referendum ouvert sur la proposition d'un député et auquel ont pris part un grand nombre de syndicats patronaux et ouvriers a permis de constater l'importance. Ces critiques sont nombreuses. L'une des principales, selon le conférencier, est celle-ci : à vouloir combiner le système financier de la capitalisation avec le principe de l'obligation, on se heurte à des difficultés inextricables.

Aussi le projet du gouvernement français paraît-il condamné à l'insuccès, et il ne serait pas impossible qu'on s'orientât en France vers la solution adoptée par la loi belge de mai 1900. Toutefois, la question des retraites ouvrières est posée en France de telle façon, des promesses si belles ont été faites aux intéressés, que le gouvernement qui prendra le pouvoir après les prochaines élections devra sans doute s'exécuter. Comment parviendra-t-il à trouver une réalisation qui ne soit pas trop inférieure aux espérances? C'est ce que dira l'avenir.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale a eu lieu au palais du gouvernement provincial, sous la présidence d'honneur de Sa Grandeur Mgr l'Évêque de Gand et de M. le Gouverneur de la Province qui avait bien voulu mettre ses salons à la disposition de la Société, et la présidence de M. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain, second vice-président de la Société.

Il y avait, dans l'assemblée, outre un grand nombre de dames, beaucoup de professeurs de l'Université, des notabilités du clergé, du barreau et du corps médical, etc.

M. le chanoine Boulay, professeur à l'Université catholique de Lille, premier vice-président de la Société a pris le premier la parole. Voici le résumé de son discours : *A propos de l'enseignement des sciences naturelles dans les séminaires et les collèges.*

MONSEIGNEUR,
MONSIEUR LE GOUVERNEUR,
MESDAMES, MESSIEURS,

Dans certains milieux universitaires, on rencontre, dit-on, des étudiants de quinzième et même de vingtième année. Ce n'est pas toujours un éloge. Quoi qu'il en soit, j'ai dépassé l'âge de ces vétérans : je suis un étudiant de vingt-cinquième année.

Je considère, en effet, la *Société scientifique de Bruxelles* comme une grande école et je me félicite d'en être l'élève assidu depuis sa fondation.

J'y ai suivi les leçons de maîtres du plus haut mérite, du R. P. Carbonnelle, le créateur de l'idée, l'initiateur énergique du mouvement, de M. Proost, notre distingué président actuel, de M. Paul Mansion, notre savant et zélé secrétaire général, et de tant d'autres qu'il m'est impossible d'énumérer. Si je voulais faire un choix, je citerais encore l'élégant, l'infatigable bibliographe de la Société, connu de tous sous le nom de Jean d'Estienne et sous un autre encore.

C'est en grande partie à l'enseignement de ces maîtres, puisé dans les ANNALES de la Société et dans la collection de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, que je dois sur un point spécial, les idées que j'ai l'honneur d'exposer devant cette grande assemblée.

La question inscrite au programme est un peu vague, mais c'est à dessein.

Le principe d'associer l'enseignement scientifique à l'enseignement littéraire est admis partout ; il est réalisé dans les séminaires, dans les collèges ecclésiastiques et laïques de toutes dénominations, athénées, lycées, etc., mais de façons très diverses et à des doses très inégales. Cette diversité se comprend ; elle répond à des circonstances variables de leur nature, à des situations spéciales dont il faut tenir compte.

Il me serait impossible d'entrer ici dans des discussions de détails auxquels leur contingence enlève une bonne partie de leur intérêt. D'autre part, il ne me siérait pas de vouloir prendre une part active à vos études de pédagogie intérieure; de la même façon, je n'ai nulle envie de venir dire en Belgique des choses que je ne pourrais pas dire en France.

Mais au-dessus des diversités d'application, il y a l'unité du but, l'idéal qui ne change pas, qui est partout le même. Cet idéal domine l'enseignement ; c'est là qu'il faut prendre les vues directrices et puiser l'énergie nécessaire pour aboutir.

La devise bien connue de la *Société scientifique* porte qu'il ne peut jamais y avoir un véritable désaccord entre la foi et la raison. Elle est parfaitement choisie pour figurer en première page et sur les couvertures des publications de la Société. Sous une forme négative, elle énonce le *minimum* des relations possibles entre la raison et la foi. En deçà, c'est la lutte; mais ce *minimum* qui constitue une limite, une barrière vers le dehors, nous laisse à l'intérieur tout un programme à remplir.

La science des choses divines connues par la révélation, et la science rationnelle diffèrent, comme l'enseigne le Concile du Vatican, en principe et par leur objet (*). Il faut se garder avec soin de les confondre; mais il n'est pas défendu, il est plutôt conseillé de les mettre en contact, de les éclairer l'une par l'autre (**).

Là est l'idéal dont je vous parlais tout à l'heure. Voilà pour une bonne part l'objet du travail très utile accompli au sein de la Société scientifique. N'est-ce pas l'image agrandie de ce qui se passe dans la pensée et la conscience de chacun de nous? Notre conscience recherche la paix dans l'unité; elle écarte d'instinct le dualisme imaginé par Taine entre la foi du catholique et les convictions du savant. Cette paix s'acquiert parfois au prix de pénibles efforts, beaucoup même, hélas! n'y arrivent pas. Dans une société comme la nôtre, en dehors de l'Esprit qui souffle où il veut, l'effort nécessaire pour établir l'harmonie désirable entre la croyance religieuse et la raison est singulièrement facilité par la collaboration de tous. La division du travail intellectuel le rend plus précis, plus profond et par suite plus efficace.

(*) Conc. Vatic. C. IV. *De fide et ratione.*

(**) *Opem sibi mutuam ferunt.* Ibid.

Le temps n'est plus où de distance en distance on voyait apparaître des hommes universels, des génies résumant dans leur intelligence toutes les connaissances divines et humaines. L'arbre de la science a poussé ses racines à de telles profondeurs, il a multiplié et étendu ses branches à de telles distances que les hommes les plus intelligents doivent s'associer en grand nombre pour recueillir en commun les connaissances acquises avant de penser à les développer et à les perfectionner.

Les doctrines religieuses ont suivi une marche parallèle. Avant tout populaires, elles se résument dans des formules simples et peu compliquées, accessibles au grand nombre ; elles sont toutefois susceptibles de développements indéfinis. A la suite d'un court entretien, Nicodème qui était venu, la nuit close, trouver Notre-Seigneur, s'entend dire : Vous êtes docteur en Israël et vous ignorez ces choses (*)! La même doctrine à son début est portée par saint Paul devant l'Aréopage bien vite déconcerté. La situation est la même de nos jours, avec une différence déjà remarquée par les premiers pères de l'Église. Le miracle était nécessaire à l'origine pour appuyer la doctrine ; il reparaît par un effet de la miséricorde divine aux époques critiques de l'histoire ; dans l'intervalle, l'œuvre de l'évangélisation est confiée à des hommes assistés par des secours ordinaires. Ils doivent faire valoir leur mission par des moyens en grande partie humains et naturels. Avant d'enseigner, ils sont obligés d'étudier longtemps et péniblement. Ici encore la loi de division du travail s'impose pour assurer au ministère ecclésiastique toute son efficacité. L'apostolat auprès des classes populaires exige une préparation spéciale : pour mon propre compte, je reste convaincu par expérience qu'il est tout aussi difficile de bien faire le catéchisme à des enfants de dix à douze ans que de faire un cours de botanique dans une faculté. En toute hypothèse, il faut être préparé pour remplir toute mission spéciale. La formation que l'on reçoit dans la plupart des séminaires, à ma connaissance, est une formation générale, commune. En sortant, on est apte à occuper le plus grand nombre des postes, avec des différences tenant aux qualités personnelles plutôt qu'à l'édu-

---

(*) *Tu es magister in Israel et hæc ignoras!* S. Joann. III, 10.

cation reçue qui est uniforme. Il ne saurait d'ailleurs en être autrement.

C'est pourquoi l'autorité ecclésiastique en Belgique et dans une certaine mesure en France, a compris la grande utilité d'études supérieures, plus approfondies, spécialisées. Vous avez à Louvain une faculté de théologie solidement organisée, bénéficiant des cours scientifiques, littéraires, juridiques organisés dans son voisinage. Des congrégations religieuses s'appliquent, de leur côté, à former des hommes, capables de faire pénétrer la doctrine évangélique sous un mode adapté aux nécessités actuelles. Dans les conditions ordinaires dont je parle, nous devons travailler de concert; les laïques nous apportent le concours précieux de leurs connaissances spéciales, de leur expérience en des choses peu accessibles à des ecclésiastiques; de notre côté, nous mettons en regard de leur appoint des idées supérieures plus dégagées d'intérêt personnel. Si de part et d'autre, nous faisons preuve de charité et de bonne volonté, nous finissons par nous entendre pour le plus grand bien de la vérité et de la société toute entière. Car, et c'est encore la pensée de l'Évangile, nous avons besoin de lumière pour agir. C'est la doctrine, la vérité qui nous sert de flambeau, si nous voulons faire quelque bien, et cette lumière nous vient d'en haut. La méthode en toutes choses est *descendante* et non *ascendante*, comme une certaine école le prétend.

De la même façon qu'il y a parmi les laïques des hommes très forts dans toutes les branches du savoir humain, il faut qu'il y ait parallèlement dans le clergé séculier et régulier des hommes qui, à des connaissances suffisamment étendues dans les sciences humaines, joignent une science théologique très solide sur ces points de contact entre les conclusions éloignées de la doctrine révélée et les approximations auxquelles les savants sont parvenus de nos jours. Il faut y regarder de près, car dans ce domaine, il ne saurait être question de renoncements, de sacrifices réciproques. La vérité est ou elle n'est pas; une fois démontrée, elle s'impose sans retranchement, de quelque part qu'elle vienne.

Conformément à ces principes, le prêtre occupé à ces œuvres de salut intellectuel, doit rester prêtre. S'il oublie sa mission, si la science purement humaine l'emporte dans sa pensée, il se laïcise et cesse de remplir un rôle utile.

De la même façon, tous nous devons chercher et attendre avec patience la solution des difficultés apparentes qui surgissent de temps à autre entre la théologie et les sciences humaines. La lumière se produira tôt ou tard, le passé nous est un sûr garant de l'avenir.

Ces considérations trop vagues par elles-mêmes ne prennent toute leur valeur qu'à la lumière des faits. Ne voulant pas abuser de votre bienveillante attention, je me bornerai à citer deux exemples parmi les plus caractérisés.

La notion du temps en philosophie est très obscure, très débattue; sur le terrain des sciences d'observation, elle prend un relief saisissant.

Il y a à peine un demi-siècle, il était d'opinion courante que le monde avait été créé en six jours ordinaires et que ce fait mémorable entre tous ne remontait guère au delà de six à sept mille ans. Les textes bibliques apportés en faveur de cette chronologie semblaient formels et cependant peu à peu l'examen comparatif des phénomènes géologiques et du texte de la Genèse a permis de trouver entre les géologues et les exégètes un terrain de conciliation tout à fait satisfaisant. La géologie s'est taillé dans la semaine primitive un merveilleux domaine sur lequel le temps plane semblable à la silhouette du sphinx antique. Le dogme de la création n'en souffre aucun détriment, quoique la nouvelle façon de concevoir les origines de l'univers et surtout de notre planète soit aussi différente que possible de l'ancienne. L'idée que nous avons de l'action créatrice est plutôt agrandie, plus digne de la toute-puissance et de la sagesse divines. Si, d'après la Bible elle-même, mille ans n'ont, au regard de l'infini, d'autre portée que la journée d'hier maintenant écoulée, les millions d'années réclamés par la géologie ne modifient aucunement ce rapport (*).

On voit clairement par cet exemple entré dans le domaine de l'histoire et hors de toute controverse, la nature et les conditions du concours réciproque que les savants et les théologiens doivent se prêter dans d'autres cas analogues. Il ressort de l'examen des

---

(*) *Mille anni ante oculos tuos tanquam dies hesterna quæ præteriit.* Psalm. LXXXIX, 4.

discussions engagées autrefois sur ce point qu'elles se seraient éteintes beaucoup plus tôt, si les exégètes s'étaient donné la peine de vérifier sur place les faits nouveaux signalés par les géologues.

Une autre théorie se prête à des considérations de même genre plus actuelles, plus graves au point de vue des conséquences. Je veux parler de la théorie de l'évolution, résumée finalement dans l'ordre social par la formule trop connue de la lutte pour la vie.

Il m'est difficile de ne pas penser que si des catholiques instruits, des prêtres surtout, avaient suivi dès le début avec toute l'attention qu'elle exige cette théorie de l'évolution, on aurait pu l'endiguer plus tôt et prévenir les désastres dont elle est le principe dans la vie sociale. Il aurait fallu l'envisager sous ses différents aspects, faire les distinctions nécessaires. On l'a condamnée trop souvent en bloc, en enveloppant d'une même réprobation des possibilités, des probabilités, avec des erreurs manifestes. Il en est résulté que ces condamnations ont paru mal fondées aux yeux des spécialistes et dès lors sont restées sans effet.

En 1877, Virchow, effrayé des conséquences du principe, disait à ses confrères les évolutionnistes : “ Arrêtons-nous — *Restringamur* — ces théories sont extraordinairement dangereuses et vous saisirez facilement le parti que le socialisme peut en tirer. „

Le conseil donné par Virchow était aussi vain que possible. La logique est inexorable ; si on admet le principe, il faut subir les conséquences. C'était donc le principe qu'il fallait discuter en s'aidant d'une méthode plus rigoureuse.

Quelques membres du clergé et d'autres auraient pu, de leur côté, en procédant avec plus de réserve, montrer un enthousiasme moins irréfléchi, s'épargner de pénibles mécomptes.

Quoi qu'il en soit, le darwinisme, très inoffensif pour nos croyances religieuses, quand on l'étudie avec calme et bonne foi, dans les conditions que j'ai cherché à mettre en lumière, a réussi à l'aide d'une série de faux raisonnements et d'interprétations abusives, à donner une base scientifique en apparence à l'individualisme, à l'égoïsme le plus effréné et, du même coup, au socialisme. Hæckel et O. Schmidt ont eu beau dire que cette doctrine est essentiellement aristocratique, les faits leur ont donné le plus éclatant démenti.

Aucune erreur, et il n'en est pas, je crois, de plus nuisible, n'exige avec autant de rigueur, pour être combattue avec succès, le concours de cette double lumière qui nous vient d'en haut par la révélation et de notre raison par une étude consciencieuse de la nature.

En dehors de la vraie doctrine, toutes les théories imaginées pour rendre compte de la nature en général et de la destinée humaine, en particulier, aboutissent au scepticisme et finalement au pessimisme, ou bien au matérialisme et par le matérialisme à la destruction de tout lien social, de toute idée élevée.

La philosophie et la science indépendantes viennent échouer fatalement sur l'un ou l'autre de ces écueils.

Si, au contraire, la raison et la foi s'associent dans le rapport établi par le Concile du Vatican et tel qu'il figure dans la charte de la Société scientifique, nous sommes à même de puiser à leurs meilleures sources les principes les plus essentiels de la vie intellectuelle et sociale.

C'est à ce point de vue qu'il faut se placer toutes les fois qu'il est question d'élaborer un programme d'études scientifiques à un degré quelconque. C'est pourquoi il est si désirable que dans les universités les jeunes gens, déjà *sui juris* dans une certaine mesure, comprennent la nécessité d'étendre leurs études spéciales jusqu'à la zone de contact avec les doctrines de la philosophie religieuse. Quand des idées saines deviennent prépondérantes dans l'enseignement supérieur, elles s'imposent à l'enseignement secondaire et même à l'enseignement primaire, par les programmes, par les manuels, par les professeurs sortis pour la plupart des universités. Nous retrouvons ici encore l'application de la méthode descendante.

L'accord du pouvoir civil et de l'autorité ecclésiastique permet à celle-ci de donner, dans les établissements de l'État, toute l'extension désirable à l'instruction religieuse et plus spécialement à ce que l'on peut appeler la philosophie religieuse, c'est-à-dire à des explications appropriées dans le but de prevenir les conflits entre les données de la foi et celles de la science dans l'esprit des élèves.

Ce développement corrélatif de la philosophie religieuse et de l'enseignement scientifique suppose une préparation au séminaire.

Des indices me portent à craindre que nous ne soyons à ce point de vue quelque peu en retard en France par rapport à la Belgique. Je sais mal ce qui a pu se passer dans ce pays au point de vue de certaines questions sociales; mais ailleurs on a vu et on voit encore des ecclésiastiques, pleins de zèle et de bonne volonté, mais séduits par leur imagination, donner tête baissée dans des utopies chimériques; loin de travailler utilement à soulager la souffrance, ils l'exaspèrent par des promesses irréalisables.

D'où leur sont venues ces tendances, ces dispositions d'esprit? A mon avis, c'est de leur formation première, d'études trop exclusivement littéraires qui exaltent l'imagination et le sentiment, sans l'utile contrepoids des sciences positives qui conduisent à voir les choses telles qu'elles sont (*).

Faut-il, avant de terminer, toucher en quelques mots, à des questions plus techniques?

En thèse générale, et cette idée se lie à la précédente, je ne suis pas partisan des bifurcations prématurées. Sans doute, il ne faut pas vouloir courber tous les esprits sous un joug trop uniforme; il n'est pas nécessaire, par exemple, que tous les élèves des lycées de France, le même jour et à la même heure, traduisent le même texte de Tite-Live, ou démontrent le même théorème de géométrie. On pourra toujours, par une certaine tolérance par des équivalences, donner une satisfaction suffisante aux vocations précoces, aux aptitudes bien caractérisées. Il est toutefois du devoir d'un éducateur prudent de travailler à assurer l'équilibre des facultés, de maintenir, dans l'esprit des élèves, une juste pondération entre les connaissances acquises au collège. En favorisant, dans une trop large mesure, les tendances exclusives, peu réfléchies des jeunes gens, on prépare pour l'avenir des hommes incomplets, à qui certains éléments feront toujours défaut dans l'appréciation des questions importantes qui pourraient leur être soumises.

Les sciences naturelles et de même la physique et la chimie renferment-elles des éléments de culture générale qui doivent prendre place dans les programmes de l'enseignement secondaire? J'en suis absolument convaincu. La discussion ne doit porter, à

(*) *Res humanas, ut se habent, contueri,... optimum factu.* Encycl. *Rerum novarum.*

mon sens, que sur la proportion, la dose, la meilleure répartition des matières.

La surcharge des programmes, le surmenage chez les élèves, généralement invoqués pour éliminer du programme au moins certaines sciences, pourraient facilement être évités, si tout le monde était raisonnable. C'est presque toujours une question de méthode et de bon sens. Il saute aux yeux de quiconque se prend à réfléchir que dans la réalité les matières enseignées par le professeur et étudiées avec profit par l'élève constituent une somme, un total; cette somme varie en qualité et en quantité avec les facultés de l'élève, mais elle est fixe dans chaque cas particulier. L'art consiste à choisir avec sagesse et prudence dans l'amas des connaissances humaines, avec les proportions voulues, les éléments les plus utiles en vue du but que l'on se propose.

La difficulté, la vraie, vient des examens de sortie qui sont transformés presque partout en concours pour l'obtention des places rétribuées par l'État. On n'étudie pas pour s'instruire, mais pour avoir une place au banquet de la vie.

Dès lors on touche à un autre aspect des choses; il n'entre pas dans mon plan d'insister sur ce point.

Pour mon propre compte, je ne suis pas venu passer devant vous un examen de sortie, mais un simple examen de fin d'année. Tout mon espoir est dans votre extrême indulgence *(Applaudissements).*

La parole est ensuite donnée au R. P. Lucas, S. J., pour conférence, avec démonstration et expériences, sur *la Lumière noire et les radiations nouvelles.* En voici un résumé.

La portée de la découverte des rayons X par Röntgen a dépassé de beaucoup tout ce qu'on aurait pu prévoir. Elle a été le point de départ d'un immense mouvement scientifique qui semble „ sur le point de renouveler l'édifice entier de la Physique „.

Ces phénomènes des rayons X, des rayons cathodiques qui leur donnent naissance, et des nombreuses radiations nouvelles, leurs congénères, on les a groupés sous le nom de *lumière noire.* Nous appelons en effet lumière, l'agent qui permet à nos yeux de reconnaître les objets, leur présence, leurs contours, leur structure. A ce titre, les rayons X, pour ne citer que les plus connus, sont bien une lumière, eux qui nous révèlent la présence, les contours, la structure même d'objets qui, cachés dans des enveloppes opaques, échapperaient autrement à notre perception. D'autre part, le noir est ce qui ne produit pas d'impression sur nos yeux, et les rayons X n'affectant pas immédiatement notre organe visuel pourront bien être appelés *lumière noire.*

Le conférencier rappelle d'abord les propriétés des radiations nouvelles produites par une dépense évidente d'énergie — celles ensuite qui, *spontanément et sans frais appréciables,* émanent de substances récemment découvertes. Il esquisse, dans une troisième partie, la théorie toute moderne, la théorie d'hier, qui prend à tâche de résoudre la stupéfiante énigme.

Inutile de nous attarder ici à détailler les phénomènes en question. Plusieurs articles de notre revue les exposent tout au long (*).

En résumé, rayons cathodiques et rayons X sont doués de pouvoirs phosphorogéniques et photographiques remarquables ; les uns et les autres rendent l'air conducteur de l'électricité. Mais tandis que les rayons cathodiques transportent des charges électriques négatives et sont, par suite, sensibles aux champs magnétiques et électrostatiques, les rayons X, qu'ils produisent, sont dépourvus de ces propriétés. Les premiers sont un phénomène de transport de matière, les seconds se rapprochent de la lumière ultraviolette et se manifestent de plus en plus clairement comme un phénomène ondulatoire de l'éther.

Les rayons X viennent-ils à rencontrer un obstacle, un écran métallique, cet obstacle devient la source d'un rayonnement nouveau, étudié par Sagnac, qui les appelle rayons secondaires. Ceux-ci transportent des charges négatives et doivent être considérés comme les analogues des rayons cathodiques. Voilà donc comme un cycle de transformations qui, peut-être, est susceptible de se reproduire plusieurs fois.

(*) REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, *Les rayons X,* par le P. Lucas, S. J., avril 1896. — *Les rayons X à l'Exposition annuelle de la Société française de Physique,* par le même, juillet 1897. — *Physique,* par le même, avril 1899. — *Physique,* par le P. J. Bleuset, S. J., avril 1900. — *Radioactivité et corps radioactifs,* par le même, juillet 1900.

En effet, les rayons secondaires, rencontrant, à leur tour, certains obstacles, donnent naissance à des rayons tertiaires, voisins des rayons X.

Sans doute, bon nombre de propriétés possédées par ces rayonnements divers sont extraordinaires. Mais si l'on songe que les molécules du bombardement cathodique sont animées de vitesses pouvant dépasser 50.000 kilomètres à la seconde, on ne s'étonne plus trop d'y voir le point de départ d'une série de phénomènes inattendus.

Où le mystère commence et paraît presque insondable, c'est avec les matières radioactives. Voici l'uranium, le thorium et, à un degré bien supérieur, le polonium, le radium et l'actinium — le radium surtout — qui se montrent doués d'activité photographique, phosphorogénique, chimique, de pouvoir d'ionisation — qui, mieux encore, émettent un rayonnement complexe, déviable en partie par les champs magnétiques et électrostatiques, en partie non déviable, mélange donc de rayons cathodiques transportant des charges négatives et de rayons X — sources d'énergie dépensée, mesurable et mesurée, — et cela sans que l'on puisse découvrir nulle part l'apport équivalent à cette dépense ! Que devient donc le principe de la conservation de l'énergie ? Cette base de la science moderne s'effondre-t-elle dans le chaos ?...

Les physiciens ne paraissent jusqu'ici réussir à conjurer le désastre qu'en sacrifiant cette indivisibilité de l'atome, vénérée à l'égal d'un dogme, hypothèse hardie, synthèse d'admirables travaux récents qui s'affirme tous les jours avec une autorité croissante.

L'atome serait constitué de deux parties : l'une unique ou multiple, chargée d'électricité positive, l'autre constituée par des *corpuscules* innombrables chargés d'électricité négative — sous-atomes d'hydrogène, peut-être, ceux-là mêmes que Villard a montrés former exclusivement le flux cathodique des tubes à vide. Les corpuscules négatifs gravitent autour du noyau positif, l'ensemble formant un système analogue à notre système planétaire.

Et confirmation curieuse, le calcul basé sur ces données permet de retrouver les valeurs limites des longueurs d'ondes de l'aluminium.

Que seraient alors les matières radioactives ! Des systèmes atomiques très grands, car ils sont très lourds.

Leurs “ corpuscules „ les plus éloignés du centre — les Neptune du système — seraient dans des conditions d'instabilité extrême. La moindre cause suffirait à les détacher du groupe et occasionnerait le bombardement cathodique observé dans ces nouvelles substances dont la découverte illustre à tout jamais les noms des Becquerel et des Curie *(Applaudissements).*

A l'issue de la séance, M. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain, second vice-président de la Société scientifique, prononce l'allocution suivante :

MONSEIGNEUR,
MONSIEUR LE GOUVERNEUR,
MESDAMES, MESSIEURS,

En l'absence de notre cher président M. Proost, retenu chez lui pour motifs de santé, j'eusse personnellement aimé de voir la séance générale présidée par notre sympathique premier vice-président, M. le Chanoine Boulay. Mais son dévouement, dont il nous a donné plus d'une preuve, soit en nous envoyant des mémoires, soit en se multipliant à Lille il y a deux ans, lors de la réunion de notre Société dans cette ville, a voulu s'affirmer encore aujourd'hui par la très intéressante communication que vous avez entendue tantôt.

Dans ces conditions, vous voudrez bien m'excuser si, en ma qualité de deuxième vice-président, je prends la parole au nom de la Société.

MONSEIGNEUR,

Ce m'est un devoir bien agréable de présenter à Votre Grandeur l'hommage de notre profond respect et l'expression de notre vive gratitude pour l'honneur que vous nous faites en venant rehausser de votre présence l'éclat de notre assemblée générale.

Il y a dix ans, à pareille date, la session se tenait encore à Gand et vous étiez déjà des nôtres, Monseigneur. Cette fidélité que vous voulez bien nous témoigner et à laquelle nous attachons le plus grand prix ne nous étonne pas. Nous connaissons votre dévouement sans bornes aux œuvres scientifiques, artistiques et sociales. Nous savons que sous votre administration, les riches archives épiscopales ont été ouvertes au public et les archives paroissiales, rendues elles-mêmes accessibles. Nous savons que vous avez fondé l'École professionnelle Notre-Dame et transformé l'Institut Saint-Liévin en y annexant une section complète d'humanités anciennes, ainsi qu'une École de brasserie ; que vous avez aussi fondé l'École de métiers et d'industrie Saint-Antoine, à laquelle se dévoue également, avec tant de succès, mon collègue et ami M. Vanderlinden, un des membres distingués de la Société scientifique, récemment nommé aux importantes fonctions d'administrateur-inspecteur de l'Université de Gand *(Applaudissements)*. Nous savons encore que tant d'œuvres diocésaines qui sollicitent votre zèle et votre dévouement ne vous font point perdre de vue une œuvre par excellence, malheureusement trop oubliée de certains catholiques doués des dons de la fortune : je veux parler de cette Université de Louvain, la citadelle du catholicisme en Belgique. Vous lui donnez, Monseigneur, et vous lui donnez largement, nous le savons.

Honneur donc vous soit rendu et encore une fois merci, Monseigneur. Merci pour votre présence parmi nous, merci pour votre dévouement aux œuvres, merci pour votre inépuisable générosité : les membres de la Société scientifique ne se désintéressent pas de ces belles et nobles choses auxquelles vous consacrez, sans compter, et vos peines et vos ressources *(Applaudissements)*.

MONSIEUR LE GOUVERNEUR,

Notre Société vous est vivement reconnaissante de nous avoir fait aussi l'honneur d'assister à notre assemblée générale et elle vous remercie en outre bien cordialement de votre charmante hospitalité. L'accueil princier et si affable que vous nous avez réservé aujourd'hui n'a d'égal que la réception splendide que vous nous avez faite il y a dix ans : alors, comme aujourd'hui, je me plais à le rappeler, c'est en effet sous la présidence d'honneur du vénérable Évêque de Gand et du distingué Gouverneur de la Flandre orientale et à ce même hôtel du Gouvernement provincial que s'est tenue notre assemblée générale. Merci donc, Monsieur le Gouverneur, doublement merci !

Merci aux savants conférenciers à qui revient la meilleure part de cette magnifique séance. Merci à notre sympathique premier Vice-Président pour sa remarquable communication ; nous faisons les vœux les plus ardents pour que cette France catholique, si profondément éprouvée et que nous aimons tant, ne tarde pas à être dotée d'une réforme dans le sens qui vient d'être si chaleureusement défendu, sûrs que nous sommes qu'une pareille réforme ne peut que l'aider à se relever. Merci au R. P. Lucas qui, non content de publier régulièrement dans la Revue un bulletin sur les faits nouveaux qui peuvent intéresser le physicien de profession, ne manque jamais l'occasion de donner à la Société entière des preuves de son dévouement et sait toujours, dans une conférence charmante, dont l'attrait est encore rehaussé par des expériences judicieusement appropriées, mettre à la portée de tous les faits les plus délicats et les plus récents de la physique moderne. La lumière, il sait la porter dans toutes les intelligences et présentée par lui, fût-elle de la " Lumière noire ", elle apparaît limpide à chacun.

Merci également au R. P. Recteur du Collège Sainte-Barbe et à ses précieux auxiliaires, ainsi qu'à l'administration du Cercle catholique, pour l'hospitalité très appréciée, accordée aux membres pour les réunions du matin.

Merci à vous, Mesdames, qui avez bien voulu honorer notre séance de votre aimable présence ! Merci à tous ceux qui, sans être membres de la Société, ont répondu à notre appel ou nous ont aidés de quelque manière.

Et maintenant, avant de clore cette session qui comptera certainement comme l'une des plus importantes de la Société, je voudrais, si vous le permettez, retenir un instant votre attention sur un point des sciences qui me sont le plus familières et qui a des rapports étroits avec d'anciennes polémiques plutôt philosophiques que religieuses : c'est qu'en se plaçant au point de vue des faits, le seul qui soit du domaine de l'astronomie et de la mécanique, on doit considérer tous les mouvements comme purement relatifs.

J'ajoute que M. Poincaré, l'un des esprits les plus pénétrants de notre époque, a même montré que quand un phénomène comporte une explication mécanique, il en comporte une infinité; de toutes ces explications, celle qui est généralement considérée comme la vraie explication du phénomène est tout bonnement la plus simple, la plus commode. Par exemple, comme le faisait remarquer le même M. Poincaré au Congrès international de philosophie qui s'est tenu à Paris en août 1900, quand l'astronome dit que *la terre tourne,* il veut simplement dire qu'*il est commode*, en beaucoup de circonstances, *de la regarder comme tournant* par rapport aux étoiles; en d'autres termes, contrairement à l'opinion généralement accréditée, j'estime, entre autres avec mon excellent collègue et ami M. Mansion, notre dévoué Secrétaire-Général, qu'il n'existe aucun phénomène mécanique capable de *démontrer* la réalité *physique* de la rotation de la terre. Ce que je viens de dire, je pourrais le répéter pour la gravitation universelle et généralement pour toutes les lois mécaniques. Cela ne veut pas dire qu'il faille, comme le proposent de très bons esprits, reléguer en cosmologie ou en philosophie toute recherche relative à la cause immédiate à laquelle un phénomène peut être attribué; personne ne peut contester que l'hypothèse atomique en chimie, celle des ondulations en lumière, celle de l'attraction en mécanique céleste, celle des deux fluides en électricité, etc., aident la mémoire en systématisant les idées et ont été et sont encore souvent l'origine de grandes découvertes. Il n'en est pas moins vrai que la science gagnerait en clarté et qu'elle serait moins l'occasion de méprises ou même d'erreurs si l'on notait avec plus de soin que les théories ne sont souvent que des hypothèses ou des symboles ayant pour objet de coordonner les faits, d'en donner une image plutôt qu'une explication réelle.

En somme, malgré ses conquêtes — et à elle seule la conférence du R. P. Lucas permettrait de juger combien elles sont admirables — la science expérimentale est, par essence, impuissante à nous faire remonter aux causes. Pour la solution de toute une série de problèmes qui intéressent l'humanité au plus haut point, c'est à la philosophie et à la religion que le savant lui-même doit s'adresser *(Applaudissements).*

S. G. Mgr l'Évêque de Gand prend ensuite la parole et rappelle les éloges que Sa Sainteté Léon XIII a décernés à la Société lors du Jubilé célébré en avril dernier. Mgr Stillemans déclare qu'il est heureux de prendre sa part de ces éloges puisqu'il fait partie de la Société depuis son origine *(Applaudissements)*. En même temps, il remercie les membres du Conseil d'avoir choisi, pour la seconde fois, sa ville épiscopale pour lieu de réunion de la Société scientifique et il fait des vœux pour qu'elle continue toujours à bien mériter de la Religion et de la Science *(Applaudissements)*.

La séance est levée après cette allocution.

SESSION DU 30 JANVIER 1902

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. De Tilly donne lecture du Rapport suivant sur le Mémoire de M. le Comte de Sparre intitulé : *Sur le mouvement du pendule conique dans le cas de petites oscillations :*

M. le comte de Sparre, bien connu par de remarquables travaux de mécanique, notamment sur la théorie du pendule de Foucault, présente aujourd'hui à la Section une note relative aux résultats que l'on obtient, dans l'étude du pendule conique (ou sphérique), soit sans tenir compte du mouvement de rotation de la terre, soit en tenant compte de ce mouvement, lorsque, dans les deux cas, on veut pousser l'approximation au delà de celle qui est admise dans la théorie classique des appareils en question.

Comme l'auteur l'annonce lui-même, son travail actuel ne contient pas de résultats essentiellement nouveaux, mais les démonstrations, qui sont entièrement élémentaires, donnent lieu à des calculs notablement plus simples que ceux des méthodes présentées jusqu'ici pour résoudre les mêmes problèmes.

Il s'est borné au cas où les oscillations sont assez petites pour que l'on puisse négliger les termes de l'ordre du cube de l'angle d'écart du pendule dans les résultats finaux. Si l'on voulait pousser l'approximation plus loin, les calculs se compliqueraient, et on retomberait, à peu de chose près, sur ceux qui ont été faits dans une note antérieure de M. de Sparre, sur le même sujet, publiée dans les ANNALES de notre Société en 1892.

De plus, au point de vue de la vérification expérimentale des formules, l'approximation qu'il indique est toujours bien suffisante.

Pour en faire juger, je me borne ici à citer les résultats relatifs au cas le plus simple, parmi ceux où l'on tient compte du mouvement de la terre : le pendule de Foucault. La vitesse de rotation du plan d'oscillation, qui dans la théorie classique est représentée par $-\omega \sin \lambda$, parce qu'on y néglige, dans les équations différentielles, des termes de l'ordre $\omega\theta$ (ω, vitesse angulaire de la terre ; θ, angle d'écart du pendule), devient, en ne supprimant dans le résultat final que les termes qui sont au moins de l'ordre $\omega\theta^3$:

$$-\omega \sin \lambda \left(1 - \frac{3}{8}\theta^2\right)$$

et par conséquent la durée d'une révolution complète du plan d'oscillation du pendule, au lieu d'être $\frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}$, devient, avec la même approximation :

$$\frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}\left(1 + \frac{3}{8}\theta^2\right).$$

En se bornant au premier terme, on aurait 31 h. 47 m. 30 s. (pour une latitude de 48° 50′ 14″) ; le terme complémentaire n'augmente la durée que de 52 s., ce qui tombe au-dessous des erreurs inévitables de l'observation.

J'ai l'honneur de proposer à la Section de voter l'insertion de la note de M. de Sparre dans les ANNALES de la Société, et d'adresser des remerciements à l'auteur.

Ces conclusions sont adoptées par la Section.

M. Mansion fait la remarque élémentaire suivante à propos de la discussion d'un groupe de *n* équations à *n* inconnues : Si une ou plusieurs de ces équations sont incompatibles avec les autres, elles peuvent être compatibles avec une partie d'entre elles. On oublie souvent cette remarque dans le cas des équations linéaires et, par suite, on ne trouve pas tous les systèmes de valeurs qui vérifient une partie des équations données, parfois sans indétermination.

M. De Tilly fait un exposé des principes de la note suivante *Sur une trigonométrie non symétrique.*

Depuis quelque temps, on a soulevé dans plusieurs publications mathématiques, une question digne des méditations des géomètres philosophes, et que l'on peut énoncer ainsi : Est-il possible d'établir les cas d'égalité des triangles plans, quelle que soit la disposition relative des éléments égaux, sans invoquer, ni le retournement du plan, ni le postulatum d'Euclide?

Dans les traités ordinaires, on invoque (quelquefois sans le dire) le retournement du plan et c'est la méthode qu'il faudra conserver dans l'enseignement, mais en appelant l'attention sur les principes admis, au lieu de les dissimuler.

Si l'on s'interdit de retourner le plan, les raisonnements deviennent plus difficiles.

Dans l'hypothèse de celui qui nierait les propositions à démontrer, et qui n'admettrait l'égalité que pour des figures superposables sans retournement, on obtiendrait une géométrie plane très singulière, que l'on peut appeler géométrie non symétrique. Les deux triangles, obtenus en joignant deux points, symétriques par rapport à une droite, à un point quelconque de l'axe de symétrie, non seulement ne seraient pas superposables (parce qu'il est interdit de retourner le plan), mais ne seraient pas même égaux dans toutes leurs parties. La même figure peut s'interpréter autrement : Si, en un point de la bissectrice d'un angle, on lui mène une perpendiculaire qui rencontre les deux côtés, les deux longueurs interceptées ne seront pas égales, ce qui peut s'exprimer en disant que les deux côtés d'un angle ne jouissent pas des mêmes propriétés.

Il s'agirait donc de démontrer l'impossibilité de cette géométrie non symétrique.

Il peut sembler assez étonnant que le postulatum d'Euclide joue un rôle dans cette question. Cependant M. Tarry a démontré, dans un article remarquable, publié par Mathesis (*), que ce postulatum peut remplacer le retournement du plan.

L'exposition assez compliquée de M. Tarry peut-elle être simplifiée? Peut-elle, surtout, être rendue indépendante de l'emploi

---

(*) Mathesis, avril 1901, pp. 89 à 92.

des parallèles, sans cesser d'être strictement élémentaire? C'est une question qui reste en litige, et que je ne me propose pas de traiter aujourd'hui.

M. Mansion a fait observer (*) qu'en 1870 j'ai déclaré que le retournement (et *à fortiori* le postulatum d'Euclide) n'est pas nécessaire pour démontrer l'égalité des figures planes.

Je basais cette appréciation sur mon mémoire de 1868 (Études de mécanique abstraite), dans lequel j'établissais *à priori* les formules de la trigonométrie plane, d'où il était facile alors de déduire les cas d'égalité des triangles.

M. Barbarin (**) a mentionné également cette solution du problème. Tout en remerciant mes deux savants collègues d'avoir rappelé ma priorité dans cette question, que je crois encore avoir bien résolue, je vais présenter moi-même une objection contre ma méthode, objection que je pourrai heureusement lever d'une manière très simple.

Dans mon mémoire de 1868 je définissais ainsi le cosinus d'un angle :

„ C'est la quantité constante par laquelle il faut multiplier une vitesse, dirigée suivant l'un des côtés de cet angle, pour obtenir sa composante suivant l'autre côté, lorsque la seconde composante passe par le sommet de l'angle et qu'elle est perpendiculaire à la première. „

Or, dans l'hypothèse du contradicteur, qui établit une géométrie plane non symétrique, où les deux côtés d'un angle ne jouissent pas des mêmes propriétés, la trigonométrie doit également manquer de symétrie, et dès lors il n'est pas évident que la décomposition d'une vitesse se fasse de la même manière, quel que soit le côté de l'angle par lequel on commence.

Pour tenir compte de cette objection, j'appellerai *cosinus* d'un angle la quantité constante par laquelle il faut multiplier une vitesse, dirigée suivant le côté *gauche* de cet angle (***) pour obtenir

---

(*) Mathesis, p. 92.

(**) Procès verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4 juillet 1901.

(***) La droite et la gauche sont prises en tournant autour du sommet, dans le sens des aiguilles d'une montre.

sa composante suivant le côté droit, lorsque la seconde composante passe par le sommet de l'angle et qu'elle est perpendiculaire à la première.

J'appellerai *sinus* du même angle le facteur par lequel il faut multiplier la vitesse donnée pour obtenir la seconde composante.

Ainsi une vitesse u, dirigée dans l'intérieur d'un angle droit, se décompose en $u \cos \alpha$ suivant le côté droit de cet angle et en $u \sin \alpha$ suivant le côté gauche.

Dans la première exposition il en était de même; seulement la notation $\sin \alpha$ n'était employée que par abréviation et signifiait $\cos (1^D - \alpha)$. Ici la formule

$$\sin \alpha = \cos (1^D - \alpha)$$

n'existe pas et nous devons éviter avec soin de nous en servir par habitude.

Considérons une vitesse u dirigée suivant OA dans l'intérieur d'un angle droit COB (OC, côté gauche; OB, côté droit) (*) et décomposons u en $u \cos \text{AOB}$ ou $u \cos \alpha$ suivant OB, et $u \sin \alpha$ suivant OC; nous pouvons, de même, remplacer $u \cos \alpha$ par $u \cos \alpha \cos (1^D - \alpha)$ suivant OD, perpendiculaire à OA, et $u \cos \alpha \sin (1^D - \alpha)$ suivant OA; puis $u \sin \alpha$ par $u \sin \alpha \cos (1^D - \alpha)$ suivant OA et $u \sin \alpha \sin (1^D - \alpha)$ suivant OE, prolongement de OD.

Les vitesses opposées suivant OD et OE devant se détruire, on a :

$$\cos \alpha \cos (1^D - \alpha) = \sin \alpha \sin (1^D - \alpha), \tag{1}$$

équation qui n'équivaut pas encore à

$$\sin \alpha = \cos (1^D - \alpha).$$

Les vitesses dirigées suivant OA devant reproduire la vitesse primitive, on a aussi :

$$\cos \alpha \sin (1^D - \alpha) + \sin \alpha \cos (1^D - \alpha) = 1. \tag{2}$$

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

En remplaçant sin $(1^D - \alpha)$ par sa valeur tirée de (1), l'équation (2) devient :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos(1^D - \alpha)}, \tag{3}$$

équation qui n'équivaut pas à

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Nous devrons donc, encore une fois, éviter de nous servir de cette dernière par habitude.

Considérons ensuite une vitesse u, dirigée suivant OC, dans l'intérieur d'un angle droit DOA (OD, côté gauche; OA, côté droit) et décomposons-la suivant OA et OD. Les composantes seront $u\cos(\alpha+\beta)$ suivant OA et $u\sin(\alpha+\beta)$ suivant OD ($\mathrm{COB} = \beta$, $\mathrm{BOA} = \alpha$); mais si l'on commençait par décomposer u suivant OB et sa perpendiculaire OB′, les composantes seraient $u\cos\beta$ et $u\sin\beta$; décomposant ensuite $u\cos\beta$ et $u\sin\beta$ suivant OA et OD, on aurait, suivant OA, la vitesse $u\cos\beta\cos\alpha - u\sin\beta\sin\alpha$ et suivant OD, $u\cos\beta\sin\alpha + u\sin\beta\cos\alpha$, donc :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \tag{4}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \tag{5}$$

En faisant $\alpha = \beta$, il vient :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}, \tag{6}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{4\cos^2\alpha},$$

d'où :

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}}{2}. \tag{7}$$

Il ne faut pas de double signe devant le radical, parce que $\cos^2\alpha$ doit être positif. D'ailleurs $\cos\alpha$ lui-même doit être positif, parce que α est aigu; $\cos\alpha$ se déduirait donc de (7) sans ambiguïté, puis $\sin\alpha$ se déduirait sans ambiguïté de (6).

Les équations (6) et (7) peuvent être employées dans la trigonométrie ordinaire; l'équation (6) est même identique à l'une de celles que l'on emploie dans cette dernière trigonométrie, et s'il n'en est pas de même de l'équation (7), c'est parce que nous ne possédons pas encore la relation

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1.$$

Ici, nous nous bornerons à conclure que s'il existe un seul angle 2α dont le sinus et le cosinus soient les mêmes dans la trigonométrie non symétrique que dans la trigonométrie ordinaire, il en sera de même pour les sinus et les cosinus des angles $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \dots \frac{\alpha}{2^n}$.

Or cet angle 2α existe, c'est l'angle de 1^D, dont le cosinus est évidemment égal à 0 et le sinus à 1, aussi bien d'après nos définitions que d'après les définitions classiques (il y a aussi l'angle 0, mais il ne peut pas servir, parce que tous ses sous-multiples sont nuls).

Donc le sinus et le cosinus de $\frac{1^D}{2^n}$ sont les mêmes que dans la trigonométrie ordinaire. On formera successivement les sinus et les cosinus de $\frac{2.1^D}{2^n}, \frac{3.1^D}{2^n}, \dots \frac{k.1^D}{2^n}$ au moyen des formules (4) et (5), identiques aux formules ordinaires. Or un angle quelconque est toujours compris entre $\frac{k.1^D}{2^n}$ et $\frac{(k+1)\,1^D}{2^n}$, en choisissant convenablement les entiers n et k, dont le premier peut être pris aussi grand que l'on veut.

Il résulte donc de la loi de continuité que le sinus et le cosinus d'un angle quelconque sont les mêmes en trigonométrie non symétrique qu'en trigonométrie ordinaire, et que les règles de la composition et de la décomposition des vitesses sont aussi identiques dans ces deux trigonométries. Dès lors toutes les formules de la trigonométrie ordinaire sont ici applicables, notamment les formules des triangles, établies comme dans mon mémoire de 1868, ou dans mon *Essai de géométrie générale* de 1892, formules qui conduisent tout naturellement aux cas d'égalité.

En résumé, la trigonométrie et la géométrie non symétriques n'existent pas : elles se confondent avec la trigonométrie et la géométrie ordinaires, sans qu'il soit nécessaire, pour l'établir, d'invoquer ni retournement, ni postulatum quelconque.

Ce travail donne lieu à une discussion sur les divers modes d'exposition des principes de la théorie des fonctions circulaires, à laquelle prennent part la plupart des membres de la section.

M. Mansion présente à la section, au nom du R. P. Pepin, S. J., une *Étude sur quelques équations indéterminées de la forme* $x^2 + ay^2 = z^3$. M. Ch.-J. de la Vallée Poussin est nommé commissaire pour examiner ce travail.

M. Goedseels expose les principes d'une note *Sur les systèmes au repos absolu.*

Lorsque les auteurs d'astronomie et de mécanique céleste rapportent le mouvement des astres à des axes coordonnés invariablement liés aux instruments d'observation, à des axes géocentriques, héliocentriques, etc., en un mot à des axes parfaitement définis, on conçoit clairement ce qu'il faut entendre, dans chacun de ces cas, par des points au repos ou par des points mobiles. Mais on rencontre fréquemment des raisonnements, où il est question de points fixes, et de points mobiles dont l'état de repos ou de mouvement n'est rapporté à aucun des systèmes auxquels nous avons fait allusion plus haut, et où cet état est considéré à un point de vue tout à fait absolu.

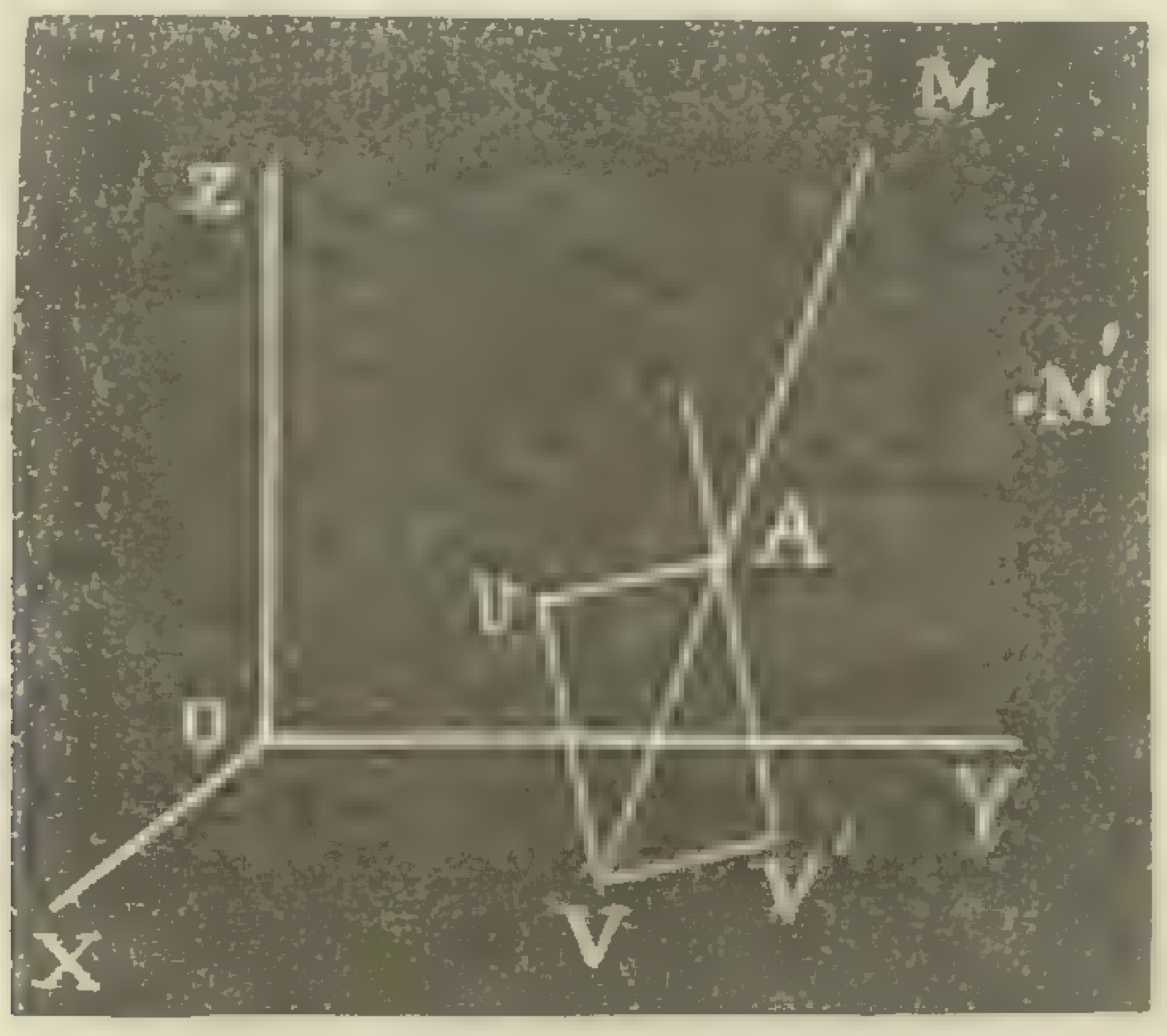
Les raisonnements de l'espèce ont trait à la précession, à la nutation, au déplacement lent de l'écliptique, et à toutes les questions les plus délicates de l'astronomie. Cependant, personne, que nous sachions, ne définit à quels systèmes de comparaison il faut rapporter les mouvements dits absolus.

Nous avons essayé de combler cette lacune dans une communication faite antérieurement à la première section de la *Société scientifique de Bruxelles,* et, admettant avec tout le monde que les astres se meuvent conformément à la loi de Newton, nous avons proposé d'appeler *axes au repos absolu* tout système par rapport auquel cette loi se vérifie.

Pour être complet on devrait démontrer non seulement que si un système répond à cette définition, il en est de même de tous ceux qui sont immobiles par rapport au premier; mais on devrait surtout établir que les lois de Newton cessent d'être vérifiées si l'on rapporte les astres à un système quelconque qui se déplace par rapport aux précédents.

L'examen de ces questions rentre dans le domaine de la mécanique céleste, et la solution, si elle est possible, est certes extrêmement difficile.

On peut définir les axes au repos absolu d'une manière beaucoup plus élémentaire, en se basant sur la propagation successive de la lumière. Il suffit : 1° d'admettre qu'il existe au moins un seul système, OXYZ, dans lequel la lumière, corrigée de la réfraction, se meut en ligne droite, et tel que l'axe optique d'une lunette dirigée d'un point quelconque A, vers un autre point quelconque M, invariablement liée aux axes OXYZ, coïncide avec la droite AM, opposée à la vitesse AV de la lumière venant du point M au point A; 2° de réserver le qualificatif *absolu* pour les axes OXYZ et tous ceux qui jouissent de la même propriété.



Il résulte de cette définition même, sans aucune démonstration, qu'elle s'applique à tous les systèmes qui sont au repos par rapport à OXYZ.

Si l'on considère au contraire un système quelconque dans lequel le point A possède une vitesse d'entraînement Av, la vitesse relative de la lumière sera le second côté AV′ du parallélogramme ayant AV pour diagonale et Av pour premier côté; et l'axe optique de la lunette coïncidera avec le prolongement de V′A.

Le rayon visuel correspondant au point M passera donc à côté de ce point, et la deuxième condition de la définition des axes au repos absolu ne sera pas satisfaite.

Si la vitesse d'entraînement ou son prolongement passait accidentellement par le point M le prolongement de V′A passerait encore par le même point.

Comme la vitesse d'entraînement ou son prolongement ne peut passer à la fois par deux points M et M′, il suffit de considérer deux points pour éviter la cause d'erreur que nous venons d'indiquer.

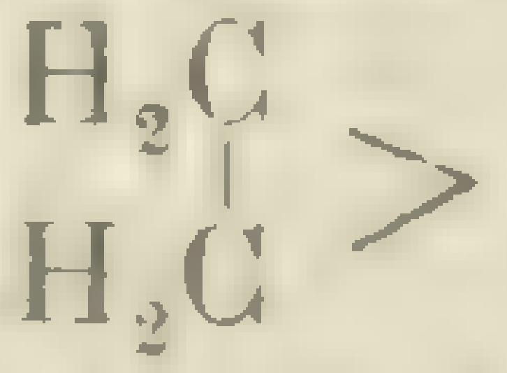
Cette note donne lieu à une discussion entre les membres de la section. M. Mansion fait observer que, même s'il n'existe aucun système au repos absolu, dans le sens de M. Goedseels, ou dans un autre sens quelconque, il est toujours possible de faire un exposé systématique de tous les faits astronomiques découverts successivement par les savants.

Vu l'heure avancée, des communications de M. de la Vallée Poussin *Sur la formule de Stirling* et de M. Mansion *Sur les rapports de la géométrie projective avec la géométrie métrique* sont renvoyées à la session suivante.

Deuxième section

Sur rapport favorable de M. Van der Mensbrugghe et du R. P. Thirion, la section vote l'impression aux ANNALES du mémoire présenté par M. Delemer : *Sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu dont la conductibilité n'est pas nulle.*

M. Louis Henry fait la communication suivante *Sur la fabrication et le prix actuels des composés éthyléniques.*

On connaît le puissant intérêt que présentent, parmi les innombrables combinaisons du carbone, les composés éthyléniques et la haute importance qui s'y attache. La part d'influence qui leur revient dans le développement historique de certaines parties de la chimie doctrinale dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle, est considérable. Les composés éthyléniques sont en effet les plus simples parmi les composés polycarbonés polyatomiques et à ce titre ils peuvent servir de trait d'union entre la chimie minérale proprement dite et la chimie organique. On se rappelle les leçons magistrales que Wurtz fit sur cet objet de 1860 à 1863, tant à la Société chimique de Paris qu'à celle de Londres, à l'occasion de l'*oxyde d'éthylène*  $\left.\begin{array}{c}H_2C\\ \vert\\ H_2C\end{array}\right> 0$ et du *glycol* $(HO)CH_2 - CH_2(OH)$ auquel son nom reste si glorieusement attaché (*).

Mais les composés éthyléniques, du moins la plupart d'entr'eux et avant tous le glycol lui-même, quoiqu'il date de 1856, sont restés des corps coûteux, fort coûteux même. Leur point de départ commun, le *bibromure d'éthylène* $H_4C_2 - Br_2$, est cependant un composé d'une préparation facile et d'un prix relativement peu élevé. J'ai sous les yeux le dernier prix-courant de la maison de Haen, de Hanovre ; le bibromure d'éthylène y est coté à 12 fr. 50 le kilogramme, alors que le glycol y est porté à 31 francs les 100 grammes (**). Une telle différence est bien faite pour provoquer l'étonnement. Elle se justifie cependant par les difficultés d'ordre pratique qui embarrassent la préparation de ce dernier composé, comme de bien d'autres corps du même groupe, et aboutissent à des rendements peu avantageux.

M'inspirant de l'utilité et de l'importance des composés éthyléniques, à tous les points de vue d'ordre scientifique, je me suis, depuis plusieurs années, occupé, d'une manière assidue d'améliorer les conditions de leur production et de leur préparation, je pourrais même dire de leur fabrication. On va voir dans quelle mesure j'ai réussi dans cette œuvre.

(*) *a) Histoire générale des Glycols*, par M. Adolphe Wurtz. Leçon professée devant la Société chimique de Paris, le 2 mars 1860.

b) Id, 20 mars 1863 : *Alliance de la chimie minérale et de la chimie organique.*

c) Leçon faite devant la Société chimique de Londres, le 5 juin 1862 : *Sur l'oxyde d'éthylène considéré comme un lien entre la chimie organique et la chimie minérale* (ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE, t. LXIX (3), p. 355).

(**) Catalogue mensuel de de Haen : novembre 1901.

La préparation de la *diacétine éthylénique* $H_4C_2-(C_2H_3O_2)_2$ a d'abord été ramenée à la réaction très simple du *bibromure d'éthylène* sur l'*acétate potassique* préalablement fondu, en présence d'une faible quantité d'acide acétique glacial et plus tard de la diacétine elle-même, mais en l'absence de tout dissolvant étranger. L'extraction du produit formé consiste en une simple distillation, au bain d'air, sous pression raréfiée ; le rendement de l'opération s'approche d'un rendement intégral.

En 1896, j'ai publié en collaboration avec mon fils, M. Paul Henry, un premier mémoire sur une méthode avantageuse de préparation du glycol, consistant dans la *saponification* de la diacétine éthylénique ainsi formée par l'alcool méthylique légèrement aqueux, le tout chauffé dans un autoclave, à une certaine température (*). Plus tard, j'ai fait connaître une méthode plus profitable encore pour obtenir ce composé, en ce sens qu'elle est plus expéditive et plus aisée à réaliser partout, à savoir la saponification proprement dite de cette même *diacétine* par les alcalis caustiques secs et solides ou même la chaux hydratée, suivie de l'extraction du produit formé par une distillation sous pression fortement réduite (**).

Ces procédés ont pris place dans des ouvrages autorisés de chimie opératoire, notamment dans le supplément du grand Dictionnaire de Wurtz, dans le *Manuel* de MM. Dupont et Freundler et dans celui, si justement estimé, de M. Gattermann.

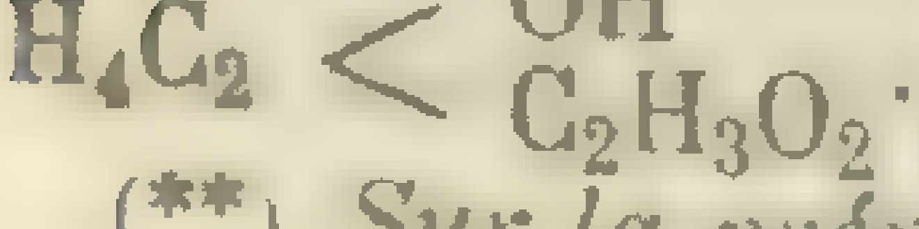
Dans le courant de l'année dernière, j'ai pu réaliser de nouveaux progrès ; je serais tenté de dire qu'ils marquent une époque dans la fabrication des composés du groupe de l'éthylène, tant ils me paraissent avantageux.

La réaction si curieuse de l'acide bromhydrique gazeux et sec, corps éminemment facile à préparer, sur la diacétine éthylénique, constitue une méthode d'une étonnante facilité pour obtenir le

---

(*) *Sur la préparation du glycol éthylénique*, par Louis Henry et Paul Henry (BULLETIN DE L'ACAD. ROYALE DE BELGIQUE, 1896, t. XXXII (3), p. 402).

L'alcool méthylique seul transforme la *diacétine éthylénique* en *monoacétine*



$H_4C_2 < \begin{matrix} OH \\ C_2H_3O_2 \end{matrix}$. L'eau présente achève la saponification.

(**) *Sur la préparation du glycol éthylénique* (BULLETIN DE L'ACAD. ROYALE DE BELGIQUE, 1899, t. XXXVII (3), p. 9).

bromo-acétate d'éthylène $H_4C_2(C_2H_3O_2)Br$ (*). Celui-ci à son tour, se transforme, dans les conditions les plus favorables, en *monobromhydrine éthylénique* $C_2H_4(OH)Br$ sous l'action de l'alcool méthylique et en glycol lui-même sous l'action de l'eau seule.

L'acide chlorhydrique gazeux se comporte vis-à-vis de la *diacétine* comme l'acide bromhydrique; il la transforme, mais avec lenteur et certaine difficulté relative, en *chloro-acétate d'éthylène* $H_4C_2(C_2H_3O_2)Cl$ lequel chauffé avec de l'alcool méthylique fournit avec avantage de la mono-chlorhydrine $C_2H_4(OH)Cl$. J'ajouterai encore que la *diacétine* elle-même, sous l'action de l'alcool méthylique seul, se transforme aisément en *mono-acétine* $C_2H_4(C_2H_3O_2)OH$. Je n'insisterai pas ici sur l'intérêt que présentent ces réactions au point de vue théorique; je n'en veux signaler que le caractère éminemment pratique, tant en ce qui concerne les hydracides halogénés et particulièrement l'acide bromhydrique, qu'en ce qui concerne l'alcool méthylique, composé que l'on est plus habitué à regarder comme un milieu dissolvant que comme un agent réactionnel proprement dit.

Je dois ajouter qu'à l'aide de ces divers composés, chloro- et bromo-acétate d'éthylène, mono-chlorhydrine et mono-bromhydrine éthylénique, mono-acétine et glycol, il est possible de préparer, par des réactions connues, un nombre considérable de dérivés éthyléniques de nature et de composition fort variées. La mono-bromhydrine et la mono-chlorhydrine, le glycol éthylénique nous apparaissent ainsi, avec le bromo- et le chloro-acétate d'éthylène et la diacétine éthylénique, comme des composés primordiaux, se plaçant à côté du bibromure d'éthylène, leur point de départ final; l'importance de ces corps s'accroît ainsi dans une mesure dont on apprécie l'étendue.

J'ai communiqué ces résultats et les méthodes qui y conduisent à la maison Kahlbaum, de Berlin, l'une des plus importantes parmi les diverses grandes maisons allemandes qui s'occupent de la fabrication commerciale des produits chimiques scientifiques.

Ces procédés y ont été expérimentés et mis en pratique. Le

(*) Bulletin de l'Acad. royale de Belgique, Classe des Sciences, 1901, p. 236 et Annales de la Société scientifique.

30 octobre dernier, M. Bannow, un des directeurs scientifiques de l'établissement Kahlbaum, m'écrivait :

“ Je me réjouis de vous faire savoir que votre mode de pro-
„ duire les dérivés de l'éthylène a fait ses bonnes preuves. J'ai
„ donc pu en abaisser déjà beaucoup les prix dans ma liste qui
„ paraîtra prochainement et j'espère que je pourrai le faire encore
„ davantage après avoir perfectionné mes arrangements. „

Depuis lors, le nouveau catalogue de Kahlbaum, daté de novembre 1901, a été distribué. On y voit figurer divers composés éthyléniques qui jusqu'ici n'avaient encore apparu dans aucun prix-courant, notamment le *bromo-acétate d'éthylène* et la *bromhydrine éthylénique,* si utilisable par l'intensité de son aptitude réactionnelle. D'autres composés y sont cotés à des prix notablement inférieurs aux prix des années précédentes. On va pouvoir en juger par ces quelques exemples. Dans le prix-courant de Kahlbaum paru en novembre 1900, la *diacétine éthylénique* coûtait 37 marks les 100 grammes; dans le catalogue de l'an dernier, publié à la même époque, elle ne coûte plus que 12 marks et demi; la mono-chlorhydrine éthylénique était plus chère encore, elle était cotée à 62 marks les 100 grammes; le prix n'en est plus que de 30 marks en ce moment. Quant au glycol éthylénique lui-même, le prix qui en était de 35 marks les 100 grammes en 1896, était déjà tombé à 27 marks en 1900, il est descendu aujourd'hui à 15 marks.

Par les composés éthyléniques anciens et nouveaux qui s'y trouvent consignés, ce récent catalogue de l'habile fabricant de Berlin aura provoqué, je pense, quelqu'émoi dans les autres établissements du même genre. Quoi qu'il en soit, je conserve la conviction qu'en livrant aux chimistes à des prix déjà si considérablement réduits, ses composés éthyléniques, Kahlbaum ne renonce pas aux bénéfices qu'il a le droit de retirer de son habileté et de son activité industrielles. Je crois même que si la fabrication de ces composés pouvait prendre quelque extension, se faire sur une échelle moins restreinte, elle serait de nature, dans les conditions actuelles, à procurer encore de notables profits. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les prix indiqués pour les deux composés qui sont les premiers dans l'ordre successif de production, le *bibromure d'éthylène* et la *diacétine éthy-*

lénique. Un kilogramme de bibromure d'éthylène vaut à présent 10 marks, et en devenant de la *diacétine éthylénique,* transformation aisée à réaliser, s'il en fut, il décuple presque de valeur, il vaut 97 marks auxquels il faut encore ajouter 6 marks qui représentent la valeur, selon le tarif indiqué, des 1300 grammes de bromure de potassium qui se forment dans ces circonstances.

C'est ainsi que, malgré tout, les composés éthyléniques restent encore fort coûteux en comparaison de beaucoup d'autres. J'ai la confiance que, dans un prochain avenir, comme le dit d'ailleurs M. Bannow, ils descendront à un niveau beaucoup moins élevé (*) et deviendront ainsi plus abordables aux chimistes qui, soucieux d'épargner leur temps, ne disposent que de modestes ressources. Il en serait certainement ainsi avant peu de temps si comme divers autres composés carbonés, le chloral par exemple et le méthanal ou formol, les composés éthyléniques pouvaient recevoir quelque application pratique dans le domaine de la médecine et de l'hygiène ou dans celui non moins étendu de l'industrie.

A cette occasion, je rappellerai un fait bien significatif, tiré de mon expérience personnelle. En 1869.ayant l'intention de faire des recherches sur le *chloral,* je m'adressai à la maison Marquart, de Bonn, et lui demandai *si* et *à quel* prix elle pourrait me fournir ce produit, peu commode à préparer dans un laboratoire. On me répondit que le kilogramme en coûterait 225 francs. Je ne pus évidemment donner suite à cette proposition, mes moyens ne me permettaient pas d'exercer mon activité sur un produit aussi dispendieux. Quelques mois plus tard, le chloral, sous la direction du Dr Liebreich, prenait la place importante qu'il a gardée depuis dans l'arsenal thérapeutique. Son prix tombait à 10 francs le kilogramme, qui est encore à peu près celui d'aujourd'hui. Ce que je viens de dire du chloral, je pourrais le répéter dans les mêmes termes à peu près pour le méthanal et pour d'autres corps nombreux qui ont eu l'avantage de laisser reconnaître leur utilité pratique immédiate.

Cela m'amène à dire qu'il y aurait, à mon sens, une étude aussi

---

(*) Dans une lettre datée du 10 janvier 1902, M. Kahlbaum me dit qu'il espère pouvoir encore abaisser le prix des composés éthyléniques dans sa nouvelle liste qui paraîtra dans quelques mois.

intéressante qu'instructive à faire sur le développement extraordinaire de l'industrie des produits chimiques scientifiques à notre époque. On y verrait combien sont nombreux ceux qui, ayant pris naissance dans les laboratoires de recherches, sont devenus des produits commerciaux, et l'énorme diminution de prix que tous ont subie. La science elle-même en a ressenti la plus heureuse et la plus puissante influence. Si son capital objectif s'est accru depuis un quart de siècle dans des proportions aussi étonnantes, c'est à cette circonstance qu'elle le doit pour une grande part. On verrait aussi par cette revue que si l'industrie doit beaucoup à la science, elle n'a pas été ingrate ; car elle lui a rendu de son côté de précieux services en se faisant, dans bien des circonstances, pour ainsi dire sa servante, servante intelligente et habile, dévouée sans doute, mais toujours avide de plantureux bénéfices.

Je reviens au glycol et à ses dérivés. Ayant à diverses reprises entretenu notre section des méthodes de préparation des corps du groupe si important et si remarquable de l'éthylène, j'ai cru qu'elle apprendrait avec intérêt l'emploi qui en avait été fait dans le domaine de la grande pratique. Constater l'utilité de ces méthodes et leurs succès, avait été pour moi une vive satisfaction. C'en est une nouvelle de pouvoir le dire en ce moment et ici. C'est ainsi que je m'excuserais, s'il le fallait, d'avoir entretenu pendant ces quelques instants la section d'un objet naturellement et habituellement étranger à ses préoccupations, le négoce chimique.

Je ne crois pas inutile de rappeler succinctement l'ensemble des réactions successives qui constituent aujourd'hui les méthodes pratiques de fabrication des composés éthyléniques.

Le *point de départ* en est le *bibromure d'éthylène* $H_4C_2 - Br_2$. Éb. 132°.

Au prix de 12 fr. 50 le kilogramme, où ce composé est coté dans les catalogues des principales maisons allemandes, il est préférable de l'acheter que de le préparer soi-même. Le temps est de l'argent.

Premier cycle réactionnel

A. — Réaction du *bibromure d'éthylène* sur les *sels à métal alcalin* — potassiques de préférence — préalablement fondus, seuls, en présence d'un peu d'acide libre. Formation des *éthers éthyléniques bi-acides* H_4C_2 - $(C_nH_{2n-1}O_2)_2$.

Deux particularités caractérisent cette réaction en général :

a) Elle est toujours *complète,* quant au bibromure d'éthylène, c'est-à-dire qu'elle ne fournit que des *éthers bi-acides* $C_2H_4(C_nH_{2n-1}O_2)_2$, quelles que soient les quantités relatives de bibromure et de sel employées.

b) Elle s'opère le moins facilement avec le *formiate* K - CHO_2 ; à partir de l'acétate K - $C_2H_3O_2$ elle est aisée et relativement rapide.

J'ai indiqué précédemment la raison d'être de ces faits.

Je décrirai avec quelque détail la préparation de la *diacétine éthylénique* H_4C_2 - $(C_2H_3O_2)_2$, le plus important, par l'usage qui en est fait, de ces éthers complets du glycol.

Mode opératoire. — a) Dans un ballon à fond rond et à col court, muni dans le bouchon qui le ferme d'un tube droit d'environ un mètre de long servant de réfrigérant, on introduit, à l'origine, molécules égales de *bibromure d'éthylène et d'acétate potassique fondu* en fragments, plus quelques centimètres cubes d'acide acétique glacial.

On chauffe au *bain d'air* (*). L'acide se transforme en une masse grenue de K Br.

b) Distillation dans les mêmes conditions, jusqu'à siccité, sous la pression ordinaire d'abord, sous pression réduite à la fin.

c) Le liquide distillé, mélange de *diacétine* et de *bromure* éthyléniques, plus l'acide acétique libre ajouté, est soumis dans les mêmes conditions que précédemment à l'action d'une quantité d'*acétate potassique* égale à celle déjà employée. Distillation comme précédemment.

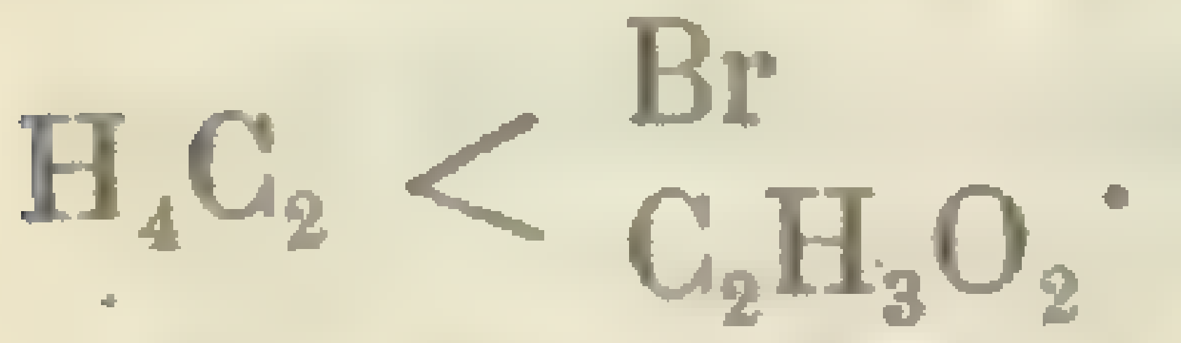
La *diacétine,* quelque peu acide, ainsi obtenue, peut servir à étendre le bibromure d'éthylène, qui s'y dissout, dans des opérations ultérieures. Dans un semblable mélange, l'acétate potassique en fragments surnage; au cours de la réaction, on voit ces fragments se déliter et se transformer rapidement en une masse pulvérulente grenue, de bromure potassique, qui gagne le fond du ballon.

(*) Il est ici question des " bains d'air, système von Babo, de la maison Paul Altmann de Berlin „. Il est peu d'ustensiles ordinaires d'un emploi aussi avantageux.

On conçoit que cette réaction exécutée simultanément dans plusieurs appareils permet de préparer en peu de temps des quantités considérables de diacétine éthylénique.

Les rendements sont de ceux que l'on peut regarder comme complets.

B. — Action de l'acide H Br, *gazeux* et *sec,* à la température ordinaire, sur la *diacétine éthylénique.* Formation de *bromo-acétine*



$$H_4C_2 < \genfrac{}{}{0pt}{}{Br}{C_2H_3O_2}$$. Éb. 162°.

On dirige le gaz H Br dans la diacétine. Il est inutile de refroidir. Échauffement notable. Augmentation de volume. La distillation permet de séparer la *bromo-acétine* et l'acide $C_2H_4O_2$ formés simultanément. Rendement intégral.

Le bromure de potassium formé précédemment peut servir à fabriquer le gaz H Br. On pourrait aussi en extraire le brôme et transformer celui-ci en H Br par la naphtaline, opération dans laquelle la moitié de Br est perdue, mais qui fournit directement du gaz H Br sec.

C. — Action de l'*alcool méthylique* $H_3C - OH$ sec sur la *bromo-acétine éthylénique* pour obtenir la *mono-bromhydrine* $(HO)CH_2 - CH_2 Br$.

On chauffe le bromo-acétate éthylénique, dans un appareil à reflux, avec 3 à 4 fois la quantité théoriquement nécessaire d'alcool bien desséché, pendant environ une heure.

La distillation fractionnée permet d'arriver aisément à la *mono-bromhydrine.* Éb. 148°. Rendement d'environ 90 %.

D. — Action de l'*eau* elle-même sur la *bromo-acétine.* Saponification complète et formation de glycol éthylénique.

E. — Réaction de la *bromo-acétine* $Br CH_2 - CH_2(C_2H_3O_2)$ sur les sels potassiques des acides gras, à sec.

Formation d'éthers *glycoliques biacides mixtes* $(C_2H_3O_2)CH_2 - CH_2(C_nH_{2n-1}O_2)$.

F. — Réaction de la *mono-bromhydrine* $(HO)CH_2 - CH_2 Br$ sur les sels potassiques des acides gras, à sec.

Formation des éthers mono-acides du glycol éthylénique $(HO)CH_2 - CH_2(C_nH_{2n-1}O_2)$.

On opère, dans ces deux réactions, comme il a été indiqué lors de la préparation de la diacétine.

Deuxième cycle réactionnel

A. — Action de l'acide $H\,Cl$ gazeux sur la *diacétine* éthylénique.

Formation de *chloro-acétine éthylénique* $Cl\,H_2C - CH_2(C_2H_3O_2)$.

L'acide $H\,Cl$ s'absorbe et agit beaucoup plus difficilement sur la diacétine que l'acide $H\,Br$. Il est nécessaire de saturer celle-ci à diverses reprises de gaz $H\,Cl$, et d'attendre plusieurs jours avant que la réaction soit complète.

B. — Action de l'alcool méthylique $H_3C - OH$ sur la *chloro-acétine éthylénique* ou même de l'*eau*, pour obtenir la *mono-chlorhydrine* $(HO)CH_2 - CH_2\,Cl$.

C. — Réaction de $Cl\,H_2C - CH_2(OH)$ ou mieux de $Br\,CH_2 - CH_2(OH)$ sur l'iodure de sodium $Na\,I$ dans l'alcool méthylique.

Formation de *mono-iodhydrine éthylénique* $ICH_2 - CH_2(OH)$. Distillation sous pression réduite.

Troisième cycle réactionnel

A. — Action de l'*alcool méthylique* sec $H_3C - OH$ sur la *diacétine éthylénique.*

Formation de *mono-acétine* $(HO)CH_2 - CH_2(C_2H_3O_2)$.

B. — Action de l'*alcool méthylique* $H_3C - OH$ humide ou faiblement aqueux sur la *diacétine.*

Formation de *glycol éthylénique.* Voir le travail de 1896 cité plus haut.

C. — Action des *alcalis libres* ou de l'*hydroxyde calcique* sur la *diacétine éthylénique.*

Saponification complète, formation de glycol. Distillation sous pression très raréfiée. Voir mon mémoire de 1899, cité plus haut.

D. — La réaction des acides $H\,Cl$ ou $H\,Br$ gazeux sur un mélange à molécules égales de glycol et d'acide gras, fournit aisément les dérives mixtes $Cl\,CH_2 - CH_2(C_nH_{2n-1}O_2)$ et $Br\,CH_2 - CH_2(C_nH_{2n-1}O_2)$.

J'ajouterai encore pour compléter l'ensemble des réactions éthyléniques les réactions suivantes :

E. — Action de $S_2\,Cl_2$ sur le *glycol.*

Formation commode et avantageuse de $Cl\,H_2C - CH_2(OH)$. Méthode de Carius.

F. — Réaction de $Sb\,Cl_5$ sur $Br\,CH_2 - CH_2\,Br$.

Formation commode de $Cl\,CH_2 - CH_2\,Br$ *(Lössner)*, composé que j'ai fait autrefois en expulsant l'iode de $Cl\,CH_2 - CH_2I$ par le brôme en excès.

M. E. Gérard, empêché au dernier moment, s'excuse et envoie le résumé suivant de la communication qu'il se proposait de faire : *Sur un procédé d'éclairage électrique des trains.*

On réalise l'éclairage électrique des trains par des procédés de différents genres.

Dans les uns, la source d'électricité est unique ; dans les autres elle est propre à chacun des véhicules. Ce dernier genre qui évite l'extinction des lumières pendant les manœuvres ou changement de composition des trains, comporte plusieurs procédés, dont voici les principaux :

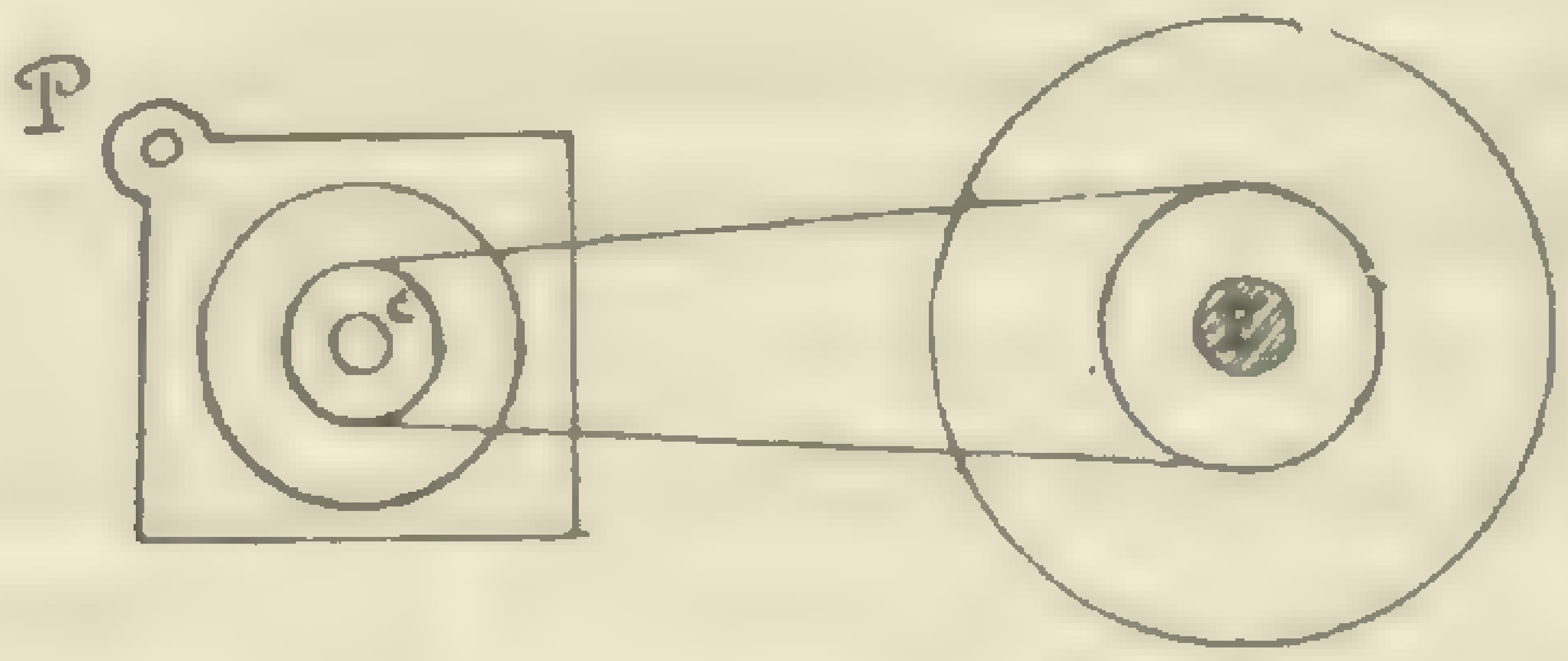
Le plus simple en apparence est l'emploi d'une batterie d'accumulateurs amovible, chargée à poste fixe et ramenée sous la voiture. Il présente plusieurs inconvénients : nécessité d'une batterie volumineuse et lourde en proportion de la capacité requise par le nombre d'heures et l'intensité de l'éclairage ; détériorations accrues par le transport de la batterie ; immobilisation de celle-ci pendant qu'elle reçoit sa charge électrique, ou dédoublement de l'effectif ; absence d'éclairage quand la voiture est restée pour une cause quelconque éloignée du centre de ravitaillement.

Aussi, parmi les systèmes du genre à unités indépendantes, on tend à choisir ceux qui comportent à la fois, pour chaque voiture, une source primaire d'électricité et un emmagasinage, en d'autres termes une dynamo et une batterie d'accumulateurs. La dynamo est mue plus ou moins directement par l'essieu. Déjà plusieurs procédés de l'espèce ont fait leurs preuves. Celui dont je vais dire un mot, adopté par l'État belge pour une partie du matériel à voyageurs, présente certains traits originaux, et même une sorte d'anomalie mécanique qui en constitue la caractéristique. En voici le principe :

Une dynamo dont le centre de rotation est C est mue par une courroie qu'entraîne une poulie calée sur l'un des essieux E de la voiture. Cette dynamo satisfait aux conditions suivantes : alimenter directement les lampes dès que le train a acquis une vitesse de régime déterminée, entre deux limites maxima et minima.

Un premier réglage de la dynamo résulte de ce que l'entraînement de la poulie par la courroie n'est pas constant : celle-ci glisse sur celle-là, dès que l'effort qu'elle exerce rapproche les centres de rotation de la poulie et de l'essieu. La résistance due au travail électrique de la dynamo l'empêche, dès lors, de dépasser une certaine vitesse maxima. Dans le sens du minimum, un appareil spécial est appelé à rompre la connexion entre la batterie et la dynamo, lorsque le voltage du courant engendré par la dynamo est inférieur à celui de la batterie.

Pour une certaine vitesse de régime déterminée, la dynamo charge les accumulateurs, tout en envoyant du courant dans les lampes. Dans cette marche en parallèle, la batterie ne travaille évidemment pas.



L'appareil qui rompt et rétablit la connexion entre la batterie et la dynamo, appelé conjoncteur-disjoncteur, diffère d'après les inventeurs : ainsi dans le système Stone, il agit mécaniquement sous l'action de la force centrifuge, étant attelé à l'arbre de la dynamo ; dans le système Vicarino, il est réglé par un jeu de courants et de ressorts, avec intercalation de résistances appropriées. Mais en l'un et l'autre système, on recourt au réglage par glissement de la courroie, glissement qui est tant redouté dans la plupart des autres applications de ce moyen de transmission.

La tension aux bornes de la batterie est de 16 volts, le débit moyen 25 ampères, pour alimenter ordinairement de 12 à 14 lampes. Dans les compartiments on accouple 2 lampes de 8 bougies; dans les couloirs sont des lampes isolées de 6 bougies.

Le R. P. Lucas fait connaître le mode de préparation d'un *Isolant soufre-paraffine.*

1° Les anciens modèles d'électroscope sont généralement très mal isolés. Leur charge se dissipe en quelques minutes, et, par les temps humides, en quelques secondes. Aussi les physiciens qui, ces dernières années, ont étudié la déperdition de l'électricité, etc., ont-ils proposé diverses substances, divers mélanges destinés à constituer le bouchon porte-tige des électroscopes. Citons, par exemple, le soufre employé par Branly, la paraffine de Boudreaux, le mélange gypse (1 partie en poids) et colophane (2 parties) de Palmieri, le composé soufre-paraffine-benzol de Hurmuzescu.

Ces substances ont un pouvoir isolant remarquable et permettent de conserver des charges pendant plusieurs jours et même plusieurs mois (à l'abri de la lumière).

2° Chacune d'elles présente certains inconvénients.

Le soufre est extrêmement cassant; les canons ont des lacunes, des soufflures. Les poussières s'attachent à la paraffine et l'on est forcé d'en rafraîchir de temps en temps la surface, par exemple par un grattage.

Hurmuzescu (*) indique un mode de préparation de sa diélectrine qui exige, malheureusement, un appareillage spécial.

On fait fondre à une douce chaleur des quantités convenables (les proportions ne sont pas indiquées) de soufre et de paraffine additionnées d'un dissolvant comme le benzol. On coule dans un moule approprié et refroidit brusquement sous pression.

3° Nous avons trouvé que le dissolvant et le refroidissement brusque sous pression n'étaient pas nécessaires pour obtenir avec le soufre et la paraffine une excellente matière isolante.

Notre électroscope abandonné chargé, au milieu du laboratoire, est resté sans perte notable, plus de sept heures, dont plusieurs de jour.

Voici comment nous préparons cette matière isolante :

On fond, à feu doux, dans un poêlon de fer émaillé par exemple, un peu de paraffine, de quoi former une couche de quelques millimètres.

La quantité de paraffine entrant dans la composition du produit est, en effet, extrêmement faible. D'ailleurs un excès ne nuit pas et se trouvera, légèrement teinté en jaune, à la partie supérieure du lingot.

A la paraffine fondue, on ajoute de la fleur de soufre; et, tout en continuant à chauffer, on gâche soufre et paraffine de manière à faire disparaître complètement les grumeaux.

(*) *Electromètres et Electroscopes*, par Humuzescu, dans ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE JASSY, 1901.

La quantité de soufre se calcule sur les dimensions de l'objet à obtenir en attribuant au produit la densité 2.

Bientôt le soufre fond à son tour et on obtient un mélange parfaitement liquide.

Il faut continuer à chauffer jusqu'à consistance fortement sirupeuse, la paraffine en excès restant toujours liquide.

On retire alors du feu. Le mélange continue à gagner en viscosité puis, comme ferait le soufre pur, repasse de lui-même par un état de liquidité parfaite.

C'est alors qu'on le coule dans un moule approprié.

Le moment de la coulée n'est pas sans importance.

Si l'on verse dans le moule le mélange dès sa première liquéfaction, avant qu'il ne soit devenu visqueux, on retire un bloc blanc jaunâtre, trop tendre pour donner un beau poli.

Si après la phase visqueuse, on n'attend pas la liquéfaction complète, le bloc manque d'homogénéité et se trouve plus dur et plus cassant qu'il ne convient.

Il est également désavantageux de chauffer trop fort.

Au contraire, les conditions énoncées ci-dessus ont-elles été observées, on retire du moule, après refroidissement, un bloc *compact qui se travaille facilement au tour et se polit parfaitement.*

Veut-on, par exemple, un cylindre dans lequel puisse se tourner un bouchon d'électroscope, on prendra comme moule, une de ces boîtes en carton, dans lesquelles se conservent les manchons du genre Auer, et que l'on aura plantée dans un tas de sable sec.

On façonne le lingot sur le tour. Puis, pour y fixer la tige de l'électroscope, on perce au foret un trou un peu moins large que cette tige. Celle-ci chauffée y pénètre facilement et la matière fondue à son contact la fixe solidement en place par son refroidissement.

Il convient de travailler les blocs dans l'intervalle de quelques jours après la coulée car le produit devient cassant avec le temps, de même d'ailleurs que la diélectrine.

En la tenant à la main on y reconnaît le craquement caractéristique des canons de soufre.

4° Hurmuzescu appelle sa diélectrine une sorte de combinaison. Nous observerons seulement au sujet de notre produit que sa solidification présente les caractères de la solidification des alliages désignés sous le nom de *liquation*. A la partie supérieure du bloc on rencontre la paraffine en excès presque pure, légèrement teintée en jaune. Immédiatement en dessous vient une couche noirâtre nettement séparée de la première, espèce de *masselotte* dure très riche en soufre mais moins homogène que le reste du lingot.

Il serait intéressant de savoir si les portions homogènes ont un point de solidification à température constante (*).

5° Ajoutons que dans la construction des électroscopes, il convient de rejeter les cloches en verre ordinaire sur lesquelles souvent, par les temps secs surtout, se fixent des charges électriques difficiles à éliminer et qui troublent les phénomènes.

Une construction très recommandable est celle de Beetz : la cage de l'électroscope est un cylindre assez aplati métallique sur lequel est soudé, en haut, le large goulot qui recevra le bouchon porte-tige — et latéralement, deux tubulures où glissent des tiges métalliques à boutons, qui, poussées plus ou moins profondément dans la cage, feront varier la sensibilité de l'électroscope. Les bases du cylindre sont fermées au moyen de vitres en verre conducteur jaune ou rouge afin d'arrêter les rayons très réfrangibles. La cage est mise à la terre.

Enfin, comme feuilles, il est plus commode d'employer l'aluminium que l'or. L'aluminium à poids égal est beaucoup moins fragile et plus facile à couper net. Un mode de fixage très simple est le suivant. La tige de l'électroscope est fendue d'un mince trait de scie. On découpe dans une feuille d'aluminium d'un ou de deux dixièmes de millimètre d'épaisseur une lame un peu plus large que la feuille, la partie supérieure de cette lame est repliée sur elle-même et dans ce pli est introduite la feuille légère : lame et feuille sont alors glissées à frottement dans la fente de la tige.

On a ainsi un électroscope à une lame verticale fixe et à *une* seule feuille mobile — ce qui rend autant de services que deux. — Au surplus, si on y tient, il n'est pas bien difficile de fixer deux feuilles.

(*) Nous avons trouvé hier l'indication d'un isolant soufre-paraffine de M. Neyreneuf. Les renseignements nous manquent au sujet de cette matière.

Troisième section

M. A. Proost et le R. P. Schmitz présentent leurs rapports sur un travail de M. F. Meunier : *Étude de quelques rares diptères de l'ambre.*

Rapport de M. Proost. Le travail soumis par M. Meunier à la troisième section de la *Société scientifique* au mois d'avril 1901, *Sur les diptères fossiles de la Baltique,* présente le plus vif intérêt, surtout au point de vue de la discussion de la doctrine de l'Évolution. En effet, les diptères minutieusement et très exactement décrits dans ce mémoire semblent constituer des chainons entre certaines formes actuelles et celles qui ont été incluses dans le succin à l'époque tertiaire.

Absolument, comme les premiers mammifères fossiles de l'Éocène trouvés dans les gisements de Pikermi en Grèce et dans ceux du Far-West américain.

Je conclus qu'il y a lieu de publier ce mémoire dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Rapport du R. P. Schmitz. Bien que le P. Schmitz ne reconnaisse pas la moindre portée théorique à ces monographies de raretés isolées, il ne s'oppose pas aux conclusions de M. Proost, premier rapporteur.

Il propose à la Section l'impression du mémoire de M. Meunier et suggère de remplacer le mot " étude „ du titre par " description „.

La section vote l'impression aux ANNALES du travail de M. F. Meunier.

M. Ch. de la Vallée Poussin et le R. P. Schmitz présentent leurs rapports sur une note présentée par M. le chanoine Bourgeat, *Nouvelle contribution à l'étude du glaciaire dans le Jura méridional.*

Rapport de M. de la Vallée Poussin. Cette note tend à établir qu'on peut distinguer dans les Monts Jura, sur les bassins de l'Ain et de la Valserine, les restes d'une double action glaciaire, l'une ayant pour point de départ les Alpes, l'autre descendant des Monts Jura. Les débris charriés par ces glaciers sont d'une distinction aisée, les premiers ayant charrié surtout des roches cristallines et les autres des matériaux calcaires. En appliquant ces données à la distribution des anciennes moraines et des roches de transport de la Valouze, de l'Ain, de la Semine, et de la Valserine, M. Bourgeat a reconnu : 1° l'existence des premiers glaciers du Jura ; 2° l'envahissement du pays par le glaciaire alpin, lequel s'est avancé en contrebas sur les glaciers du Jura ; 3° la présence de glaciers locaux qui ont recouvert le tout. Ses observations étant exactes, le mémoire est intéressant et digne d'insertion dans les Annales.

Je propose aussi la publication, avec réduction, de la planche.

Rapport du R. P. Schmitz. Le P. Schmitz a l'honneur de se rallier aux conclusions de son savant confrère M. le professeur de la Vallée Poussin.

Il se permet seulement d'exprimer le désir de voir le mémoire accompagné d'une planche qui porte plus de détails topographiques.

La Section vote l'impression de la note de M. le chanoine Bourgeat aux Annales.

Le R. P. Bolsius expose à la Section quelques détails de l'anatomie d'une hirudinée, *Helobdella Algira*, relatifs au trajet du sperme pour arriver près des ovules.

Ses recherches personnelles, qui tendaient à compléter les données, encore très incomplètes, de son collègue de Saint-Pétersbourg, M. Alex. Kowalevsky, ont été entravées par la mort subite de ce savant russe. Avec une amabilité au-dessus de tout éloge, Kowalevsky avait promis tous les matériaux désirables, préparés d'après les procédés du P. Bolsius, ainsi que cela avait eu lieu précédemment pour l'*Haementeria costata*. Mais la mort a coupé court à cette bonne volonté. Il est vrai que M. Wlad. Salensky, répondant immédiatement à la demande du P. Bolsius, a eu l'obligeance de lui fournir des matériaux qui se trouvaient dans le laboratoire de leur ami commun ; mais il n'est pas moins vrai que ces matériaux, traités d'autres façons et probablement en vue d'autres recherches, ne donnent jusqu'ici à l'orateur que des résultats absolument insuffisants. Des recherches microscopiques plus favorables devront ainsi être remises à l'heure où il y aura une nouvelle occasion de se procurer les matériaux aptes aux recherches projetées.

Le R. P. Schmitz fait une communication *Sur la genèse de failles d'effondrement dans le terrain houiller.*

Le secrétaire de la Section donne lecture des deux notes suivantes communiquées par M. Proost.

La mouche tsé-tsé. M. le capitaine Charles Lemaire a publié dans la 4^e livraison du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GÉOGRAPHIE D'ANVERS, une série d'observations sur la mouche tsé-tsé dont nous avons reçu plusieurs exemplaires du Transvaal, où l'on sait que sa piqûre est souvent mortelle pour le bétail.

M. Lemaire constate qu'en ce qui concerne les territoires de l'État indépendant du Congo, on ne craint pas cette mouche que les indigènes du Katanga appellent Ki-Zembé. Cependant, d'autres explorateurs ont signalé ses ravages sur bords du Nil Somerset et dans l'Ounyanyembé (*).

Ces observations confirment l'hypothèse que nous avons émise en 1890 à savoir que la décomposition du sang du gros bétail inoculé par cet insecte est due à un microbe, comme le fait a été démontré depuis par des expériences concluantes sur l'origine de la fièvre paludéenne causée par la piqûre des moustiques.

Il y aurait donc lieu d'instituer des expériences analogues sur le tsé-tsé provenant des régions où sa présence empêche l'élevage du bétail, comme en Afrique australe. Rappelons, à ce propos, qu'il existe dans l'Amérique du Sud une mouche analogue qui a dépeuplé certains centres d'élevage, notamment dans l'Uruguay.

(*) M. A. J. Wauters affirme que, grâce aux progrès du défrichement et de la culture et à l'éloignement des animaux sauvages, la *tsé-tsé* a fui l'Ounyanyembé où les troupeaux de bœufs et de moutons sont maintenant nombreux (*De Bruxelles à Karéma*, COLLECTION NATIONALE). Depuis la communication de cette note, M. le professeur Koch, de Berlin, a publié le résultat de ses expériences en Afrique sur l'immunisation du bétail contre la piqûre de la *tsé-tsé*

D'après les observations de Bruce, chirurgien-major, la maladie tsé-tsé est causée par un protozoaire flagellé (genre *Tripanosoma*) inoculé par la trompe de la mouche *(Glossina morsitans)*. Le parasite aurait été rapporté vivant en Angleterre et donne lieu à de nombreuses expériences communiquées au dernier Congrès international tenu à Cambridge. Mais, chose curieuse, *le parasite est souvent introuvable dans le sang virulent.* On le trouve aussi dans la rate, la moelle et les glandes lymphatiques, mais la rate n'est pas toujours malade.

Les animaux sauvages inoculés ne meurent pas, mais la plupart des animaux domestiques succombent à ses atteintes après un temps plus ou moins long.

Bruce prétend avoir démontré que lorsque la mouche n'a sucé que des animaux sains, elle ne propage jamais la maladie.

Ce protozoaire serait très voisin de celui qui détermine dans les Indes la maladie du Surra inoculé par la piqûre du *Tabanus tropicus*.

Bahr-el-Gazal. Ce que le Dr Schweinfurth dit des Schillouks ainsi que des pays et des habitants des régions du Nil moyen et du Bahr-el-Gazal est très vrai en général. Malheureusement, nous écrit M. le commandant Henry, cette région ne paraît habitable que par des races faites pour elles par un long atavisme. Le climat, l'horizontalité et le peu d'élévation du sol au-dessus du niveau des eaux la rendent vraiment particulière. Dans une année normale, en effet, les saisons, qui ne sont qu'au nombre de deux, comptent chacune à peu près exactement six mois consécutifs de sécheresse et de pluie ; de sorte qu'en saison sèche tous les cours d'eau qui n'ont pas leurs sources dans les montagnes du Sud voisines de l'équateur sont secs comme les terres dans lesquelles sont creusés leurs lits. Une immense étendue de terrain est ainsi transformée en un vrai désert où pas une herbe ne pousse ; où le sol, essentiellement argileux, est déchiqueté par de larges et profondes crevasses ; où pas une goutte d'eau n'est à trouver que dans les grandes rivières comme le Nil, le Rhol, le Yei, le Souch.

Pendant la saison des pluies, celles-ci sont si copieuses que le moindre ravin devient un torrent inondant le sol jusqu'à une très grande distance de ses rives ; le terrain plat et argileux maintient à sa surface de grandes plaques stagnantes qui ne disparaissent pour ainsi dire que par évaporation. Comme c'est l'époque des cultures, les indigènes n'ont souvent d'autres ressources que de faire de petites digues émergeant des eaux ou de la vase molle, d'une hauteur suffisante pour pouvoir y planter du sorgho, du millet, du sésame ou du maïs qui, cela va sans dire, poussent avec l'exubérance dont parle Schweinfurth.

En un mot, pendant six mois d'une année normale, le pays est une terre sans eau et pendant les six autres mois une eau sans terre. Ces causes climatériques obligent les indigènes à s'établir de préférence le long des cours d'eau dont j'ai parlé tout à l'heure et entre lesquels les populations qu'on rencontre sont souvent des pasteurs nomades. Il est facile de comprendre que, dans ces conditions, la Providence a façonné l'indigène selon les exigences de la vie qu'il doit mener pour pouvoir habiter ce pays extraordinaire.

Il a de grands pieds pour enfoncer moins facilement dans la vase molle ou les herbes aquatiques, d'immenses jambes pour passer facilement d'un point d'appui à un autre au-dessus d'un bas-fond et un long corps pour atteindre à de grandes profondeurs : Schweinfurth le compare à un héron, ce qui est très juste. Sa taille moyenne est de 1m90 à 2 m.

M. De Wildeman entretient la Section d'une arachide peu connue du Natal et qui a été signalée pour la première fois par le naturaliste français Delegorgue. On trouvera cette communication *in extenso* sous le titre : *A propos du Voandzou et de l'Arachide*, dans la Revue des Questions scientifiques (avril 1902).

La Section vote l'impression aux Annales de deux notes de M. Proost se rapportant à l'excursion faite par les membres le 2 juin 1901 et dont voici les titres : *Insectes lépidoptères, crépusculaires et nocturnes observés ou capturés à Céroux-Mousty le 2 juin 1901; — Liste des champignons observés le 2 juin 1901 dans la région de Céroux-Mousty.*

Considérant qu'il lui est impossible de continuer à s'occuper efficacement de sciences naturelles, d'archéologie, de géographie, etc., sans faire d'excursions sur le terrain ou de visites aux musées, la Section, à l'unanimité des membres présents, émet le vœu : 1° que ces excursions et visites puissent être organisées en dehors des dates fixées pour les séances ordinaires de la *Société scientifique;* 2° que ses membres, qui ont l'honneur de siéger au sein du Conseil, veuillent appuyer les vues de la Section, vues uniquement inspirées par la nécessité de donner à ses travaux l'impulsion qui s'impose et à laquelle on ne saurait se soustraire sans déchoir; 3° que cette question vitale des excursions soit portée par le Conseil de la Société à l'ordre du jour de la session de Pâques, et qu'une modification aux statuts soit proposée en conséquence.

Quatrième section

M. le Dr De Lantsheere expose *Le traitement des plaies perforantes de la cornée et de la sclérotique* lorsqu'elles sont suivies d'une hernie de l'iris.

Les membranes externes blessées sont soulevées simplement, ou l'iris est pris entre les lèvres de la plaie, ou il fait saillie au dehors.

Il faut distinguer la conduite à tenir dans ces trois cas. L'excision de l'iris ne doit être pratiquée que lorsqu'il y a hernie complète de l'iris. Dans les autres circonstances le bandeau et une bonne compression donnent une cicatrisation parfaite sans kerectasie ou staphylôme, et sans inconvénients pour l'avenir. Il faut songer toujours aux petites difficultés de vision qui peuvent résulter de l'existence d'une pupille artificielle, et qui sont en général plus grandes qu'avec une simple déformation pupillaire post-traumatique.

M. le Dr Glorieux présente deux malades intéressants à différents points de vue.

Premier cas. — Voici d'abord une femme de 64 ans atteinte de paralysie agitante et si nous examinons quelque peu attentivement la malade nous ne constatons ni paralysie ni tremblement, au moins actuellement. Bien au contraire, cette femme une fois assise, est d'une immobilité parfaite : on la dirait en bois ou en cire. Sa figure est impassible et ses bras et ses mains restent toujours dans la même attitude : il y a donc chez elle une raideur très grande, raideur qu'on constate manifestement quand elle veut se lever et se mettre en marche. Ses membres opposent même une certaine résistance au déplacement passif.

L'interrogatoire révèle que de temps à autre, à la suite d'une cause émotive, il se produit chez elle un léger tremblement de la main droite; de plus il y a, de la propulsion en avant et parfois de la latéropulsion : tous symptômes existant dans la paralysie agitante, mieux dénommée maladie de Parkinson, puisque les manifestations paralytiques et le tremblement peuvent ne pas exister.

Pour nous le symptôme principal de la maladie de Parkinson est la raideur généralisée, entraînant une espèce d'ankylose ou de soudure des membres, et, consécutivement, l'immobilité du masque de la figure. Cette raideur détermine également les attitudes spéciales des Parkinsonniens et les troubles divers de leur marche.

Mon expérience établit que les malades atteints de maladie de Parkinson ont toujours joui d'une excellente santé, et appartiennent à des familles où la longévité est de tradition.

Quant à leur état mental, je l'ai toujours trouvé excellent. Mes recherches ont porté de ce côté dans tous nos asiles d'aliénés où je n'ai pu en rencontrer aucun cas bien avéré, pas plus que dans mon service à la Policlinique de Bruxelles. Les déments, atteints de paralysie agitante, sont d'après moi de faux déments dont les parents tâchent de se débarrasser en les faisant colloquer, parce que, à la longue, l'existence des Parkinsonniens est une existence très pénible et pour les malades et pour leur entourage.

Quant au traitement, je regrette de devoir dire que rien ne m'a donné de résultats satisfaisants et que l'absence de tout traitement est beaucoup plus salutaire que l'abus de traitements intempestifs, coûteux et souvent inutiles, parfois nuisibles.

Second cas. — J'ai tenu à vous montrer cet homme âgé de 45 ans qui présente des symptômes évidents de tabes : abolition des réflexes rotuliens et achilléens; phénomène d'Argyll Robertson; phénomène de Romberg... A 21 ans cet homme a contracté un chancre induré et a aussitôt pendant 3 mois pris de la liqueur de van Swieten. Il s'est marié à 28 ans et a 5 enfants très bien portants.

Sa femme est très bien portante et n'a jamais eu de fausses couches.

En 1897 (il avait alors 40 ans) il ressent les premières douleurs fulgurantes et commence à observer de la difficulté dans la miction. Depuis près de 3 ans cet homme a une rétention complète d'urine : il doit se sonder régulièrement 2 fois par jour.

Aujourd'hui, malgré la persistance de nombreux symptômes tabétiques qui ne le gênent nullement, tels que ceux précités, cet homme ne se plaint que de rétention d'urine. Il est admirablement bien portant, marche sans difficulté pendant des heures, n'a que très rarement des douleurs fulgurantes.

L'intérêt du cas réside dans la rétention de l'urine, alors que chez la généralité des tabétiques c'est l'incontinence qui les tourmente et il est de plus une preuve en faveur de l'idée que je défends, c'est que le tabes chez les syphilitiques a très souvent une évolution anormale, c'est un tabes fruste qui se distingue nettement du tabes classique.

Cinquième section

M. Vanhoutte lit un travail sur l'*économie nationale et l'économie internationale.* Dans une première partie il montre comment sur les débris du particularisme politique et économique du moyen âge s'édifie lentement, à partir de la fin du XIVe siècle, l'édifice de l'état moderne, et comment s'élabore en même temps un système économique ayant pour base la communauté nationale. L'unification économique fut à la fois l'œuvre des hommes d'état, tels que Charles-Quint, Colbert et Frédéric II et l'œuvre de forces sociales aveugles,telles que les grandes découvertes géographiques et le développement de la technique. L'économie nationale comporte une notion négative, suppression de toutes les entraves à la liberté du travail et à la liberté de la circulation au sein de la nation ; et une notion positive, création et développement au sein de la nation de toutes les industries reconnues d'utilité publique. M. Vanhoutte rappelle à cet égard quelques traits de la politique économique de Napoléon Ier et montre comment par les formes extérieures, par les douanes et par l'interventionisme croissant de l'État, nous paraissons toujours nous trouver en pleine période d'économie nationale. Cependant — et c'est la seconde partie du travail de M. Vanhoutte — à l'heure actuelle toutes nos pensées et tous nos actes économiques se relient au tissu complexe du marché international : résultat naturel du développement des moyens de transport et de communication, du développement du machinisme, de l'augmentation du capital-argent et de l'organisation plus solide du crédit qui s'en est suivie. Le libre-échange en Angleterre, les traités de commerce dans les autres pays d'Europe, les unions monétaires, l'union postale, l'unification toujours plus grande du système des poids et des mesures, l'ouverture des colonies, les grandes entreprises internationales, d'autres faits et d'autres institutions indiquent que nous sommes entrés de plain pied dans une période d'économie internationale. Le retour au protectionnisme de ces vingt-cinq dernières années peut donner le change à l'observateur. Désormais la concurrence se fera entre continents, comme elle se faisait il y a deux cents ans entre nations.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale se tient à 2 h. 1/2, à l'Hôtel Ravenstein, sous la présidence de M. A. Proost, Directeur général de l'Agriculture, et Président de la *Société scientifique* pour l'année 1901-1902.

M. Proost donne la parole à M. Heymans, Professeur à l'Université de Gand, qui fait une conférence sur la *Tuberculose*.

Voici un résumé de cette conférence.

L'effrayante mortalité que détermine la tuberculose, émeut enfin les particuliers, la société, les pouvoirs publics; tous les efforts tendent à enrayer ce fléau.

La tuberculose revêt des formes multiples, et s'attaque à tous les âges de la vie : l'enfant paye tribut à la méningite tuberculeuse, puis aux tuberculoses ganglionnaires, articulaires, osseuses : l'adulte à la phtisie pulmonaire, qui ne respecte pas même le vieillard. Ces diverses modalités de la maladie figurent pour 1/5 voire 1/4 du chiffre total, dans les statistiques de mortalité. (D'autre part, les pertes subies par les agriculteurs du chef de tuberculose bovine se chiffrent par des sommes considérables.)

L'identification des divers états morbides qu'on vient d'énumérer, date du jour où l'on reconnut leur nature infectieuse, et surtout leur cause. Villemin prouva la contagiosité de la tuberculose ; Koch isola et décrivit le premier (1882) l'agent spécifique de ces infections, le bacille qui porte son nom.

C'est un microbe en bâtonnet, à développement lent, aérobie, se cultivant de préférence sur sérum solidifié, pomme de terre et bouillon glycériné. Il se colore difficilement, et se décolore mal, ce qui en rend la recherche facile dans les tissus.

L'envahissement de l'organisme, en un point quelconque, par le bacille de Koch, donne lieu à la formation d'une tumeur infectieuse caractéristique : le tubercule. Il se compose des bacilles envahisseurs, des cellules progressivement envahies, et de globules blancs du sang (phagocytes) accourus pour défendre l'organisme. Le sort final du tubercule, le plus souvent, est la fonte purulente ; ce pus est riche en bacilles, prêts à se cantonner en un autre point du même organisme, ou à envahir un autre individu et y recommencer leur mortelle évolution.

L'infection tuberculeuse, partie d'un point quelconque du corps, peut se transplanter et se généraliser, par la voie lymphatique ou par la voie sanguine.

Les toxines sécrétées par les microbes spécifiques empoisonnent l'individu d'une manière progressive, car ce sont elles les grandes coupables. Mais si elles provoquent la mort, elles peuvent ailleurs déterminer aussi la réaction salutaire de l'immunisation.

C'est sur celle-ci que Koch avait fondé ses espérances, lorsqu'en 1890, au congrès de Berlin, il exposa ses recherches sur la tuberculine et ses propriétés prétendûment curatives. A cet instant d'immense espoir succéda une cruelle déception. Koch se remit au travail, et en 1896 il publia ses recherches sur la tuberculine O et la tuberculine R : les résultats des nouveaux essais ne furent guère meilleurs. En août dernier Koch fit à Londres sa sensationnelle communication sur la non-identité des tuberculoses bovine et humaine ; ses affirmations furent combattues par Lister, Nocard, Bang ; et depuis, Thomas, Delepine, Nocard et Arloing ont institué des expériences dont les résultats sont apparemment différents de ceux qu'aurait obtenus Koch. Vers la fin de novembre dernier, celui-ci recommande l'injection intra-veineuse — non plus des tuberculines de 1890, 1896 et 1897 — mais d'une émulsion de bacilles triturés.

En présence de ces tâtonnements et de ces divergences, quel traitement peut-on opposer, en somme, à la tuberculose, à l'heure qu'il est ?

Tout d'abord, la destruction préventive des bacilles — aussi bien de ceux des animaux que de ceux de l'homme — s'impose ; cette désinfection prophylactique est liée aux progrès de l'hygiène générale, et ceux-ci, bien que réels, sont lents, car ils dépendent de multiples facteurs économiques et sociaux. Ensuite, l'amélioration du terrain ; fortifions l'organisme, afin d'augmenter sa résistance aux causes morbides.

Mais si ce traitement hygiéno-diététique seul est mis en œuvre la rétrocession du fléau sera lente.

Une voie plus rapide, et de plus universelle efficacité, serait la découverte d'un remède réel de la tuberculose. Que d'essais — jusqu'ici vains — ont été tentés en ce sens !

Mais l'empirisme, le hasard, et surtout l'expérimentation rationnelle, qui nous ont armés de véritables spécifiques pour diverses affections, les efforts patients des milliers de travailleurs de nos laboratoires, nous mettront peut-être un jour en possession du remède rêvé, susceptible de tuer plus ou moins vite le bacille ou de neutraliser au moins ses poisons.

Sera-ce un vaccin ? une antitoxine ? Les tentatives paraissent ne pas manquer dans ce sens, et le commerce offre contre espèces sonnantes de multiples tuberculines, oxytuberculine, tuberculol, tuberculocidine, sérums antituberculeux, etc.

Le contrôle de leur efficacité est possible ; la tuberculose humaine peut être reproduite expérimentalement chez des animaux divers, et tout remède efficace chez l'homme, paraît devoir agir aussi chez eux. C'est la marche classique à suivre dans ce genre d'études. Or jusqu'ici l'action vraiment curative contre la tuberculose ne nous paraît expérimentalement démontrée pour aucun remède.

C'est pourtant la seule voie au bout de laquelle nous attend, peut-être, le succès.

Un échange de vues s'établit entre le conférencier et plusieurs des médecins qui assistaient à la réunion.

M. Mansion parle ensuite de l'utilité d'une langue scientifique universelle auxiliaire, surtout pour les peuples slaves dont les recherches sont si peu connues en Occident. Le grec au début de l'ère chrétienne, le latin ensuite jusqu'au XVII^e^ siècle et même au XVIII^e^, le français enfin, ont servi au monde civilisé de langue scientifique commune. Une langue artificielle comme le volapük, l'esperanto, etc., déjà très utiles comme langues commerciales internationales, pourrait peut-être, à côté des grandes langues modernes et du latin, rendre service à la science.

Après une discussion sommaire, l'assemblée remet au Conseil le soin de présenter, à la session de Pâques, des conclusions pratiques relatives à l'adhésion éventuelle de la Société scientifique au programme de la Délégation pour l'adoption d'une langue internationale.

Le président déclare close la session de janvier 1902.

SESSION DES 8, 9 ET 10 AVRIL 1902

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Jeudi 10 avril 1902. La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : M. Cousin,
Vice-Présidents : MM. E. Pasquier,
J. Neuberg,
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

La section remet au concours la question suivante déjà proposée en 1899 : *Rendre rigoureuse et étendre au cas où le module est imaginaire la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions thêta exposée dans les* Fundamenta *de Jacobi en recourant le moins possible à la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire* (Délai jusqu'au 1er octobre 1903).

M. Mansion fait la communication suivante : *La géométrie projective est-elle indépendante de la géométrie métrique?*

C'est à tort, selon nous, que Von Staudt et ses continuateurs (*) ont répondu affirmativement à cette question.

(*) Dans une note antérieure (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXV, 1re partie, p. 144), nous avons dit par erreur : “ *Von Staudt a établi les principes de la géométrie projective, indépendamment du postulatum d'Euclide* „. Il fallait dire : *les continuateurs de Von Staudt* (Klein, Pasch, Veronese, etc.) *ont établi*, etc.

[illegible] - 26 Fasc. 3.

I. Dans son *Essai sur les fondements de la Géométrie* (édition française. pp. 159-162). Russell fait remarquer que l'on peut déduire toute la géométrie projective du théorème suivant : *Si deux triangles* ABC. DEF *situés dans deux plans différents sont tels que* AD, BE, CF *se rencontrent en un point* O, *les côtés* AB *et* DE, BC *et* EF, CA *et* FD *se coupent en trois points* L, M, N *situés sur la droite d'intersection des plans* ABC, DEF *et réciproquement.* La démonstration de ce théorème est facile en géométrie riemanienne où deux droites d'un plan se rencontrent toujours et où deux plans se coupent toujours. Mais en géométrie euclidienne, on doit considérer de plus le cas où les plans ABC. DEF sont parallèles et celui où les droites AD. BE, CF, sont parallèles; autrement dit, on doit pouvoir supposer à l'infini la droite LMN, ou bien le point O. En géométrie lobatchefskienne, on doit aussi considérer les cas où la droite LMN ou bien O est à l'infini; en outre, on doit examiner celui où LMN est une droite *idéale,* ou bien celui où O est un point *idéal*, c'est-à-dire les cas où ABC, DEF ont une normale commune, et où AD, BE, CF sont perpendiculaires à un même plan. On ne peut donc démontrer le théorème fondamental de la géométrie projective de la manière indiquée plus haut, sans faire la distinction des trois branches de la métagéométrie, distinction qui appartient à la géométrie métrique. La géométrie projective n'est donc pas indépendante de la géométrie métrique, quand on la base sur le théorème énoncé plus haut.

II. M. Fr. Schur a publié sur les bases de la géométrie projective un article remarquable (MATHEMATISCHE ANNALEN, 1891, t. XXXIX, pp. 113-124), spécialement loué par M. F. Klein dans son rapport sur le prix Lobatchefsky (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE DE KAZAN, 1897). La démonstration du théorème fondamental de M. Schur (pp. 115-117) ne diffère pas essentiellement de celle qui est reproduite par M. Russell ; mais l'auteur effectue toutes les constructions dont il a besoin *dans un espace limité*, où les droites considérées dans un plan et les plans considérés dans l'espace se rencontrent toujours. Les éléments géométriques (points, droites, plans) inaccessibles, c'est-à-dire situés en dehors de cet espace limité, sont regardés comme des *éléments improprement dits* (l'auteur les appelle *idéaux);* leur définition et leurs propriétés sont établies artificiellement comme celles des points à l'infini, idéaux ou imaginaires de la géométrie métrique euclidienne ou non-euclidienne.

On peut objecter à cette démonstration, d'abord qu'elle repose sur trois axiomes ou postulats dont la compatibilité avec la notion d'espace limité n'est pas établie (*); ensuite, très probablement, la distinction des trois géométries s'introduit fatalement, qu'on le veuille ou non, quand on définit (pp. 121 et 123), les éléments inaccessibles; enfin et surtout, la notion même d'un *espace limité* est un emprunt fait à la géométrie métrique : le mot *limité*, comme les termes *illimité* ou *infini* n'appartiennent pas à la langue de la géométrie projective (**).

Nous concluons donc que *la géométrie projective n'est pas indépendante de la géométrie métrique.*

M. Dutordoir présente à la section un mémoire de M. L. de Locht-Labye intitulé : *Section plane de l'hyperboloïde défini par ses trois directrices rectilignes dont l'une est verticale et les deux autres horizontales.* Sont nommés commissaires pour examiner ce travail MM. Goedseels et Le Paige.

M. Mansion est nommé commissaire pour examiner un travail du R. P. Bosmans, S. J. sur deux lettres inédites de M. Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne.

(*) 1. Deux points accessibles déterminent une droite accessible. 2. Trois points accessibles déterminent un plan accessible; toute droite qui a deux points accessibles communs avec ce plan y est contenue. 3. Chaque plan accessible divise l'espace accessible en deux parties telles que toute droite joignant un point accessible de l'une des parties à un point accessible de l'autre, rencontre le plan en un point intermédiaire entre les deux premiers (pp. 114-115).

(**) Voici la fin de l'article de M. Schur d'où il semble résulter qu'il ne s'occupe pas de géométrie projective non-euclidienne : " Hiermit ist nun in aller Vollständigkeit bewiesen, dass, wenn man sich auf die Betrachtung eines endliches Raumstückes beschränkt, bei Adjunction der idealen Elemente die Fundamente der projectiven Geometrie denselben allgemeinen Character erhalten, wie *bei Voraussetzung des Parallelenaxioms* durch Adjunction der sogenannten unendlich fernen Elemente " (p. 224). — En géométrie lobatchetskienne, comme l'on sait, on doit considérer d'autres éléments que ceux qui sont à distance finie ou infinie.

M. Dutordoir fait une communication *sur l'intégration des fractions rationnelles :* il montre comment on peut obtenir l'intégrale de ces expressions sans déterminer les zéros (supposés simples) du dénominateur, par l'emploi de la théorie des fractions symétriques. — M. Mansion fait remarquer à cette occasion que dans le cas de zéros multiples imaginaires, il y a grand avantage à effectuer l'intégration des fractions rationnelles correspondantes en laissant les dénominateurs sous forme imaginaire, au lieu de réunir préalablement deux à deux les fractions rationnelles simples conjuguées.

M. Mansion fait une communication *sur une intégrale considérée en calcul des probabilités.* Le procédé de calcul est le même que celui que l'auteur a employé pour démontrer le théorème de Jacques Bernoulli. Cette note sera imprimée à la suite de la démonstration de ce théorème dans la seconde partie des ANNALES.

M. Goedseels expose le principe d'une note *sur la méthode de Cauchy* où il montre que cette méthode peut s'appliquer dans la théorie des moindres carrés. La section vote l'impression de cette note dans la seconde partie des ANNALES.

M. Mansion lit une courte notice historique *sur la découverte de la géométrie non-euclidienne par Jean Bolyai.*

M. P. Stäckel a publié dans un recueil hongrois (MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN, t. XVII, 1901) quelques renseignements nouveaux sur la découverte de la géométrie non-euclidienne par Jean Bolyai. Les voici en substance :

1. Gauss n'a rien communiqué de ses vues sur la géométrie à Wolfgang Bolyai, père de Jean, ni, par suite, à celui-ci. C'est Wolfgang qui, *sans le vouloir,* a excité Jean à étudier la question du postulatum que lui-même avait inutilement tenté de résoudre pendant toute sa vie, en se rendant vraiment malheureux par cette recherche obstinée et sans succès.

2. Jean Bolyai s'est occupé de la question du postulatum avec acharnement pendant son séjour à la K. K. Ingenieur-Akademie de Vienne (1817-1822). Il essaya d'abord en vain de prouver que l'équidistante d'une droite est une droite; puis, sous l'influence d'un ami, Karl Szász (1798-1853), il étudia dans le même but la

courbe qu'il appelait paracycle, c'est-à-dire le cercle de rayon infini (horicycle de Lobatchefsky) dont il reconnut les relations avec la question du postulatum. Enfin, en 1833, il découvrit la relation fondamentale $\text{Ch}\, a \cos \alpha = 1$, entre une longueur a et l'angle d'asymptotisme α correspondant, c'est-à-dire la clef de toute la géométrie non-euclidienne. Il communiqua sa découverte à son père le 3 novembre 1823. Il fit ensuite un exposé de l'ensemble de ses recherches, en hongrois, pour son professeur de la K. K. Ingenieur-Akademie, J. W. von Eckwehr (1789-1857), en 1825 ou 1826. Il écrivit enfin le célèbre *Appendix* latin qui les contenait sous une forme définitive, et l'envoya en 1829 à son père. Gauss le reçut, imprimé, en 1832.

3. Pendant les recherches de son fils, Wolfgang Bolyai n'a cessé de l'engager à ne pas les continuer; quand Jean eut réussi, il n'en vit pas la portée. En 1835, il écrivait encore à Gauss, que lui, Wolfgang, ne pouvait démontrer la compatibilité ni l'incompatibilité du postulatum avec les autres axiomes d'Euclide. Gauss reconnut immédiatement, dans des lettres à Wolfgang Bolyai et à Gerling, la haute valeur des découvertes de Jean Bolyai; mais il eut le tort de ne rien publier à l'honneur du fils de son vieil ami, bien qu'il eût maintes fois analysé dans les recueils de l'Académie de Goettingue, des écrits sans valeur sur la théorie des parallèles.

Deuxième section

Mardi 8 avril 1902. La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : M. A. de Hemptinne,
Vice-Présidents : M. Louis Henry,
Le R. P. Schaffers, S. J.,
Secrétaire : Le R. P. Lucas, S. J.

M. A. de Hemptinne fait une communication relative à l'*Action de la lumière sur la conductibilité électrique des diélectriques liquides.* En voici un résumé :

Lorsqu'on veut étudier l'influence de la lumière sur la conductibilité électrique des substances peu conductrices, il faut, pour se trouver dans les conditions les plus favorables, réaliser deux points : 1° avoir une section conductrice aussi grande que possible; 2° opérer avec une couche de substance très mince; de cette façon si l'action de la lumière ne se fait sentir qu'à une faible profondeur du corps, elle exercera son influence sur une section qui n'est pas une trop petite fraction de la section totale.

On réalise ces conditions de la manière suivante : sur une plaque en verre, fig. 1, on colle une feuille d'or très mince comme celles employées par les doreurs; lorsque la feuille est bien adhérente à la plaque, au moyen de la pointe très fine d'un canif on y trace une ligne en zigzag comme l'indique la figure 1; la feuille d'or est ainsi séparée en deux plages A et B que l'on relie au moyen de pinces appropriées et de fils à un circuit comprenant un galvanomètre et des piles. La confection de semblables plaques présente une certaine difficulté; les feuilles d'or très minces sont difficiles à manier et à coller sur le verre, on y parvient pourtant plus ou moins facilement de la manière suivante : on enduit la surface du verre d'une mince couche de colle, ou même simplement on la mouille avec un peu d'eau.

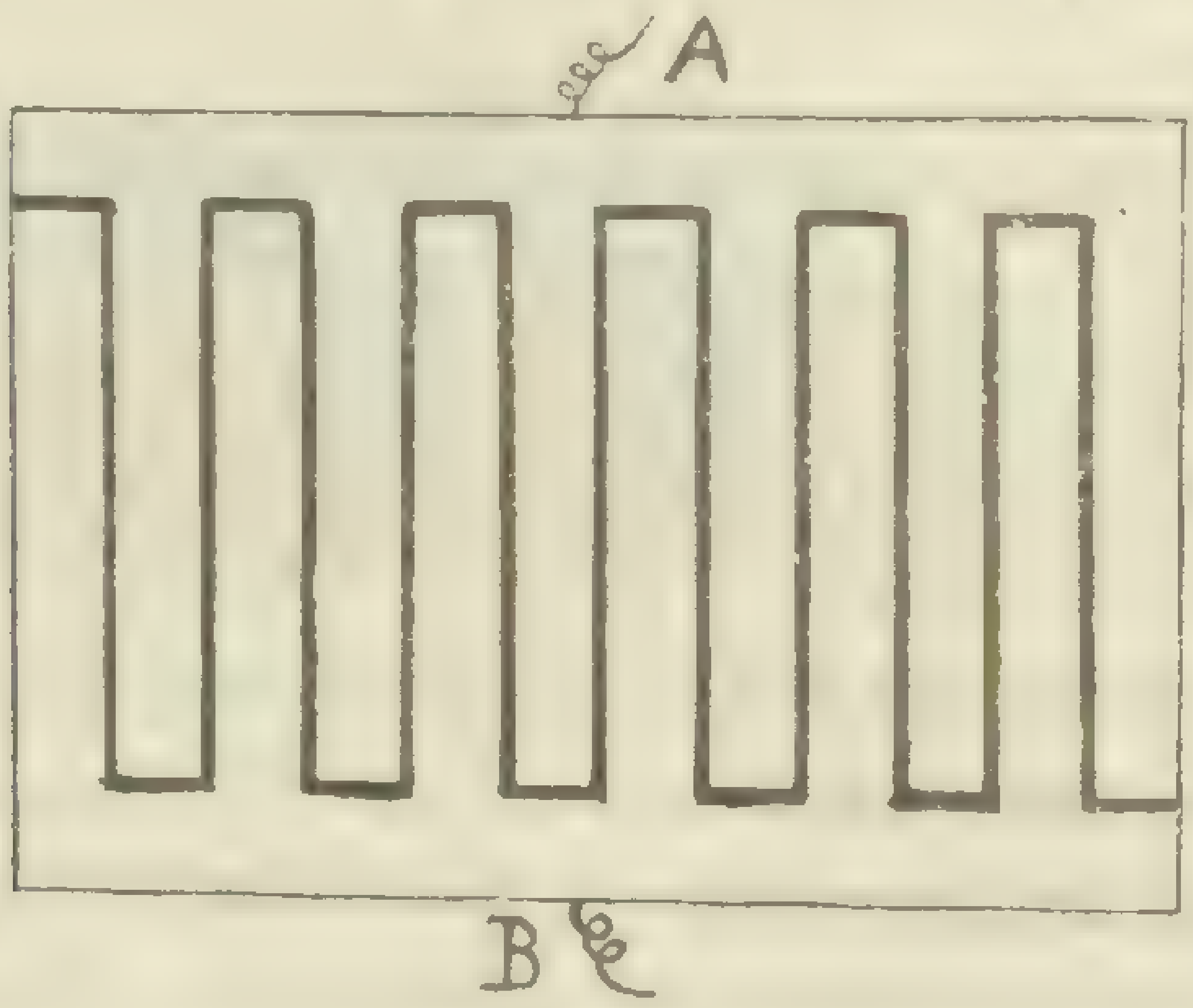


Fig. 1.

On place ensuite une feuille d'or sur une plaque en verre A (fig. 2), bien sèche, de manière à n'avoir aucune adhérence; la figure 2 donne la vue d'une section de côté du système de plaques supposées perpendiculaires au plan du papier; l'un des côtés de la feuille d'or vient en D tout à fait au bord de la plaque en verre A et même dépasse un peu ce bord; on approche ensuite la plaque mouillée B en l'inclinant comme l'indique la figure, et l'on établit en C un contact avec la feuille d'or qui, sous l'influence des forces capillaires vient se coller d'elle-même sur B. Après avoir laissé sécher la plaque pendant un temps assez long on y trace la ligne comme nous l'avons indiqué précédemment; il est prudent de passer plusieurs fois la pointe du canif dans la fente afin d'être certain que les deux plages sont bien séparées et de vérifier si pour un courant électrique de 100 volts on ne constate pas de conductibilité.

Pour nous assurer de l'efficacité de la disposition décrite plus haut nous avons fait quelques expériences avec du sélenium. Dans la ligne faite au moyen du canif, nous avons mis de la poudre de sélénium, recouvert le tout d'une plaque en verre et chauffé ensuite dans l'étuve jusqu'à 150° environ; nous avons placé la plaque ainsi obtenue dans le circuit formé par un galvanomètre, un interrupteur et un élément Leclanché, la plaque elle-même était placée dans une boîte de manière à être soustraite à l'action de la lumière; dans ces conditions, en appuyant sur l'interrupteur nous avons constaté au galvanomètre un déplacement de 20 divisions; ce déplacement est devenu 60 lorsque la plaque était éclairée par une lampe électrique de 16 bougies, placée à 50 centimètres. La disposition que nous venons de décrire est donc très favorable.

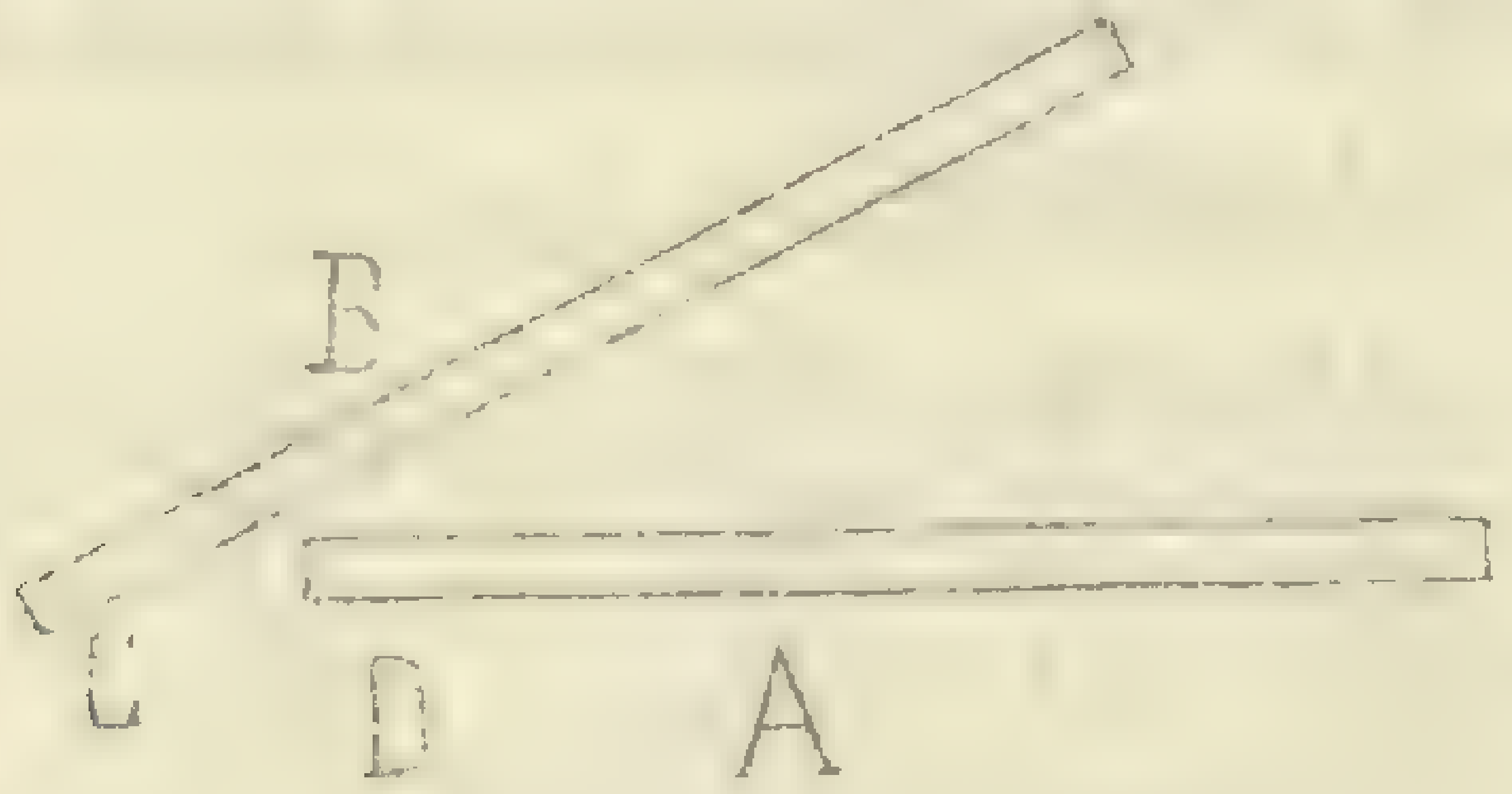


Fig. 2.

Nous avons préparé quelques plaques avec feuille d'or, et mis dans la fente différents liquides tels que de l'alcool, du sulfure de carbone, du chloroforme, de l'huile, de l'eau, nous avons constaté un déplacement très sensible au galvanomètre en employant un voltage de 90 volts; ce déplacement n'a pas varié en opérant dans l'obscurité, à la lumière du jour, ou sous l'action d'une lumière intense comme celle du magnésium.

L'action de la lumière sur la conductibilité électrique des diélectriques liquides semble donc nulle.

M. Louis Henry s'occupe du *déplacement de l'oxygène dans les chaînes carbonées normales* - C - C - C . . . . . C - C - C -, *au point de vue de la volatilité.* Voici le résumé de sa communication.

Il a fait voir autrefois (*), autant que les faits alors connus le permettaient, que le déplacement de O remplaçant H_2 d'un chaînon $> CH_2$ dans un hydrocarbure normal $H_3C - (CH_2)_n - CH_3$, n'influe pas ou faiblement sur la volatilité du composé acétonique qui résulte de cette substitution. C'est à partir de l'étage C_5, que se pose réellement la question.

$H_3C - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3$	Éb. 37°
$H_3C - CO - CH_2 - CH_2 - CH_3$	Éb. > 102°-103°.
$H_3C - CH_2 - CO - CH_2 - CH_3$	Éb.

Il a constaté en même temps qu'il n'en est plus ainsi, alors que l'hydrocarbure a subi une substitution antérieure et notamment une substitution oxygénée.

$H_3C - CO - CH_2 - CH_2 - CH_3$	Éb. 102°
$H_3C - CO - CO - CH_2 - CH_3$	Éb. 108°
$H_3C - CO - CH_2 - CO - CH_3$	Éb. 138°

M. Louis Henry rappelle à cette occasion le principe général que depuis longtemps il s'efforce de démontrer expérimentalement, à savoir que l' “ *accumulation des radicaux négatifs en un point des molécules carbonées constitue pour celles-ci une cause puissante de volatilité* ”.

On ne peut pas aller bien loin dans cet ordre d'idées en s'occupant des dérivés *acétoniques* des *hydrocarbures normaux eux-mêmes* $H_3C - (CH_2)_n - CH_3$. Mais il est deux catégories de composés qui offrent sous ce rapport plus de ressources. Ce sont :

(*) Bull. de l'Acad. royale de Belgique, t. XIX, 3e série, p. 339 (année 1890).

a) D'abord les *éthers simples des alcools normaux mono-atomiques* supérieurs, quelque peu carbonés, de la formule générale $H_3C - (CH_2)_n - CH_2 - O - CH_2 - (CH_2)_n - CH_3$;

b) ensuite les *éthers simples formés par les glycols normaux* $(HO)CH_2 - (CH_2)_n - CH_2(OH)$ *avec les alcools mono-atomiques normaux poly-carbonés* $H_3C - (CH_2)_n - CH_2(OH)$.

M. Louis Henry choisit dans chacun de ces groupes un composé comme exemple.

1° *Éthers simples des alcools normaux.* Il envisage les dérivés oxygénés de l'*oxyde de propyle normal et primaire.*

$H_3C - CH_2 - CH_2 - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$ Éb. 91°

Dérivés mono-oxygénés

$H_3C - CH_2 - CO - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$ Éb. 122°
$H_3C - CO - CH_2 - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$ 145° (*)

Dérivés bi-oxygénés

$H_3C - CH_2 - CO - O - CO - CH_2 - CH_3$ Éb. 168°
$H_3C - CO - CO - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$ 166° (**)
$H_3C - CH_2 - CO - O - CH_2 - CO - CH_3$ 187° (***)
$H_3C - CO - CH_2 - O - CH_2 - CO - CH_3$ 196° (IV).

2° *Éthers simples de glycols normaux.* Il s'occupe du *glycol triméthylénique bi-éthyl-oxylé.*

$H_3C - CH_2 - O - CH_2 - CH_2 - CH_2 - O - CH_2 - CH_3$ Éb. 140°

(*) Ce corps résulte de l'hydratation de l'*oxyde de propargyle-propyle* $HC \equiv CH - CH_2 - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$, par l'eau, en présence de $HgBr_2$.

(**) Produit de l'action directe de l'acide pyruvique $CH_3 - CO - CO(OH)$ sur l'alcool propylique.

(***) Produit de l'action de l'*acétone monochlorée* $CH_3 - CO - CH_2 - Cl$ sur le *propionate* potassique $CH_3 - CH_2 - CO(OK)$.

(IV) Ce corps se forme en même temps que l'*acétol* $H_3C - CO - CH_2(OH)$ dans l'action de $CH_3(OH)$ sur le *formiate* $H_3C - CO - CH_2(CHO_2)$. C'est un solide cristallin, fusible à 131°.

Dérivés mono-oxygénés

$H_3C-CO-O-CH_2-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_3$ Éb. 175°
$H_3C-CH_2-O-CO-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_3$ 172°

Dérivés bi-oxygénés

$H_3C-CH_2-O-CH_2-CO-CH_2-O-CH_2-CH_3$ Éb. 195°
$H_3C-CH_2-O-CO-CH_2-CO-O-CH_2-CH_3$ 198°
$H_3C-CO-O-CH_2-CH_2-CH_2-O-CO-CH_3$ 210°

On aperçoit parfaitement bien par la comparaison de ces divers composés la relation intime qu'il y a entre la *volatilité* et la position relative des groupements CO dans la molécule, par rapport à eux-mêmes ou par rapport à O central.

Le P. Thirion résume l'*histoire du problème de la pression de la lumière*. On trouvera le texte de cette communication dans la Revue des Questions scientifiques, troisième série, t. I, pp. 595-607.

Mercredi 9 avril 1902. La section adopte la question de concours suivante :

On demande de nouvelles recherches concernant la relation qui existe entre la pression extérieure et la transformation des corps solides en liquides et en gaz (Délai jusqu'au 1er octobre 1903).

Le P. Thirion fait quelques remarques élémentaires à propos d'*optique géométrique*. En voici un résumé.

I. *Théorie du prisme : déviation minimum.* — Les formules du prisme sont

$$\sin i = n \sin r \tag{1}$$
$$\sin i' = n \sin r' \tag{2}$$
$$A = r + r' \tag{3}$$
$$\Delta = \pm (i + i' - A). \tag{4}$$

On doit prendre le signe + ou le signe — dans le second membre de la formule (4), suivant que n est plus grand ou plus petit que l'unité. Supposons $n > 1$.

En combinant (1) et (2) par addition et par soustraction, et en tenant compte de (3) et (4), on a

$$\sin\frac{\Delta+A}{2} = n\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-i'}{2}} \tag{5}$$

$$\cos\frac{\Delta+A}{2} = n\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{r-r'}{2}}{\sin\frac{i-i'}{2}}. \tag{6}$$

Les angles $\frac{\Delta+A}{2}$ et $\frac{A}{2}$ sont inférieurs à 90°, et toutes ces formules sont symétriques : on peut y changer i en i' en même temps que r en r'.

L'équation (5) montre que $\sin\frac{\Delta+A}{2}$ et, par suite, la déviation Δ, est minimum quand le facteur, toujours positif,

$$\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-i'}{2}}$$

est minimum. Ce facteur vaut 1 pour $i = i'$, et, par suite, $r = r'$: on le vérifie directement. Or il est plus grand que 1 pour i plus grand et pour i plus petit que i'. En effet, soit $i > i'$ et, par suite, $r > r'$; l'équation (6) nous donne

$$\frac{\sin\frac{r-r'}{2}}{\sin\frac{i-i'}{2}} < 1$$

donc

$$\frac{i-i'}{2} > \frac{r-r'}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-i'}{2}} > 1.$$

La démonstration s'applique d'elle-même, grâce à la symétrie des formules, au cas où $i < i'$; et un raisonnement analogue conduit au même résultat quand $n < 1$.

Les conditions du minimum de la déviation sont donc $i = i'$ et, par suite, $r = r'$. Quand n est plus grand que 1, on a, en désignant par δ la déviation minimum,

$$\sin \frac{\delta + A}{2} = n \sin \frac{A}{2} \tag{7}$$

en même temps que

$$i = i' = \frac{\delta + A}{2} \qquad \text{et} \qquad r = r' = \frac{A}{2}.$$

Si l'on désigne par λ l'*angle limite* défini par la relation

$$\sin \lambda = \frac{1}{n},$$

la condition d'émergence est $\frac{A}{2} < \lambda$. Le rayon de déviation minimum fait partie du faisceau émergent ainsi défini puisque l'on a, pour ce rayon, $r' = \frac{A}{2}$ et, par suite, $r' < \lambda$. La formule (7) fournit donc un moyen *pratique* et *avantageux* pour déterminer n en mesurant A et δ.

Certains traités font remarquer que pour $i = 0$ les formules du prisme donnent

$$\sin (\Delta + A) = n \sin A \tag{8}$$

et ils ajoutent que cette formule fournit aussi le moyen de déterminer n. Cette observation est sans portée : 1° le rayon d'incidence $i = 0$ ne fait partie du faisceau émergent que si on a $A < \lambda$; 2° en supposant qu'il émerge et qu'on veuille l'utiliser pour la détermination de n, on perdrait l'avantage pratique que fournit la propriété de la déviation de passer par un minimum. Ainsi la formule (8) n'est pas toujours *applicable;* quand elle l'est, elle n'est pas *avantageuse;* le moyen qu'elle fournit pour déterminer n est donc purement théorique.

II. *Miroirs sphériques.* — Soit un miroir sphérique que nous supposerons concave, pour fixer les idées. Appelons C son centre de courbure, A son centre de figure ; CA sera son axe principal. Un point lumineux P placé *n'importe où,* devant le miroir, a pour axe secondaire PCA'; soit α l'angle ACA'. Un rayon lumineux *quelconque* parti de P, rencontre le miroir en un point I, et le rayon réfléchi correspondant coupe l'axe secondaire PCA' en P'. Soient ω l'angle ICA, β l'azimut du plan d'incidence ou l'angle plan du dièdre ICAA', formé par l'intersection du plan des axes, CA et CA', et du plan des rayons PI et IP' qui contient la normale IC. Posons PC $= m$, P'C $= m'$, IC $=$ R. Menons au point I, dans le plan d'incidence, la tangente IT à la surface du miroir, T étant le point où cette tangente coupe l'axe secondaire PCA'. On a

$$\frac{m}{m'} = \frac{m + \mathrm{TC}}{\mathrm{TC} - m'}$$

ou

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = \frac{2}{\mathrm{TC}}.$$

D'autre part, le triangle rectangle CIT donne

$$\mathrm{TC} = \frac{\mathrm{R}}{\cos \mathrm{ICT}}$$

et le trièdre dont le sommet est C et les arêtes CI, CA, CA' fournit la relation

$$\cos \mathrm{ICT} = \cos\alpha \cos\omega + \sin\alpha \sin\omega \cos\beta.$$

On a donc

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = \frac{2\,[\cos\alpha \cos\omega + \sin\alpha \sin\omega \cos\beta]}{\mathrm{R}}.$$

Cette formule est absolument générale. Elle montre que les aberrations tiennent à trois chefs : à l'*ouverture* du miroir, par l'angle ω, c'est l'*aberration de sphéricité;* à l'*inclinaison* de l'axe du faisceau incident, par α, et à l'*azimut* du plan d'incident, par β, c'est l'*astigmatisme.*

Cas particuliers. — Si le point P est situé *sur l'axe principal*, $\alpha = 0$, et on a *rigoureusement :*

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = \frac{2 \cos \omega}{R}$$

l'astigmatisme disparaît complètement, l'aberration de sphéricité subsiste seule. Cette formule permet de calculer les éléments de l'aberration principale.

Si le miroir est de *petite ouverture* et, en même temps, si l'axe du faisceau incident est *peu incliné* sur l'axe principal, on a *approximativement*

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = \frac{2 \cos \omega \cos \alpha}{R}$$

le terme $\sin \alpha \sin \omega \cos \beta$ étant *très petit* relativement au terme $\cos \omega \cos \alpha$.

Si, α restant *petit*, l'ouverture du miroir devient *très petite*, on a *approximativement*

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = \frac{2 \cos \alpha}{R}$$

formule que l'on peut écrire

$$\frac{1}{m' \cos \alpha} - \frac{1}{m \cos \alpha} = \frac{2}{R}.$$

Sous cette forme, on voit qu'une *petite* droite, perpendiculaire à l'axe principal d'un miroir de *très petite* ouverture, a pour image une droite perpendiculaire au même axe. D'où la notion de *plans conjugués.*

Enfin, si l'ouverture du miroir est *très petite* et si, en même temps, l'inclinaison de l'axe du faisceau incident est *très faible* on a *approximativement*

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = \frac{2}{R}$$

formule que l'on peut écrire de différentes façons en choisissant convenablement l'origine à partir de laquelle on fixe les positions du point P et de son conjugué P'.

III. *Réfraction à travers une surface sphérique.* — En procédant comme on vient de le faire pour le miroir sphérique, on arrive à une formule générale analogue pour la réfraction à travers une surface sphérique. On peut d'ailleurs traiter les deux cas simultanément. En désignant par i l'angle d'incidence et par r l'angle de *déviation,* on trouve

$$\frac{\operatorname{tang} r}{m'} + \frac{\operatorname{tang} i}{m} = \frac{\operatorname{tang} i - \operatorname{tang} r}{R} (\cos \omega \cos \alpha + \sin \omega \sin \alpha \cos \beta).$$

Suivant qu'il s'agit de la réflexion ou de la réfraction, on joint à cette formule la condition $i = -r$ ou $\sin i = n \sin r$.

M. Louis Henry s'occupe encore de *la volatilité dans les composés carbonés.* Voici le résumé de cette seconde communication :

Il rappelle d'abord le principe général qu'il a formulé et démontré antérieurement, concernant la relation qui existe entre la volatilité des composés carbonés et la positive relative des éléments ou radicaux négatifs qu'ils renferment. Ce principe est que " *l'accumulation des radicaux négatifs en un point des molécules carbonées constitue pour celles-ci une cause puissante de volatilité.* „

Elle dépend, quant à son intensité, de la nature de ces radicaux, de leur nombre individuel, enfin de leur degré de rapprochement dans la molécule.

Elle est à son maximum d'intensité, toutes choses égales d'ailleurs, alors que ces radicaux sont fixés sur le même atome de carbone. Elle s'exerce encore, quoique plus faiblement, alors qu'ils sont fixés sur des atomes de carbone distincts, mais directement unis l'un à l'autre, sans intermédiaire. Elle s'affaiblit rapidement par un écartement plus considérable : parfois l'interposition d'un seul atome de carbone, fréquemment l'interposition de deux ou de trois atomes de cet élément entre les systèmes actifs CXX' et CX"X' etc. suffit à la faire disparaître totalement ou presque totalement.

Cette influence peut être assez puissante pour renverser la relation normale de volatilité que l'on observe entre un dérivé hydrogéné et *ses dérivés de substitution.* M. Louis Henry cite à cette occasion ces quelques exemples remarquables.

a) Oxygène et oxygène

H_4C	(*) Éb.	— 152°5 p. 749 m.	> + 130°
$H_2C = O$		— 23°	> — 57°
$O = C = O$		— 80°	

b) Oxygène et chlore

$H_2C\ Cl_2$	Éb.	+ 42°	> — 34°
$O\ C\ Cl_2$		8°	

Dérivés de l'éthane C_2H_6

$H_3C - CH_2\ Cl$	Éb.	12°	> + 40°
$H_3C - CO\ Cl$		52°	
$Cl\ H_2C - CH_2\ Cl$		84°	> + 22°
$Cl\ H_2C - CO\ Cl$		106°	
$Cl_2\ HC - CH_2\ Cl$		114°	> — 6°
$Cl_2\ HC - CO\ Cl$		108°	
$Cl_3\ C - CH_2\ Cl$		130°-135°	> — 12° à — 17°
$Cl_3\ C - CO\ Cl$		118°	

c) Azote et azote

$H_3C - CH_3$	(**) Éb.	— 85° p. 749 m.	> + 167°
$H_3C - CN$		+ 82°	> — 103°
$NC - CN$		— 21°	

d) Azote et chlore

$H_3C - CN$	Éb.	82°	> + 42°
$Cl\ H_2C - CN$		124°	> — 10°
$Cl_2\ HC - CN$		114°	> — 30°
$Cl_3C - CN$		84°	

(*) Ladenburg et Krügel.
(**) Idem.

e) Azote et oxygène

$H_3C - CH_2(OC_2H_5)$	Éb.	35°	> + 42°
$H_3C - CO(OC_2H_5)$		77°	
$NC - CH_2(OC_2H_5)$		135°	> — 20°
$NC - CO(OC_2H_5)$		115°	

f) Azote chlore et oxygène

$H_3C - CO - CH_3$	Éb.	56°	> + 37°
$H_3C - CO - CN$		93°	
$Cl_3C - CO - CH_3$		172°	> — 50°
$Cl_3C - CO - CN$		122°	

g) Chlore et NO_2

$H_2C - Cl_2$	Éb.	42°	> + 33°
$Cl_2C - Cl_2$		75°	
$H_2C < \begin{matrix} Cl \\ NO_2 \end{matrix}$		122°	> — 10°
$Cl_2C < \begin{matrix} Cl \\ NO_2 \end{matrix}$		112°	

On dit qu'il n'y a pas de règle sans exception et l'on dit aussi que les exceptions confirment la règle. Ces deux propositions se vérifient d'une manière intéressante en ce qui concerne la doctrine formulée par M. L. Henry au sujet de la volatilité des composés carbonés. Il s'occupe spécialement des *composés poly-oxygénés* dont certains constituent des exceptions apparentes à son principe général.

Ces composés sont les suivants :

a) les *anhydrides des acides gras* $(C_nH_{2n+1} - CO)O$. Leur caractère exceptionnel, quant à la volatilité, apparaît quand on les rattache aux éthers simples correspondants.

Voici ce qu'il en est de l'*anhydride acétique*, le plus simple d'entr'eux.

$H_3C - CH_2 - O - CH_2 - CH_3$	Éb.	35°	> + 42°
$H_3C - CO - O - CH_2 - CH_3$		77°	> + 60°
$H_3C - CO - O - CO - CH_3$		137°	

Conformément aux principes généraux, il devrait exister un écart de volatilité moins considérable entre l'anhydride acétique et l'acétate d'éthyle qu'entre celui-ci et l'éther ordinaire (*).

M. Louis Henry fait remarquer en passant que ces différences s'affaiblissent à mesure que l'on s'élève dans l'échelle de carburation.

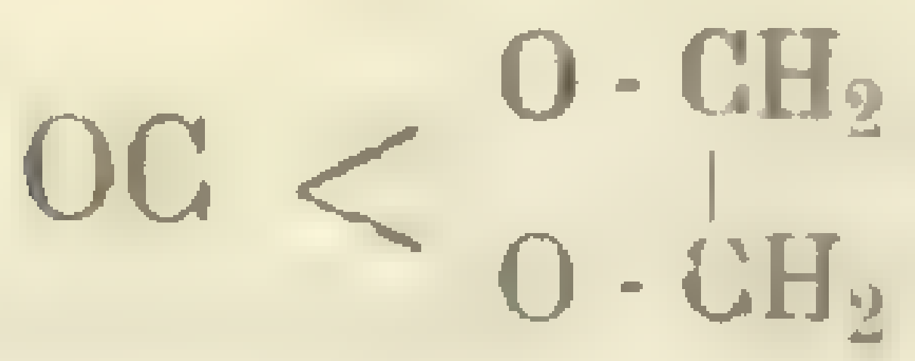
b) Certains *dérivés bi-oxygénés* des éthers simples des *glycols* avec les alcools mono-valents.

M. Henry attire spécialement l'attention sur certains dérivés du *glycol éthylénique, bi-éthyl-oxylé.*

	$H_3C-CH_2-O-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_3$	Éb. 123°
α)	$H_3C-CO-O-CH_2-CH_2-O-CO-CH_3$	186°
β)	$H_3C-CH_2-O-CO-CO-O-CH_2-CH_3$	186°

On sait combien est puissante l'influence qu'exerce sur la volatilité le voisinage immédiat des groupements CO. A ce titre, l'*oxalate d'éthyle* β devrait avoir un point d'ébullition moins élevé que son isomère le diacétate d'éthylène α.

c) M. Henry signale en dernier lieu les *carbonates des radicaux glycolliques* C_nH_{2n} et notamment le *carbonate d'éthylène*



$$OC < \begin{matrix} O-CH_2 \\ | \\ O-CH_2 \end{matrix}$$

Solide cristallin fus. 38°-39°. Éb. 236°.

Pour apprécier ce que présente d'exceptionnel ce composé, il est nécessaire de le rapprocher d'autres composés *méthyléniques* et *carboniques.*

(*) Il est intéressant de comparer, au point de vue de la *volatilité*, par rapport à l'*eau* considérée comme composé primordial, les dérivés *éthyliques* CH_3-CH_2- avec les dérivés *acétiques* correspondants CH_3-CO-

Dérivés *éthyliques*

$H-O-H$	Éb. 100°	
H_3C-CH_2-O-H	78°	> — 12°
$H_3C-CH_2-O-CH_2-CH_3$	35°	> — 43°

Dérivés *acétiques*

$H-O-H$	Éb. 100°	
$CH_3-CO-O-H$	116°	> + 16°
$CH_3-CO-O-CO-CH_3$	137°	> + 21°

a) Dérivés méthyléniques

$$\left.\begin{array}{ll} H_2C < \begin{matrix} O.CH_3 \\ O.CH_3 \end{matrix} & \text{Éb. } + 42^\circ \\ H_2C < \begin{matrix} O.CH_2 \\ | \\ O.CH_2 \end{matrix} & \text{Éb. } + 78^\circ \end{array}\right> + 36^\circ$$

b) Dérivés carboniques

$$\begin{array}{ll} OC < \begin{matrix} O\ CH_3 \\ O\ CH_3 \end{matrix} & \text{Éb. } \quad 91^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} OC < \begin{matrix} O.CH_2 \\ | \\ O.CH_2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 91^\circ + 36^\circ \\ 127^\circ \end{matrix}\right> \text{par analogie} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} H_2C < \begin{matrix} O\ CH_3 \\ O\ CH_3 \end{matrix} & + 42^\circ \\ OC < \begin{matrix} O\ CH_3 \\ O\ CH_3 \end{matrix} & + 91^\circ \end{array}\right> 49^\circ$$

$$\begin{array}{ll} OC < \begin{matrix} O.CH_2 \\ | \\ O.CH_2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 78^\circ + 49^\circ \\ 127^\circ \end{matrix}\right> \text{par analogie.} \end{array}$$

On voit ainsi que le point d'ébullition du *carbonate d'éthylène* est, selon l'analogie, trop élevé. Si l'on tient compte de l'existence dans sa molécule du système *fortement oxygéné* $OC < \begin{smallmatrix} O\text{-} \\ O\text{-} \end{smallmatrix}$ on peut dire que ce point d'ébullition est *beaucoup trop élevé,* comparativement.

Ces exceptions au principe général n'existent qu'en apparence.

Il faut d'abord tenir compte de ce fait que les formules représentatives des corps qui constituent ces exemptions

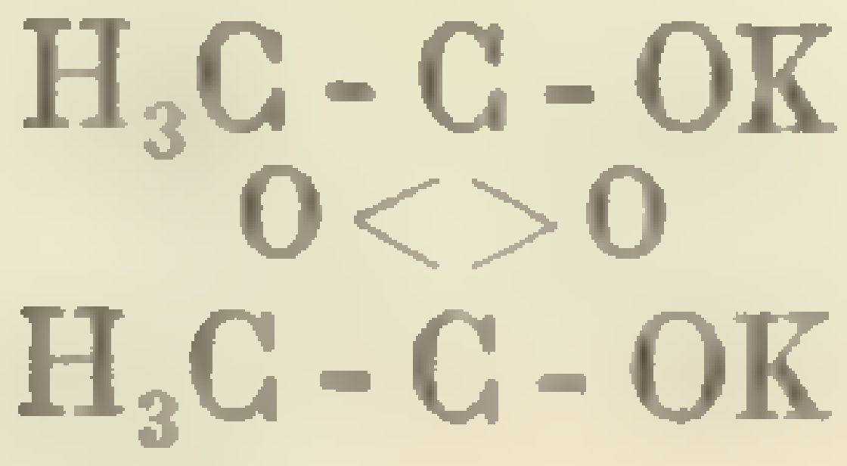
$$H_3C\text{-}CO\text{-}O\text{-}CO\text{-}CH_3$$
$$H_3C\text{-}CH_2\text{-}O\text{-}CO\text{-}CO\text{-}O\text{-}CH_2\text{-}CH_3$$
$$OC < \begin{matrix} O\text{-}CH_2 \\ | \\ O\text{-}CH_2 \end{matrix}$$

ne sont vraies et réelles que pour l'état gazeux auxquelles elles s'appliquent exclusivement.

M. Henry considère d'abord l'*anhydrique acétique*. Si l'on tient compte de son mode de formation, chlorure d'acétyle sur acétate potassique, on est autorisé à attribuer à ce corps une formule moléculaire au moins double de la formule ordinaire

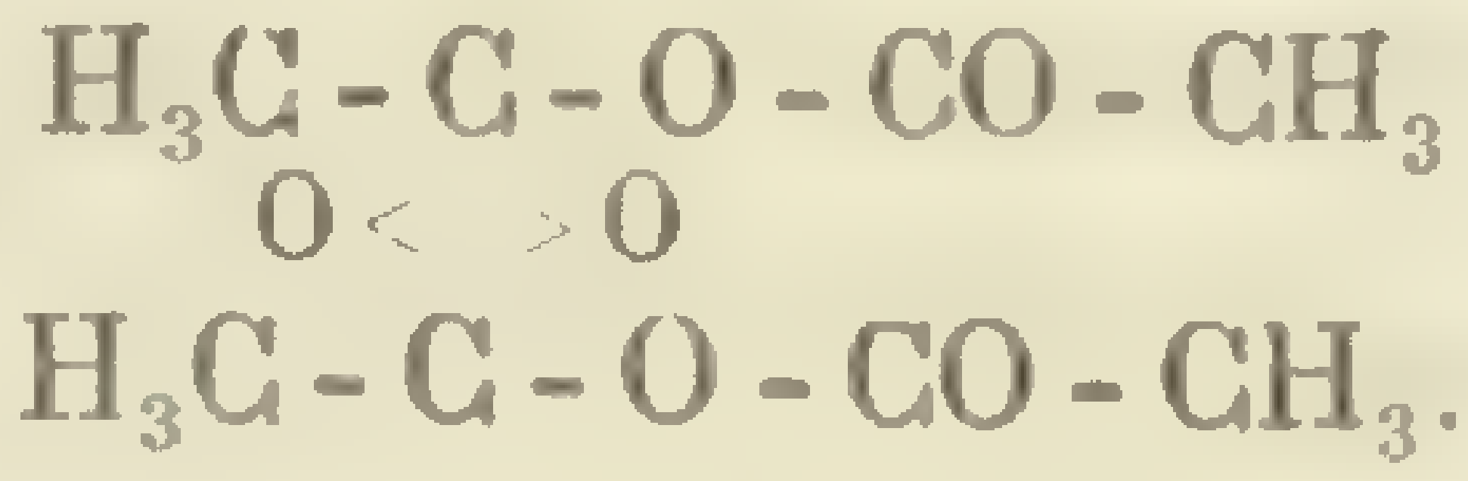
$$H_3C - CO - O - CO - CH_3$$

qui représente sa molécule gazeuse. L'acétate potassique est au moins



$$\begin{array}{c} H_3C - C - OK \\ O < > O \\ H_3C - C - OK \end{array}$$

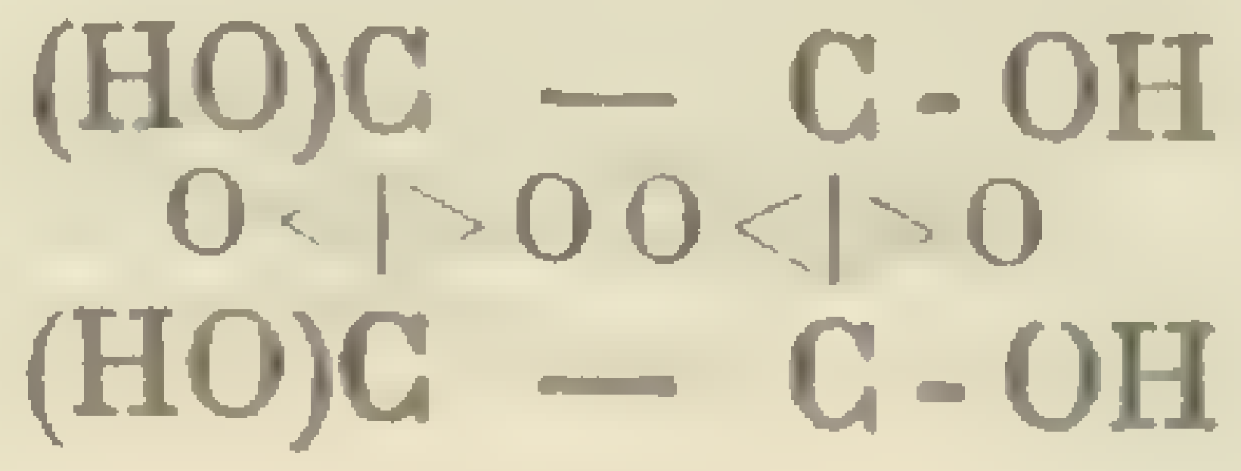
et l'anhydride acétique est au moins



$$\begin{array}{c} H_3C - C - O - CO - CH_3 \\ O < \quad > O \\ H_3C - C - O - CO - CH_3. \end{array}$$

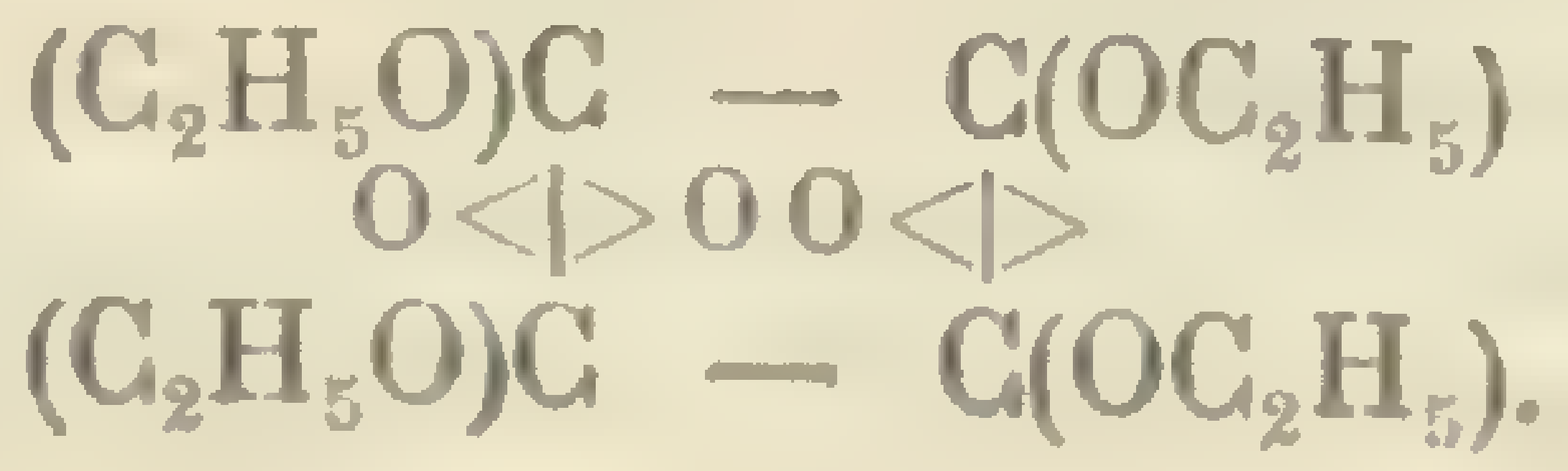
L'anhydride acétique n'est pas moléculairement comparable à l'acétate d'éthyle. Le chiffre 137° représente le point thermométrique où cette molécule poly-oxygénée, complexe, devient, en prenant l'état gazeux, comparable à l'éther acétique. Loin d'être une exemption, l'anhydride acétique devient ainsi un exemple remarquable de la *puissance volatilisante* de l'accumulation de l'oxygène dans une molécule carbonée.

Les mêmes considérations sont en tous points applicables à l'*oxalate d'éthyle* $CH_3 - CH_2 - O - CO - CO - O - CH_2 - CH_3$. Éb. 186°. Le véritable *acide oxalique* est $(HO)_3C - C(OH)_3$ l'acide oxalique cristallisé dans l'eau. L'acide oxalique sec $\substack{(HO)\\ O} > C - C < \substack{(HO)\\ O}$ doit être au moins



$$\begin{array}{c} (HO)C \;-\; C - OH \\ O < | > O \; O < | > O \\ (HO)C \;-\; C - OH \end{array}$$

et son éther éthylique



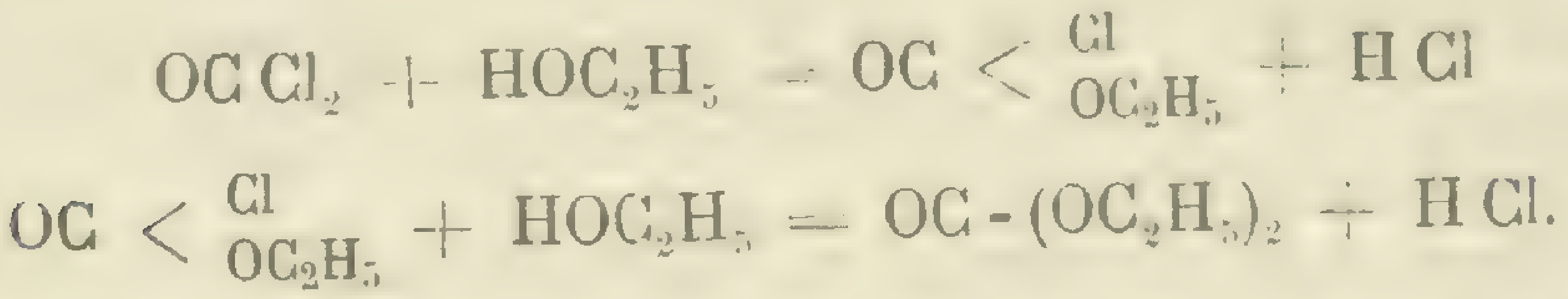
$$\begin{array}{c} (C_2H_5O)C \;-\; C(OC_2H_5) \\ O < | > O \; O < | > \\ (C_2H_5O)C \;-\; C(OC_2H_5). \end{array}$$

La température 186° est celle où cette molécule complexe prend, en devenant gazeuse la forme moléculaire

$$CH_3-CH_2-O-CO-CO-O-CH_2-CH_3.$$

Le principe reste donc sauf.

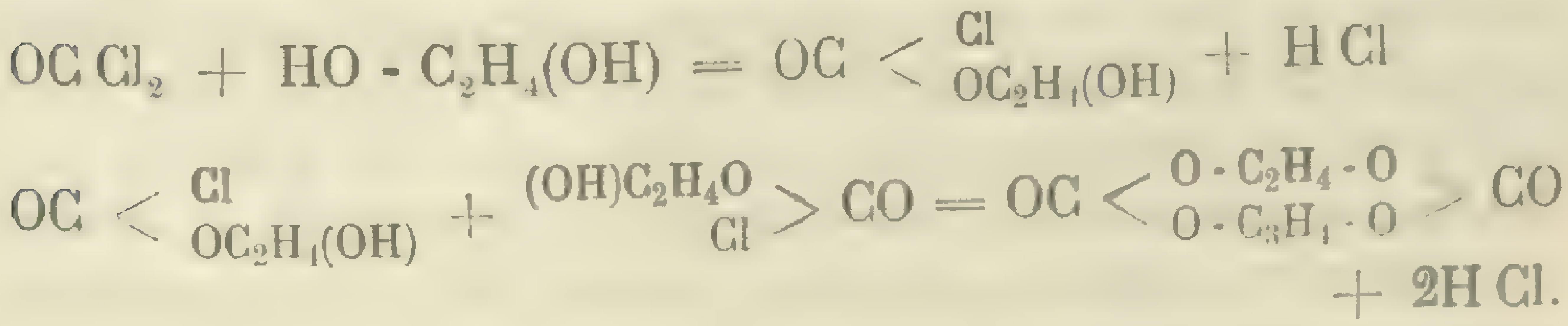
Enfin en ce qui concerne le *carbonate d'éthylène* $OC < \begin{matrix} O-CH_2 \\ | \\ O-CH_2 \end{matrix}$, M. Henry fait voir aussi que si l'on tient compte du mode de formation de ce composé, sa formule moléculaire doit être au moins doublée. La réaction de $OCCl_2$ sur les alcools s'effectue en effet en deux temps :



$$OCCl_2 + HOC_2H_5 = OC < \begin{matrix} Cl \\ OC_2H_5 \end{matrix} + HCl$$

$$OC < \begin{matrix} Cl \\ OC_2H_5 \end{matrix} + HOC_2H_5 = OC-(OC_2H_5)_2 + HCl.$$

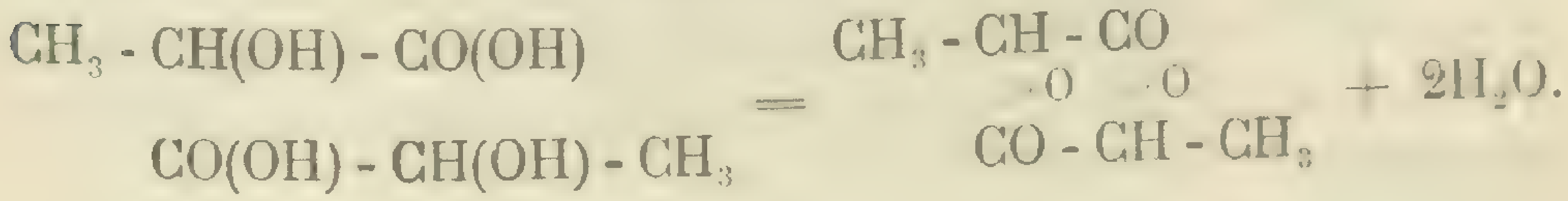
Avec le *glycol éthylénique,* on a successivement dans cet ordre d'idées



$$OCCl_2 + HO-C_2H_4(OH) = OC < \begin{matrix} Cl \\ OC_2H_4(OH) \end{matrix} + HCl$$

$$OC < \begin{matrix} Cl \\ OC_2H_4(OH) \end{matrix} + \begin{matrix} (OH)C_2H_4O \\ Cl \end{matrix} > CO = OC < \begin{matrix} O-C_2H_4-O \\ O-C_2H_4-O \end{matrix} > CO + 2HCl.$$

M. Henry rappelle à cette occasion, par l'exemple de l'éthérification solitaire de l'acide lactique, qu'il a fait voir que ces sortes de réactions se passent entre deux molécules distinctes, réagissant doublement l'une sur l'autre.



$$\begin{matrix} CH_3-CH(OH)-CO(OH) \\ CO(OH)-CH(OH)-CH_3 \end{matrix} = \begin{matrix} CH_3-CH-CO \\ O \quad O \\ CO-CH-CH_3 \end{matrix} + 2H_2O.$$

La densité de vapeur du *carbonate d'éthylène* n'a d'ailleurs pas été déterminée, et en ce moment, la formule attribuée à ce composé n'a la valeur que d'une *formule minimum,* comme celle des carbonates $\overset{''}{R}CO_3$ de la chimie minérale.

M. Henry se propose de soumettre à une nouvelle étude, au point de vue de la détermination de leurs poids moléculaires, les composés dont il vient de s'occuper.

A cette occasion, M. Louis Henry attire une fois encore l'attention sur la véritable signification des *formules chimiques* employées pour représenter les corps composés.

Parmi ces formules, les *unes* ne sont que des *formules minima* qui ne renseignent en rien sur le poids et la grandeur véritables des molécules chimiques.

Quant aux *formules moléculaires,* ce sont des formules pour l'état gazeux. Les formules actuellement en usage et exclusivement en usage sont donc insuffisantes à divers points de vue :

a) Elles ne nous renseignent pas sur l'*état moléculaire* des corps solides ou liquides, incapables de prendre l'état gazeux, soit directement soit indirectement.

b) Elles ne nous renseignent pas sur l'état moléculaire des corps gazéifiables, considérés à l'état *liquide* et à l'état *solide.*

L'emploi indistinct, simultané, sans avertissement, des formules *minima* et des formules *moléculaires* établit des relations artificielles, en dehors de toute réalité, entre des corps qui n'en ont point. De là et de l'absence de formules moléculaires pour l'état solide et l'état liquide naissent des difficultés qui n'ont au fond aucune raison d'être, des exceptions apparentes au milieu desquelles les analogies naturelles s'évanouissent ou ne se retrouvent que difficilement.

Si l'on se place au point de vue moléculaire, on est autorisé, selon M. Louis Henry, à regarder le phénomène de l'*ébullition* comme un acte tout à la fois *mécanique* et *chimique, a) mécanique* ou *physique* en ce sens qu'il constitue un acte de désagrégation particulaire, *b) chimique* en ce sens qu'il constitue une véritable décomposition accompagnée de modifications dans les rapports de combinaison des éléments hétérogènes constitutifs de la molécule gazeuse.

Cette décomposition moléculaire peut être *totale* ou *partielle* à la température de l'ébullition, *totale* en ce sens qu'elle ne fournit que des molécules gazeuses, *partielle* en ce sens que la transformation de la masse en celles-ci n'est qu'incomplète.

Le fait de cette décomposition dans son intensité ou son étendue, est fortement influencé par la température et la pression extérieure.

M. Henry se propose de revenir dans la suite, à l'occasion de divers cas particuliers, sur ces considérations qui font, dit-il, depuis longtemps l'objet de ses méditations et de ses études expérimentales.

Le R. P. Schaffers entretient la section de l'enquête du D^r Karl T. Fischer sur l'enseignement de la physique et de la chimie en Angleterre. On trouvera le résumé de cet entretien dans l'analyse du livre *Der Naturwissenschaftliche Unterricht in England insbesondere in Physik und Chemie,* von D^r Karl T. Fischer, Leipzig, 1901, par le P. Schaffers dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, troisième série, t. II, juillet 1902.

Cette communication donne lieu à un échange de vues entre les membres présents de la section.

Le P. Lucas présente à la section l'*Interrupteur de G. Contremoulins* pour bobines d'induction et expose la *méthode métroradioscopique* du même auteur. Cette communication paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Troisième section

Mardi 8 avril 1902. Il est procédé au renouvellement du bureau Sont élus :

Président :	M. l'abbé MAURICE LEFEBVRE ;
Vice-Présidents :	Le R. P. BOLSIUS, S. J. ;
	M. le C^te DOMET DE VORGES ;
Secrétaire :	M. F. VAN ORTROY.

La section propose comme sujet de concours : *La poterie à l'époque de l'âge de la pierre* (Délai jusqu'au 1^er octobre 1903).

Le R. P. Van den Gheyn fait connaître le récent ouvrage de M. A.-H. Keane : *The Gold of Ophir. Whence brought and by Whom?* Londres, 1901. Le savant professeur de Londres pense qu'Ophir est l'*emporium* appelé par les Grecs *Moscha* et par les Romains *Portus nobilis*. Ophir était le marché de l'or extrait d'Havilah et Havilah, c'est la Rhodhésie. Tout en rendant hommage à l'érudition dont témoigne le livre de M. Keane, le R. P. Van den Gheyn ne pense pas que la démonstration de sa thèse dépasse les limites de la conjecture plausible (*).

Le secrétaire communique, au nom de M. J.-H. Fabre, un travail intitulé *Les Halictes*. La section propose la publication de cette étude dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. On le trouvera dans la livraison du 20 juillet 1902.

Le secrétaire communique également, au nom de M. le M^{is} de Nadaillac, un mémoire intitulé *L'âge du cuivre*. La section en propose aussi l'impression dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. On le trouvera dans la même livraison du 20 juillet 1902.

Mercredi 9 avril 1902. Le R. P. Bolsius, S. J., fait la communication suivante : *Antoni van Leeuwenhoek premier révélateur du noyau cellulaire en 1682 et 1685.*

Les revendications de priorité, si fréquentes dans la littérature scientifique, sont quelquefois empreintes d'un caractère très personnel, ou relatives à des faits d'importance secondaire. Celle que nous essayons, dans cette note, s'inspire uniquement du respect de la vérité historique, bien que nous n'ayons pas à taire l'intérêt que nous trouverions, à titre de hollandais, à en voir reconnaître le bien-fondé; elle a pour objet une découverte dont l'importance en morphologie cellulaire ne saurait être contestée.

Par deux passages de la correspondance d'Antoni van Leeuwenhoek, nous croyons être en mesure d'établir que ce patriarche de la Microscopie a observé et décrit le noyau de la cellule de 1682, quelque cent ans avant Fontana à qui cette découverte est généralement attribuée.

Les deux documents dont nous parlons se trouvent dans un recueil comprenant vingt-cinq lettres de Leeuwenhoek, imprimés

---

(*) Voir un compte rendu détaillé de l'ouvrage de M. Keane dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, avril 1902.

du vivant de l'auteur en langue hollandaise et dont les dates s'échelonnent entre le 25 avril 1679 et le 10 juillet 1686 (*). Nous les traduirons aussi fidèlement qu'il nous sera possible, en les accompagnant, comme pièce justificative, du texte original.

Voici d'abord un passage ayant trait à un type de cellule animale, l'hématie des poissons. Nous le rencontrons dans une lettre du 3 mars 1682, écrite à la Société royale de Londres et directement adressée à son secrétaire, le célèbre Robert Hooke. Il est piquant de trouver ainsi associés les noms de deux micrographes dont l'un est historiquement lié à l'introduction du nom même de la cellule, et dont l'autre nous paraît mériter au même titre d'être rattaché à la première observation du noyau.

« Delft, en Hollande, le 3 mars 1682.

Écrit à la Royale Société à Londres, et envoyé à M. Robert Hooke, secrétaire de la même Société.

...... Après avoir examiné avec admiration les nombreuses fibres musculaires de la queue d'un bœuf, je me proposais d'observer la queue d'une Raie, mais en sectionnant cette queue, le sang se présenta, sortant de la queue : observant celui-ci il me parut remarquable que ses particules, lesquelles chez l'Homme et les animaux (mammifères) sont des globules qui rendent le sang rouge, fussent ici toutes des particules aplaties, ovales, qui avaient peu d'épaisseur, nageant dans une matière hyaline, et (qui) là où elles étaient très clairsemées n'avaient point de couleur, mais présentaient déjà la couleur rouge là où elles étaient entassées trois ou quatre. Ceci m'engagea à observer le sang du Cabillaud et du Saumon, que je trouvai également ne contenir à peu près que des particules ovales; et quoique je misse la plus grande exactitude à les observer je ne pus reconnaître de quelles parties ces particules sanguines se composaient; *car quelques-unes me semblaient contenir, dans un petit espace intérieur, un globule,* et à une petite distance du globule il y avait un anneau transparent. et puis, autour de cet anneau, un pourtour de plus en plus obscur qui formait la

---

(*) *Ontledingen en Ontdekkingen... vervat in verscheyde Brieven, Geschreven aaun* (sic!) *de Wyt-vermaarde Koninglijke Wetenschap-zoekende Societeit, tot Londen in Engeland Door* Antoni van Leeuwenhoek, 1686.

circonférence du corps ovale et que j'ai indiqué quelque peu dans la fig. 5; mais dans d'autres je voyais 3, 4, 5, 6 et même jusqu'à 8 globules beaucoup plus petits que le premier globule... Plus tard je pris dans mon comptoir (laboratoire) le foie d'un saumon et j'examinai immédiatement le sang que je prenais dans les vaisseaux sanguins; mais je ne pus remarquer aucune différence dans les particules sanguines (*) „.

On conviendra que cette description de l'hématie des poissons est d'une exactitude étonnante, eu égard à l'époque. Van Leeuwenhoek a parfaitement remarqué la forme ovalaire qui la caractérise, à l'encontre de celle de l'homme et de la grande majorité des mammifères — les “ animaux „ de l'auteur. — Il en décrit la région externe telle qu'on la voit en réalité pour une certaine mise au point, comme s'obscurcissant vers le bord externe et s'éclaircis-

---

(*) **Delft in Holland den 3. Maart 1682.**

Geschreven
Aan de Koninglijke Societeit in *Londen*
ende gezonde aan de *Heer*
Robert Hooke,
Secretaris van deselve Societeit.

...... Na dat ik met verwondering de menigvuldige vleesmusculen van de staart van een Os hadde besigtigt, nam ik voor de staart van een Rog te observeren, doch in het doorsnijden van deselve staart, quam mij te voren het bloed dat uit de staart quam : dit observerende, quam het mij vreemt te voren, dat de deelen van het bloed, dat in Menschen en Dieren globulen zijn, en het bloed root maken, hier altemaal platte ovale deeltjens waren, die weijnig dikte hadden, drijvende door een cristaline materie, en daar deze ovale deeltjens seer enkel lagen, hadden deselvige geen couleur, maar als die 3. à 4. dik op malkander lagen, vertoonden al eene roode couleur. Dit dede mij observeren het bloed van Cabbeljaauw en Salm, die ik insgelijks bij na niet anders en bevond te bestaan, als uit ovale figuurtjens; en hoe nauwkeurig ik deselve ook trachte te observeren, soo koude ik niet bekennen uit wat deelen dese ovale bloed-deeltjens bestonden; want eenige schenen mij *van binnen in een spatie besloten te hebben, een rond bolletje of globule*, en een weinig spatie van het bolletje, lag om het bolletje een heldere ring, en dan weder om deselve ring een langsaam schaduwende ommetrek, die de circumferentie van het ovaal maakten, en die ik eenigsints met Fig 5. heb aangewezen, en in andere sag ik 3. 4. 5. 6. ja ook wel 8 globulen, veel kleiner dan het eerste globule... Naderhand heb ik de lever van de Salm op mijn Comptoir genomen, en soo aanstonts het bloed, dat ik uit de bloed-vaten nam, geobserveert; maar in de bloed-deelen geen onderscheid konnen zien.

sant vers l'intérieur, où elle passe à une zone transparente au milieu de laquelle apparaît un *corps spécial, de forme arrondie.* N'est-il pas de toute évidence qu'il s'agit du *noyau?*

Ne négligeons pas le détail ajouté par van Leeuwenhoek, savoir que certaines *particules sanguines* lui ont montré, au lieu d'un globule unique mais volumineux, des globules multiples, beaucoup plus petits. Il se pourrait bien que cette apparence, manifestement anormale et qu'il ne retrouve plus quand il examine le sang de saumon immédiatement après son extraction des vaisseaux, tînt à une altération; il ne faut pas perdre de vue, en effet, que l'observation n'était pas faite avec les précautions minutieuses de la technique actuelle. Ces globules multiples constituaient une différence gênante pour l'appréciation de la véritable structure de la *particule sanguine.* Mais il n'en demeure pas moins manifeste que le globule unique, c'est-à-dire le noyau cellulaire, a été vu et décrit par le célèbre observateur. Sa figure 5 à laquelle il renvoie ne laisse aucun doute sur ce point fondamental.

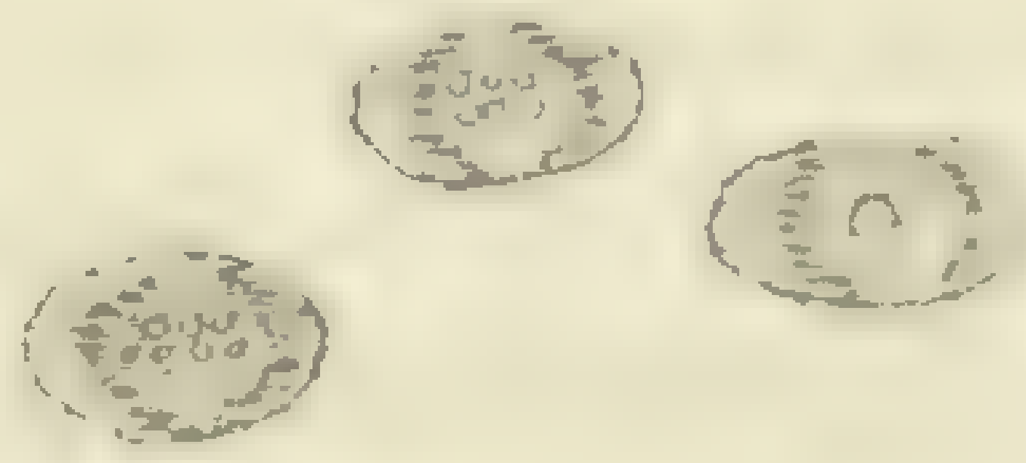


Fig. 5.

Essayons de montrer que Leeuwenhoek a signalé également le **noyau dans un type de cellule végétale.**

Nous nous appuierons sur une lettre du 13 juillet 1685, adressée comme la précédente à la Société royale de Londres.

“ **Delft en Hollande, le 13 juillet 1685.**

Très nobles, très savants et très illustres seigneurs, Messieurs **de la Roy. Soc. à Londres.**

Dans ma dernière lettre j'ai traité de la propagation des animaux et j'y ai mentionné en passant que dans la semence des arbres on peut voir le commencement des feuilles et de la racine. Ayant, depuis, examiné la semence d'un frêne, il m'a paru bon de vous envoyer quelques-unes de mes observations et de mes considérations sur la propagation des arbres; d'autant plus que non seulement j'ai découvert dans la dite semence deux feuilles bien grandes; et encore parce que la portion qui deviendra la racine m'a paru excessivement grande, j'ai fendu la dite semence... Puis, non seulement j'ai vu que les dites feuilles sont extraordinairement grandes, comme l'indique la fig. 1 (*); mais j'ai découvert que les feuilles (en laissant de côté les nervures) sont composées d'un nombre excessif de petits globules proéminents, que j'ai taché d'imiter, mais que je suis loin d'avoir représentés ici aussi petits qu'il le fallait. — (Nous les avons omis dans la figure réduite.) —

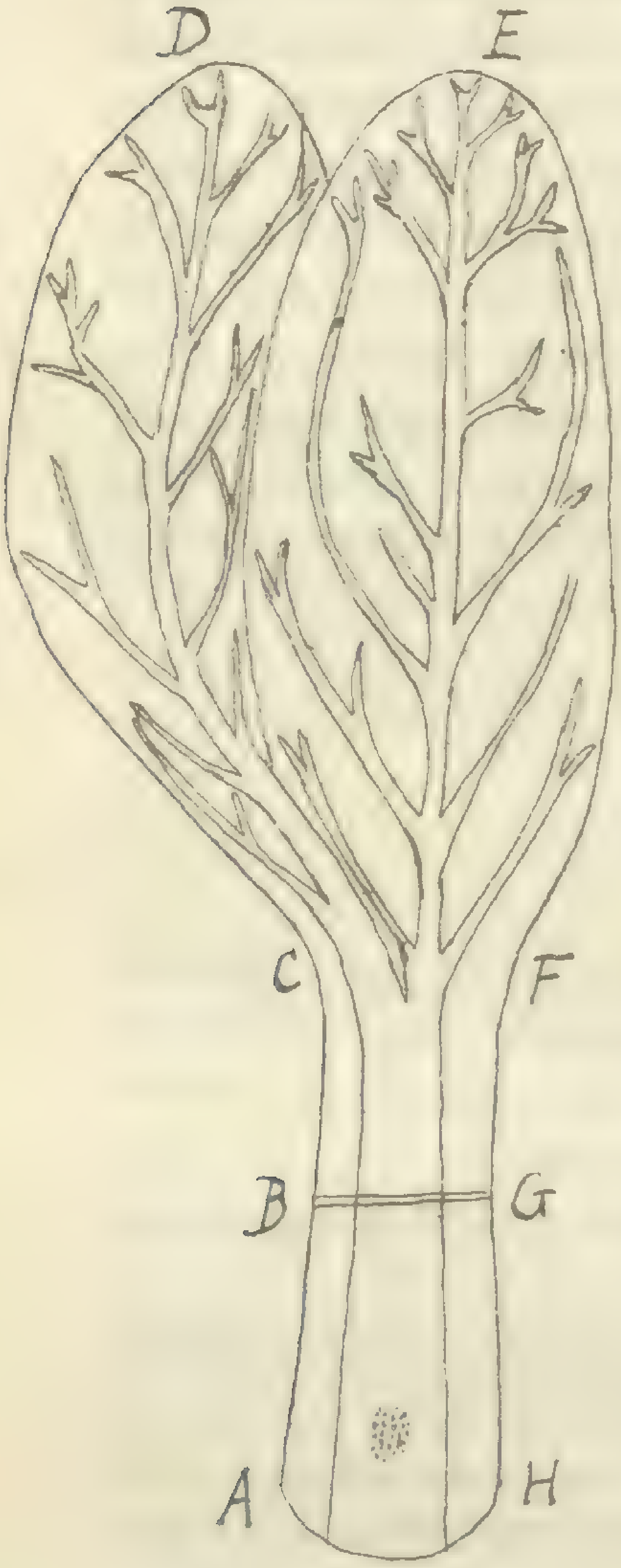


Fig. 1.

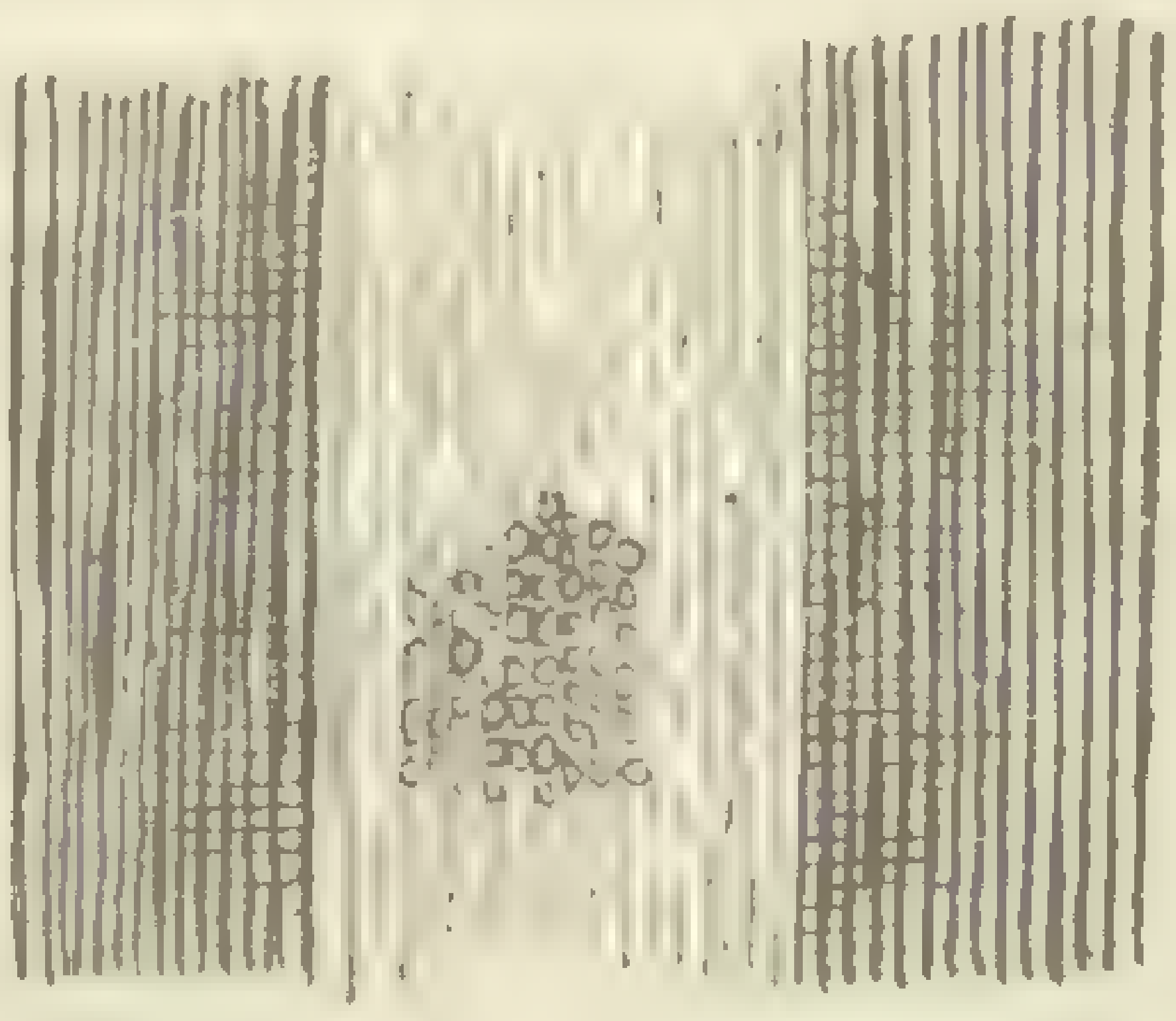


Fig. 1^{bis}.

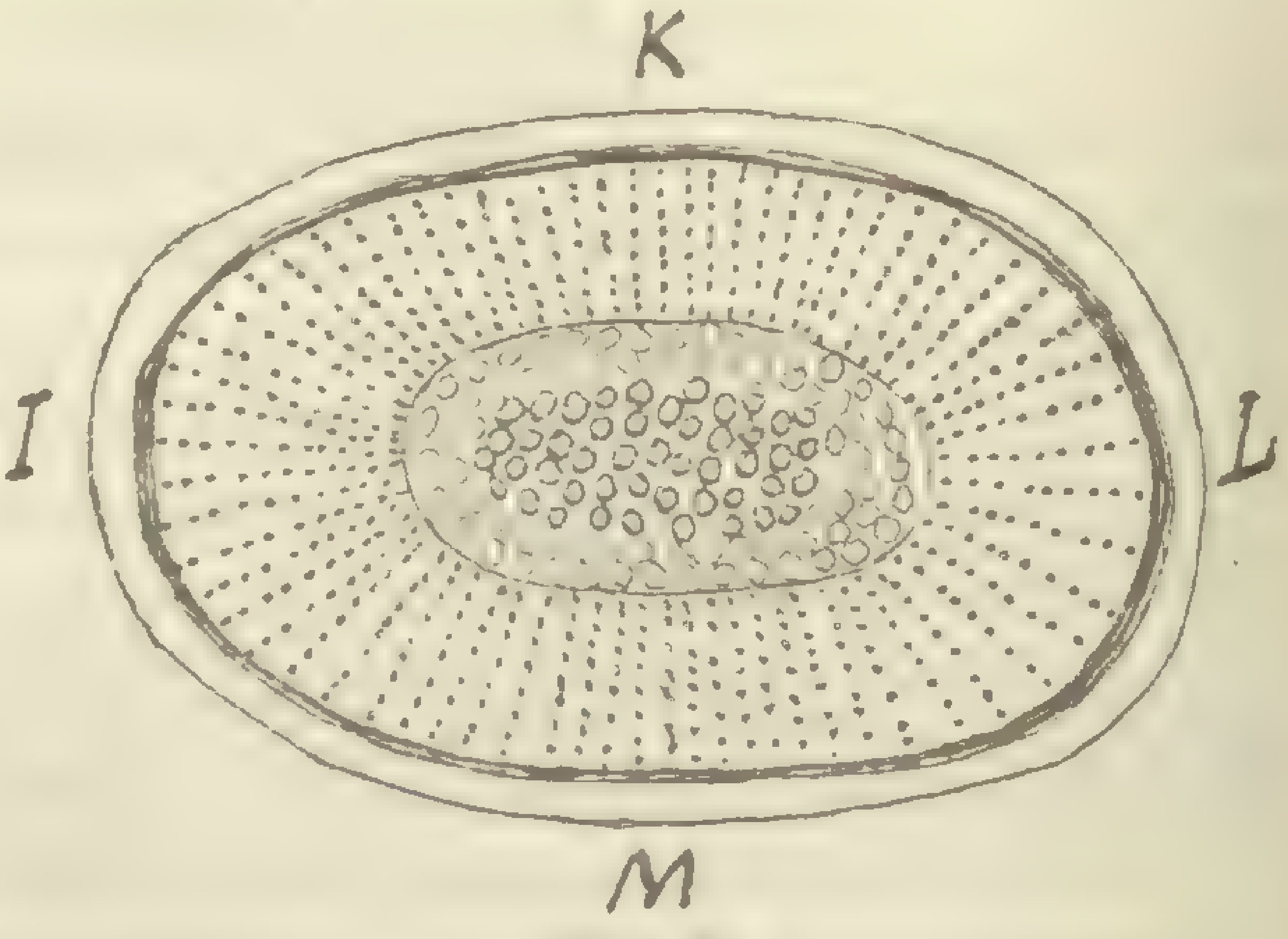


Fig. 2.

(*) La figure a été simplifiée et réduite au 1/3 environ; la figure 1^{bis} est la portion qui nous intéresse, entre A et H, aux dimensions de l'original.

Ensuite j'ai également découvert un grand nombre de nervures, autrement dit de vaisseaux, qui sont garnis de petits globules, quoique ceux-ci ne soient pas indiqués dans notre figure, lesquels vaisseaux ou nervures prennent leur origine à l'intérieur de ce qui deviendra la tige et d'où sortira la racine, comme il est indiqué dans la figure 1 entre ABCFGH. Cette dernière partie d'où sortiront la tige et la racine, outre les vaisseaux, desquels proviennent les nervures des feuilles et qu'on pourrait regarder comme la moelle du bois, est encore pourvue d'une quantité de vaisseaux ; et pour mettre ceux-ci plus clairement sous les yeux, j'ai pratiqué suivant BG une section transversale de la racine ou de la tige, et ayant observé cette partie sectionnée, je l'ai dessinée avec, autant que possible, tous les vaisseaux qui s'y présentaient, comme le montre la fig. 2. IKLM... Le pourtour externe représente l'écorce et le second (pourtour), où se trouvent tous ces points obscurs ou rouges, montre le bois, et cette couleur brunâtre ou cette obscurité tiennent seulement à ce que la matière, qui est très molle, remplit ou obstrue les petits tubes, au passage du rasoir ; la région interne comprend la moelle ou les vaisseaux d'une tige ou d'une branche, lesquels coupés transversalement se présentent comme des corps cylindroïdes...

Ensuite dans la tige susdite, en quelques endroits, se montraient quelques particules arrondies, qui me donnaient l'apparence que *dans les petits tubes il y avait de petits corps sphériques, indiqués ici entre A et B* (dans notre figure 1$^{\text{bis}}$) (*) „.

(*) Texte original :

Delft in Holland, den 13 July 1685.

Hoog Edele, Hoog Geleerde, ende seer vermaarde *Heeren*,
Mijn Heeren, die van de Kon : Soc :
in *Londen*.

Ik heb in mijn laatste geschreven van de voortteelinge van de Dieren, ende daar nevens in 't voorbij gaan aangeroert, dat men in de Zaden van de Boomen het begin van de bladeren en wortel kan sien. 't Sedert die tijd geëxamineerd hebbende het zaad van een Essen-boom, heb ik goed gedacht eenige van mijne observatien ende consideratien, ontrent de voortteelinge van de Boomen, U. E. Hoog-Edele mede te laaten toekomen ; te meer, omdat ik in het gezeide zaad van een Essenboom (dat niet grooter is als Fig. A.) niet alleen twee zeer

Le passage important pour nous se trouve dans l'alinéa final. Nous avons tenu cependant à ne pas l'isoler des observations qui le précèdent, parce qu'elles aident à en saisir la signification et contribuent à une connaissance circonstanciée de la découverte de Leeuwenhoek.

L'illustre micrographe distingue parfaitement dans la feuille deux sortes d'éléments anatomiques, les globules (cellules) et les éléments propres des nervures (vaisseaux). Ces premières observations le conduisent à l'examen de la tige et de la racine, ou plutôt de cette partie de l'embryon " qui deviendra la tige et d'où sortira la racine ". Il en examine la structure à la périphérie et

---

groote bladeren hebbe ontdekt; maar dat mij ook boven gemeen groot te vooren quam, dat deel dat de wortel zal worden. Ik heb het verhaalde Zaad opgespouwen...

Vorders heb ik niet alleen de bladeren, als boven geseid, boven gemeen groot gezien, als hier met Fig. 1. CDEF. werd aangewesen; maar ook ondekt, dat de bladeren (wanneer men de ribbens aan eene zijde stelt) bestaan uit een overgroot getal van uitstekende kleine rond verhevene bolletjens, die ik wel heb trachten na te volgen; doch deselve alhier op verre na soo klein niet geteikent als die wel behoorde. Daar benevens heb ik ook te gelijk een groote meenigte van ribbens, anders vaten geseid, in deselve ondekt met seer kleine bolletjens zijn beset, hoewel die hier niet zijn aangewesen; welke vaten of ribbens, haar oorsprong nemen uit het binnenste van het gene dat tot stam sal worden, en waaruit de wortel sal schieten; als in deselve Figuur tusschen ABCFGH is aangewesen. Dit laatst geseide deel, waar uit de stam en de wortel van de Boom moet voortkomen, is, boven de vaten waar uit de ribbens van het blad komen, ende die men wel voor de pit van het hout soude konnen nemen, noch voorsien met seer veel vaten; ende omme deselve klaarder voor de oogen te stellen, heb ik de verbeelde wortel of stam over dwars doorsneden, als B'G, ende dat doorgesnede deel voor mijn gesicht gebracht, ende hetselvige, soo veel mij doenlijk, met alle de vaten, die mij daar in te vooren quamen, afgeteikent; als hier Fig. 2, IKLM... de buitenste ommekring verbeelde de bast, ende de tweede ommekring, waar in dat alle duistere of roode stipjens staan, vertoonde het hout; welke bruynigheid of duisterheid alleen veroorzaakt wierd, om dat de stoffe, die zeer sagt is, door het snijden van het mes, de pijpjes als toestrijkt of stopt: de binnenste kring besluit in zich het pit ofte de vaten, die een stam of tak heeft, en die haar dus, overdwars gesneden zijnde, als rondachtige lighamen vertoonen...

Vorders vertoonden haar ook in de soo genoemde stam, op eenige plaatsen, eenige rondachtige deelen, die mij wel te voren quamen, als of *in de pijpjens kleine ronde Lighaamtjes waren*, die hier tusschen A. en B. zijn aangewesen.

dans la profondeur, d'après des coupes longitudinales (optiques ou réelles) et des coupes transversales.

Nous n'avons pas à nous occuper ici d'identifier tous les détails signalés dans la description, encore moins nous arrèterons-nous à regretter que l'auteur n'ait pas tenu compte, avec toute la précision que l'on serait en droit d'exiger aujourd'hui, de la différence entre les éléments du bois et ceux de la moelle; ce qui est hors de doute, c'est que les " petits tubes „ (pypjens) dont il parle, ne peuvent être autre chose que ces cellules allongées, si abondantes, comme on sait, dans les tissus embryonnaires qui avoisinent les méristèmes. Dès lors, les *petits corps sphériques* trouvés dans ces éléments prennent forcément la signification de *noyaux cellulaires*.

La figure qui accompagne cette description, sans être aussi décisive que celle relative aux globules sanguins, est néanmoins suffisante pour corroborer notre conclusion, que la première observation du noyau végétal est due à Antoni van Leeuwenhoek (*).

Évidemment il ne fallait pas s'attendre à trouver dans des écrits d'une date si reculée, aux premières origines de la microscopie, une netteté et une abondance de détails qui nous paraîtraient aujourd'hui toutes naturelles. On s'explique sans peine que les faits soient sommairement énoncés et que par suite ils n'aient pas fait grande impression. Nous reconnaissons même sans difficulté que Leeuwenhoek, dépourvu des moyens matériels d'étude qui se sont peu à peu introduits dans la pratique du microscope, réactifs fixateurs et colorants, par exemple, n'a point reconnu la fine structure des *petits corps sphériques* qu'il a signalés dans les particules sanguines du poisson et dans les " petits tubes „ des méristèmes végétaux; il n'en a point soupçonné la généralité et, par suite, l'importance. Bien plus, il n'est pas probable que les " particules sanguines „ ou les " petits tubes „ aient eu à ses yeux une autonomie quelconque ou une individualité aujourd'hui inséparables de l'idée de cellule. Mais à notre sens la question que nous traitons est indépendante de toutes ces circonstances. Il s'agit

---

(*) M. le Professeur M. Lefebvre fit la remarque que ces " petits corps sphériques „ pourraient bien être des grains de fécule. Dans ce cas, nous aurions à attribuer à Antoni van Leeuwenhoek une nouvelle découverte assez importante.

simplement de savoir si, objectivement, ces particules sanguines et ces petits tubes étaient des cellules, et si les petits corps sphériques signalés à leur intérieur en étaient les noyaux.

La question ainsi posée ne comporte manifestement qu'une réponse affirmative, réponse pleinement suffisante pour établir la priorité de notre savant compatriote dans la découverte du noyau cellulaire.

Cette découverte ne fit, nous serons le premier à le reconnaître, aucune sensation.

Un siècle plus tard, alors que la microcospie avait déjà célébré son centenaire, Fontana, mieux outillé, revit le noyau et en donna une description qui ne pouvait avoir le même sort, vu l'état de la science. On ne saurait guère s'étonner qu'il n'ait pas songé à rappeler les observations de Leeuwenhoek, perdues, pour lui comme pour tout le monde, dans la masse de ses communications; mais il n'y a que de la justice à définir la part de mérite qui revient à chacun de ces deux illustres savants. Du reste, il n'est pas hors de propos de faire remarquer que Fontana lui-même ne vit pas et ne pouvait voir toute l'importance du noyau, dont la généralité ne fut reconnue que plus tard.

Il nous semble avoir établi sur de bonnes raisons le fait historique énoncé dans le titre de cette note. La première révélation du noyau n'a pas été faite par Fontana, en 1781, ainsi qu'on l'admet généralement, mais bien par le hollandais Antoni van Leeuwenhoek, en 1682 et 1685.

Il nous est agréable de constater qu'à côté de l'invention du microscope, notre pays peut revendiquer pour un de ses fils l'une des plus remarquables découvertes qui soient dues à cet admirable instrument, la plus remarquable, peut-être, après celle de la cellule, la découverte du noyau.

Le secrétaire donne lecture d'un travail de M. le chan. Bourgeat *sur les dépôts ferrugineux de Franche-Comté*. Sur la proposition du R. P. Schmitz, S. J., la section vote l'impression de ce travail. On le trouvera dans la seconde partie du tome XXVI des ANNALES.

M. Lefebvre présente une note préliminaire sur une *nouvelle moisissure* découverte dans du beurre. Il s'agit, selon toute probabilité, d'une espèce voisine de l'*oïdium lactis,* si ce n'est une forme nouvelle de cet oïdium lui-même. Cette moisissure paraît cependant avoir des caractères qui la distinguent de l'oïdium lactis type. Cultivée dans divers milieux elle est extraordinairement polymorphe; dans certains cas elle présente une forme de spores absolument caractéristique, simulant de petits ballots ficelés. Sa connaissance peut avoir une certaine importance pratique en laiterie : elle détermine une maladie très contagieuse du beurre, se manifestant principalement par des taches rouge sang.

En l'absence de MM. Lambiotte et Stainier — empêchés au dernier moment — le R. P. Schmitz, S. J., fait une communication préliminaire pour remplacer la *discussion* qui devait avoir lieu *sur la formation de la houille.*

Il rappelle les traits principaux de la théorie de la formation par transport *(allochthonie)* de M. H. Fayol et de la sienne propre.

Il montre combien la théorie de M. Fayol est savamment conçue et solidement assise sur des observations toutes de précision, pour attribuer au *seul* transport les gisements houillers du Plateau Central (France). Puis il s'attache à établir que cette théorie devient caduque lorsque l'on veut trop en généraliser l'application, surtout lorsqu'on veut par elle *seule* expliquer la formation du houiller du grand bassin anglo-franco-belgo-allemand.

A première vue déjà, il n'y a aucune ressemblance si l'on compare les surfaces. L'énorme bande houillère, continue et homogène tout le long du ridement hercynien, ne rappelle en rien les nombreux gisements répandus par la France Centrale et dont, en plusieurs endroits, l'érosion a respecté les contours primitifs.

Si l'on soumet les sédiments à l'analyse de l'observation, on est frappé d'une double différence très significative.

C'est, d'une part, la présence, sur les bords des gisements du Plateau Central, des cônes de déjection torrentiels, nettement accusés par les éléments qui les constituent : leurs dimensions et leurs formes — leur classement par ordre de densité dans le sens du courant — et enfin, leur provenance minutieusement relevée dans le bassin hydrographique de chaque cours d'eau. Ces poudingues absolument caractéristiques n'ont pas la moindre analogie avec aucune de nos roches houillères, pas même avec notre poudingue houiller dont la texture est tout juste macroscopique!

D'autre part le P. Schmitz n'a reconnu nulle part, dans la France Centrale, le *mur* tel qu'il se présente chez nous. Il appelle mur cette roche particulière, à aspect boueux, toute pétrie de rhizomes portant encore adhérentes tout autour d'eux leurs nombreuses radicelles *(in loco natali)*. Ce mur-là, si constant sous la plupart des lits charbonneux du grand bassin westphalien, ne se retrouve pas sous les couches de houille du Plateau Central. D'ailleurs quelle serait sa signification sous des amas houillers qui mesurent jusqu'à 56 mètres de puissance (Decazeville)?

Jeudi 10 avril 1902. La section se réunit au Musée du Cinquantenaire. M. l'abbé Claerhout fait la communication suivante : *Sur les vestiges d'animaux domestiques trouvés dans les amas de détritus du Danemark.*

Les *Kjökkenmöddinger* du Danemark furent découverts en 1837. Ce ne fut qu'en 1851 qu'on parvint à les interpréter et à les regarder comme des amas de détritus, des restes de repas, des vestiges de la civilisation primitive des néolithiques.

Ils furent souvent fouillés; cependant en 1893, à l'instigation du Musée national, on vit un groupe de savants, d'archéologues et de naturalistes se réunir pour soumettre ces gisements à un examen plus méthodique, à une étude plus approfondie.

De 1893 à 1897, ils firent des recherches dans huit amas, dont cinq sont situés dans le Nord du Jutland et trois dans le Nord de l'île de Seeland. Le fameux amas d'Ertebölle dans le Jutland a été entièrement déblayé et a fait l'objet d'une analyse minutieuse; il mesurait une épaisseur de 1^m90 et une étendue de 314 mètres carrés; on a recueilli 8608 objets, 20 300 fragments d'ossements et 563 tas de cendres.

Les habitants vivaient sur des tas de coquillages pour y préparer et y consommer leur nourriture; là aussi ils fabriquaient et réparaient leurs instruments et leurs ustensiles.

Les amas de détritus *(Affaldsdynger)*, connus aussi, mais plus improprement, sous le nom de *Kjökkenmöddinger*, restes de cuisine, et de *Skaldynger*, amas de coquillages, se répartissent en deux catégories bien distinctes, d'où l'on conclut que le néolithique, plus uniforme dans le centre de l'Europe, se divise au Danemark en deux périodes.

Le plus ancien âge néolithique est caractérisé par une poterie très grossière sans ornementation, des tranchets non polis, l'absence d'animaux domestiques autres que le chien; les habitants vivaient de la chasse et de la pêche. L'amas d'Ertebölle appartient à cet âge.

Dans le second âge néolithique on rencontre un outillage qui concorde avec la civilisation de l'époque des dolmens; le silex est poli; la poterie est ornementée; le peuple exerce l'élevage et l'agriculture; certains fragments de poterie portent l'empreinte de grains de blé; on recueille des ossements d'animaux domestiques.

Trois amas datent de cette période plus récente : deux sont situés en Jutland; ce sont ceux d'Orum Aa et d'Aalborg; le troisième, celui de Leire Aa est situé dans l'île de Seeland, aux environs de Roskilde.

⁂

Les résultats des recherches opérées dans les amas de détritus sont longuement détaillés dans un grand ouvrage, enrichi de magnifiques illustrations : *Affaldsdynger fra Stenalderen i Danmark* (*).

Nous voulons considérer un moment les vestiges d'animaux domestiques recueillis dans ces amas et faire connaître l'opinion des naturalistes danois sur les ossements de ces animaux domestiques.

Le seul animal domestique de l'époque la plus ancienne, c'est le chien; ses ossements se rencontrent aussi dans les trois amas plus récents avec ceux du porc, du mouton et du bœuf.

Le chien néolithique du Danemark ressemble au *Canis familiaris palustris* de Rütimeyer, connu par les stations lacustres de la Suisse. L'amas d'Ertebölle présente un chien de moindre taille, à face plus courte et à dentition plus tranchante. L'amas de Klintesö renfermait les ossements d'un chien d'une taille plus considérable, concordant avec le *Canis familiaris matris-optimæ,*

(*) A. P. Madsen, Sophus Müller, Carl Neergard, C. G. Petersen, E. Rostrup, K. Steenstrup, Herluf Winge. *Affaldsdynger fra Stenalderen i Danmark.* — Copenhague, C. A. Reitzel, 1900.

qui, ailleurs en Europe, se retrouve à l'âge du bronze et aux époques postérieures.

Quelle est la forme originelle, le type primitif sauvage du chien des amas de détritus ?

Les naturalistes danois le font descendre du chacal *(Canis familiaris ferus).*

L'argument sur lequel ils se basent c'est l'entière conformité du chien domestique avec le squelette du chacal : si l'on ne retrouvait les traces nombreuses de sa présence dans les amas et les signes indéniables de son activité à ronger les os, il n'y aurait pas moyen de le distinguer du chacal, de le regarder comme le compagnon de l'homme.

Comment le chien de taille plus notable, qu'on rencontre dans l'amas de Klintesö, peut-il descendre du chacal ?

D'abord il y a des formes intermédiaires. De plus, les grands chiens ont conservé la dentition du chacal et ont pu aisément grandir sur les amas où ils vivaient dans des conditions favorables pour se développer et trouver une nourriture abondante parmi les restes rejetés par une population qui s'adonnait à l'élève du bétail.

Les naturalistes danois ne croient pas que les hommes aient domestiqué leur ennemi le loup, parce que les grands chiens des temps préhistoriques ne présentent pas la grande dentition du loup, dont les dents ne diminuent jamais, même lorsque cet animal sauvage est élevé en captivité pendant plusieurs générations.

Les néolithiques n'ont-ils pas connu une race éteinte de chiens sauvages dont descendent les races des grands chiens ?

Les naturalistes danois ne le croient pas : la domestication du chien ne remonte pas assez haut pour que cette race eût eu le temps de s'éteindre ; puis la plupart des grands chiens ne remontent pas aux âges néolithiques : ils n'ont eu leur plein épanouissement qu'à l'âge du bronze et dans les temps postérieurs.

Le chien des amas de détritus a été importé en Danemark ; le chacal n'a pas vécu en Danemark ; il habite le sud-est de l'Europe, l'Asie et l'Afrique.

Les ossements du porc domestique ont été recueillis en grand nombre dans les trois amas les plus récents ; ce porc est le porc de la tourbe, le *Sus scrofa palustris* connu par les palafittes de la Suisse et plusieurs stations préhistoriques de l'Allemagne et de l'Italie.

Le porc dérive du sanglier; c'est le *sus scrofa ferus typicus* domestiqué; s'il s'écarte du sanglier, les écarts résultent de la domestication pratiquée par une population de mœurs frugales, qui n'a pas eu besoin d'utiliser les défenses comme armes ou outils aratoires: la taille de l'animal diminue, le développement du crâne est arrêté; sous plusieurs rapports le sanglier domestiqué semble replacé dans l'état de jeunesse. Cependant le porc des amas de détritus rappelle plus le sanglier typique que le porc de l'âge du fer par la taille considérable et la grandeur des yeux et des dernières molaires.

Le porc de la tourbe ressemble cependant au porc indo-chinois, surtout par le peu de longueur de l'os lacrymal qui est plus long chez le sanglier et qui ne peut être sensiblement atténué par la domestication. Les naturalistes danois répondent que la domestication a pour effet d'attribuer au porc de la tourbe les propriétés du porc indo-chinois, mais ils ne parviennent pas à expliquer clairement comment le porc de la tourbe ait l'os lacrymal court comme le porc indo-chinois.

Le porc domestiqué a été probablement importé en Danemark parce qu'on le voit apparaître brusquement dans les amas de la dernière période néolithique.

La race du mouton domestiqué est visiblement la même dans les trois amas de l'âge le plus récent : c'est le mouton capricorne, l'*Ovis aries palustris* des palafittes de la Suisse; tous les genres de moutons sauvages peuvent se ramener à l'*Ovis aries fera*, dont le mouton des amas de détritus est une forme sensiblement modifiée; ce mouton n'a pas été domestiqué en Danemark parce que le mouton sauvage, vivant dans les montagnes, n'habite ni le Danemark, ni les contrées limitrophes.

De nombreux ossements du bœuf domestique ont été découverts dans les trois amas de la dernière période néolithique : ce bœuf domestique concorde avec le *Bos taurus brachyceros*, rencontré dans les stations lacustres de la Suisse.

Les zoologistes danois défendent l'opinion qui le fait dériver par la domestication du *Bos taurus urus*. Il se rapproche beaucoup plus de l'urus que le bœuf des temps postérieurs. Il ne peut descendre d'un *Bos taurus brachyceros* antérieur, parce que dans les dépôts préhistoriques antérieurs on ne trouve pas de vestiges de cette race et que les amas de la première période néolithique ne contiennent que des ossements du *Bos taurus urus*.

Il est facile de comprendre que la domestication ait sensiblement pu changer et réduire la structure de l'urus d'autant plus que l'urus présente lui-même une grande variété de formes dans la proportion des cornes et la puissance de l'encolure.

Tantôt les cornes ont conservé la même forme que chez l'aurochs, mais elles sont devenues plus minces comme chez les races du bœuf *Primigenius;* tantôt les cornes sont devenues plus courtes, mais elles ont conservé leur épaisseur, comme chez les bœufs de la race *Brachyceros;* tantôt les cornes sont à la fois plus courtes et plus légères comme chez les races du bœuf *Brachyceros* des temps postérieurs.

L'encolure s'est abaissée : mais le cou a conservé la même forme chez le bœuf *Primigenius;* le cou s'est modifié près des cornes qui ont diminué, de façon à former une bosse au milieu, comme chez le bœuf *Frontosus;* tantôt il s'est incliné vers le milieu comme chez le bœuf de la race *Brachyceros* pure.

Le bœuf domestique a été probablement importé en Danemark parce qu'il surgit brusquement pendant la seconde période néolithique.

M. l'abbé Claerhout présente ensuite les nombreux et importants objets recueillis, par ses soins et avec le concours de la Société d'archéologie de Bruxelles, dans les fouilles pratiquées à la station palustre de Denterghem. Bien que ces objets soient placés dans un local, qui n'est pas encore ouvert au public, M. le baron de Loë, conservateur au Musée, a mis le plus gracieux empressement à donner les autorisations voulues pour que la belle collection provenant de Denterghem, fût accessible aux membres de la Société scientifique. C'est lui aussi qui a fait à la III^e section les honneurs des salles où sont réunies les richesses de la Belgique préhistorique, pendant que M. Siret, un de nos membres, faisait ressortir l'importance des trésors archéologiques qu'il rapporta il y a quelques années, avec son frère, du sud de l'Espagne, et qui se trouvent maintenant au musée du Cinquantenaire (*).

(*) Cfr Rev. des quest. scient. 1re sér., t. XXIII, pp. 5 et 368.

Cinquième section

Séance du mercredi 9 avril, à 10 heures, sous la présidence de M. E. Dubois, professeur à l'Université de Gand, président.

M. F. Vergauwen expose *La Question des sucres en 1902*. Après avoir brièvement résumé la législation sucrière des principaux pays d'Europe, le conférencier montre comment ce système de protection intense devait nécessairement amener une crise de surproduction et une réaction énergique. Les primes à l'exportation doivent disparaître, car elles sont devenues un instrument de concurrence agressive sur les marchés extérieurs, l'Angleterre et l'Amérique du Nord, au détriment du consommateur européen. L'abolition des primes a été l'objet de la conférence de Bruxelles. La convention internationale qui termina cette conférence aura pour conséquences la diminution du prix du sucre raffiné sur le Continent, une augmentation progressive de la consommation, un accroissement de recettes pour le trésor public et vraisemblablement, après une période de crise aiguë pendant la transition d'un régime à l'autre, un regain de prospérité pour l'industrie sucrière et pour les industries qui en profitent : l'agriculture, le charbonnage et l'atelier de construction.

Cette intéressante conférence fut suivie d'un échange d'observations pratiques entre M. Vergauwen, M. Éd. Van der Smissen, M. Nerincx et M. Evrard.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 8 AVRIL 1902

La séance s'ouvre à 2 heures à l'hôtel Ravenstein, sous la présidence de M. le Cte François van der Straten-Ponthoz.

M. P. Mansion, secrétaire général, fait le rapport sur les travaux de la Société pendant l'année 1901-1902. En voici le résumé :

Publications. 1° La Société a fait paraître les trois dernières livraisons du tome XXV des Annales correspondant à l'année jubilaire et un fascicule du tome XXVI correspondant à l'année courante; de plus, l'impression du second fascicule est presque terminée.

Le volume XXV relatif à notre année jubilaire est le plus étendu que la Société ait publié depuis sa fondation; cependant on n'a pu y faire entrer plusieurs mémoires présentés en section pendant cette année, ni les rapports sur les travaux de chaque section depuis 1875, dont nous avons annoncé la prochaine publication dans notre rapport général. Ces rapports et ces mémoires paraîtront dans les volumes suivants des Annales au fur et à mesure que les ressources de la Société le permettront.

Sur les 680 pages du tome XXI, 135 environ sont consacrées à des renseignements statistiques et historiques, 145 aux mathématiques, 250 à la physique et à la chimie, 100 aux sciences naturelles, 15 seulement à la médecine, 35 aux sciences économiques et agricoles. Il faut remarquer que maints travaux présentés à la troisième et à la cinquième section ont paru dans la Revue des Questions scientifiques parce qu'ils pouvaient intéresser le grand public. Le principal mémoire publié dans ce tome XXV est la belle *Étude historique et critique* de M. P. Duhem *sur les théories électriques de Clerk Maxwell,* étude à laquelle devront recourir tous ceux qui ont à cœur de savoir à quoi s'en tenir sur la valeur réelle des travaux du savant physicien anglais.

2° Pendant notre vingt-sixième année sociale, nous avons achevé la publication du tome XLIX de la Revue des Questions scientifiques, fait paraître le tome L, dont une bonne partie est consacrée à nos fêtes jubilaires, et enfin, nous avons commencé la troisième série de ce recueil par la première livraison du tome LI, en janvier 1902. Nous donnons plus bas la liste détaillée des grands articles de la Revue, et nous nous permettons encore une fois d'appeler spécialement l'attention de nos auditeurs sur quelques-uns d'entre eux, dus à MM. Lechalas, Duhem, de Kirwan, Fabre et au R. P. Thirion, à cause de leur portée philosophique. Si je me laissais aller à mes sympathies particulières, je signalerais entre tous, à ce point de vue, le travail où le savant professeur de physique de Bordeaux synthétise ses vues sur l'évolution de la statique et de la dynamique au xix^e siècle.

Voici la liste dont il est question plus haut :

Léon XIII et la *Société scientifique de Bruxelles.* — *R. P. Van den Gheyn,* S. J. Le jubilé de la *Société scientifique de Bruxelles.* — *P. Mansion.* La *Société scientifique de Bruxelles* (1875-1901).

I. 1. *C. Jordan* et *P. Mansion.* Charles Hermite.

2. *M. d'Ocagne.* Eugène Vicaire.

3. *J. T.* La nouvelle étoile de Persée.

4. *R. d'Adhémar.* L'œuvre mathématique du xixe siècle.

5. *R. P. Bosmans.* La trigonométrie de Tycho-Brahé.

6. *C. de Kirwan.* Le véritable concept de la pluralité des mondes.

7. *R. d'Adhémar.* Les principes de la mécanique.

8. *J. T.* Troisième centenaire de la mort de Tycho-Brahé.

II. 9. *G. Lemoine.* Les chimistes de langue française du xixe siècle.

10. *E. Capelle, S. J.* La découverte du carbure de calcium.

11. *E. Gérard.* Gramme et l'industrie électrique.

12. *Vandevyver.* A propos de métrologie.

13. *R. P. R. Jacopsen, S. J.* L'observation de la couronne solaire durant les dernières éclipses.

14. *E. Capelle.* Les fours électriques.

15. *J. Thirion.* Henry A. Rowland.

16. *E. Capelle.* La fabrication du carbure de calcium.

III. 17. *R. P. Prat.* La science de la Religion et la science du langage d'après M. Müller.

18. *J. H. Fabre.* Les pentatomes.

19. *de Nadaillac.* L'Irlande préhistorique.

20. *R. P. Delattre.* Trois voyageurs vénitiens au xiiie siècle.

21. *G. Houdard.* La science musicale grégorienne.

22. *de Nadaillac.* Vers le pôle Nord.

IV. 23. *Surbled.* Comment on guérit la tuberculose.

24. *J. R., S. J.* Phagocytose et immunité.

25. *Dr Moeller.* Les sanatoria pour tuberculeux.

V. 26. *H. Lambrechts.* La revision des lois belges sur les coopératives.

27. *J. V.* L'enseignement agricole en Belgique durant les années 1897-1899.

28. *V. Wauquez.* L'action catholique agricole en Belgique.
29. *Vandersmissen.* Le chèque et la compensation.
VI. 30. *L. Henry.* La fondation Nobel.
31. *A. Arcelin.* La dissociation psychologique.
32. *J. J. Van Biervliet.* L'évolution de la psychologie au xixe siècle.
33. *P. Duhem.* Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique.
34. *G. Lechalas.* Les confins de la science et de la philosophie au Congrès international de philosophie de 1900.

Près de cinq cents pages de la Revue sont consacrées à des comptes rendus détaillés ou sommaires de plus de quatre-vingts ouvrages et à des revues ou analyses de recueils périodiques relatifs aux sciences mathématiques, physiques, naturelles, médicales, économiques, avec leurs applications, et aux parties avoisinantes de la philosophie et de la science religieuse.

Sessions. Le souvenir de nos fêtes jubilaires à la session de Pâques 1901 est encore présent à la mémoire et au cœur de tous ceux qui ont pu y prendre part ou qui, au moins, ont lu, dans la livraison de juillet, le compte rendu détaillé et fidèle qu'en a fait le R. P. Van den Gheyn, S. J. Il me suffira donc d'en rappeler en courant les épisodes principaux. Mardi 9 avril : Messe à Sainte-Gudule, célébrée par M. le chanoine Delvigne, premier vice-président de la Société, pour le repos de nos confrères défunts ; réunion des sections et, en particulier, à la cinquième, conférence de M. Halot sur l'*Extrême-Orient à l'aurore du XXe siècle.* La première assemblée générale s'est tenue sous la présidence d'honneur de M. Beernaert, ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France. Nous y avons entendu successivement une belle allocution de M. G. Lemoine, membre de l'Institut, notre président effectif pendant l'année jubilaire, sur le travail accompli par la Société scientifique de Bruxelles depuis un quart de siècle ; un rapport substantiel de M. Kurth, sur la *Leo-Gesellschaft* et la *Goerresgesellschaft*, enfin une conférence originale de M. Van Biervliet sur l'*Évolution de la psychologie au XIXe siècle.* Le lendemain 10 avril, plusieurs sections se réunirent le matin pour assister à une communication extrêmement intéressante de M. Van de Vyver sur *l'air liquide*, avec nombreuses expériences. L'assemblée générale de ce jour a eu lieu dans la grande salle de marbre du Palais des Académies, sous la présidence d'honneur de Son Éminence le cardinal-archevêque de Malines, Mgr Goossens et de Son Excellence Mgr Granito di Belmonte, nonce apostolique près de Sa Majesté le Roi des Belges. Dans cette séance solennelle, Son Excellence Mgr le Nonce a d'abord donné lecture, aux applaudissements de l'assemblée, de la lettre adressée par Sa Sainteté Léon XIII à la Société à l'occasion de son jubilé; le secrétaire a fait l'historique de la Société et enfin notre infatigable président nous a fait une savante conférence sur les chimistes de langue française au XIX^e siècle. Le banquet du soir de cette belle journée a été vraiment un banquet jubilaire où se trouvaient réunis, dans une allégresse commune, anciens et jeunes, prêtres et laïques, Belges et étrangers, membres de la Société et invités délégués par les Universités et les Sociétés catholiques. Le dernier jour de la session, M. Leclerq fit le matin, devant plusieurs sections réunies, une lecture *sur les conflits du droit et de la force et les nationalités opprimées, Finlande, Transvaal, Arménie*. L'assemblée générale de clôture se tint sous la présidence d'honneur de M. le comte Fr. van der Straten-Ponthoz. Il fut donné lecture des lettres de félicitations adressées à la Société scientifique de Bruxelles à l'occasion de son jubilé, en particulier de celles de l'Académie royale de Belgique, de M. de Trooz, ministre de l'Intérieur et de l'Instruction publique, de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, etc. Une brillante conférence de M. J. Capart sur *Karnak, la ville des temples* et une allocution de M. Proost, président pour 1901-1902, sur la méthode scientifique, terminèrent nos fêtes jubilaires.

Elles avaient été organisées par une commission présidée par M. le chanoine Delvigne et dont le R. P. Van den Gheyn était le secrétaire et la cheville ouvrière. Le Conseil de la Société a depuis longtemps adressé ses chaleureux remerciements et ses félicitations à la commission et, en particulier, au président et au secrétaire. Mais nous n'avons pas encore eu l'occasion de le faire en assemblée générale et c'est pourquoi je tiens à dire aujourd'hui la grande part que M. le chanoine Delvigne, le R. P. Van den Gheyn et les autres membres ont eu à la réussite de nos fêtes jubilaires.

La première session de notre vingt-sixième année sociale s'est tenue à Gand le 21 novembre 1901. Elle a été particulièrement brillante, à cause de la participation de nos confrères de l'Université de Lille et du succès de l'assemblée générale, qui eut lieu au palais du gouvernement provincial sous la présidence d'honneur de Sa Grandeur Mgr l'Évêque de Gand et de M. le Gouverneur de la Flandre orientale. Notre premier vice-président, M. le chanoine Boulay y parla en termes très justes et très modérés de l'utilité de l'enseignement des sciences naturelles, dans les séminaires et les collèges. Le R. P. Lucas fit ensuite une magnifique conférence sur les phénomènes mystérieux que présentent les corps radio-actifs avec expériences à l'appui. C'est la troisième fois que le savant professeur du Collège de Notre-Dame de la Paix expose le premier, en Belgique, les remarquables découvertes faites depuis quelques années, dans le domaine de l'électricité : rayons X, télégraphie sans fil, radio-activité, et c'est chaque fois la Société scientifique qui a offert au public instruit, par son intermédiaire, ces primeurs scientifiques.

La session de janvier s'est tenue à Bruxelles comme d'ordinaire. A la séance générale, le D^r Heymans nous a décrit, avec sa science habituelle, les efforts tentés depuis une douzaine d'années, surtout par Koch, pour triompher de la plus redoutable et de la plus répandue des maladies, *la tuberculose*. J'ai essayé ensuite, malgré mon incompétence en cette matière, de faire connaître ce qu'on appelle *la question de la langue internationale auxiliaire*.

État actuel de la Société. Je viens de vous esquisser à grands traits notre vie scientifique publique, si j'ose ainsi dire, pendant l'année qui vient de s'écouler. Je dois maintenant vous dire quelques mots de nos progrès. A la suite de nos fêtes jubilaires, nous avons eu la joie de recruter près de quarante nouveaux membres dont quatre appartiennent à l'Institut de France : M. Beernaert, M. Picard, M. OEhlert, M. Zeiller. Mais hélas, malgré ces nombreuses adhésions nouvelles, nous ne comptons aujourd'hui que vingt-cinq membres de plus qu'il y a un an. Les démissions et surtout la mort nous en ont enlevé quinze dont plusieurs faisaient partie de la Société depuis l'origine. Je ne puis tous les citer, mais je ne puis passer sous silence M. le vice-amiral de Jonquières, membre de l'Institut, auteur de recherches d'arithmétique supérieure et de géométrie pure, le premier créateur de la théorie des caractéristiques; Breithof, Ledresseur et Albert Nyssens que l'Université de Louvain pleure avec nous, Nyssens surtout dont la patrie attendait tant encore après tout ce qu'il avait fait comme premier ministre du travail; Clasen, mon vieil ami, curé-doyen d'Echternach, qui est parvenu dans sa solitude ardennaise, à trouver, sur les équations linéaires, quelque chose de nouveau à apprendre aux plus habiles géomètres; Bouqué, mon excellent collègue de Gand, enlevé par une mort subite, mais non imprévue, car il était toujours prêt; enfin, Mgr Doutreloux, le sympathique évêque de Liége, qui, après nos fêtes jubilaires, bien que travaillant dans un domaine tout autre que le nôtre, avait tenu à se faire inscrire parmi nos membres.

Mgr Rutten, successeur de Mgr Doutreloux sur le siège épiscopal de S. Lambert, a bien voulu le remplacer aussi comme membre de la *Société scientifique*. Mgr Heylen, évêque de Namur, nous ayant aussi envoyé son adhésion après notre jubilé, nous avons maintenant l'honneur de compter dans nos rangs, ou plutôt à notre tête, l'épiscopat belge tout entier. Nous en sommes fiers et nous remercions NN. SS. les Évêques de nous témoigner tant de confiance et de sympathie en toute occasion.

Je termine comme les autres années en vous signalant quelques distinctions ou manifestations dont quelques-uns de nos confrères ont été l'objet. Cette année, les collègues et les élèves du R. P. De Smet ont célébré son jubilé de cinquante ans de profession religieuse dans une fête intime. Une manifestation semblable, fermée aussi, a été faite à notre éminent confrère de Paris, M. Haton de la Goupillière, membre de l'Institut, quand il a quitté la direction de l'École des Mines pour devenir Vice-Président du Conseil général des Mines de France.

MM. Laruelle et Ch. Goris ont été nommés, le premier, membre du Conseil supérieur d'hygiène, le second, correspondant de l'Académie de médecine.

Dans sa séance du 16 décembre 1901, l'Académie des sciences de Paris a accordé le prix Monthyon de mécanique à M. A. Witz de l'Université catholique de Lille, pour l'ensemble de ses travaux. Le prix du baron de Joest a été partagé entre M. l'abbé Verschaffel, directeur de l'observatoire d'Abbadia, et M. Saint-Blancat, astronome à l'observatoire de Toulouse, pour leurs belles observations astronomiques. Enfin, notre éminent confrère de Louvain, M. Van Gehuchten, dont les travaux sur la physiologie cérébrale sont connus dans le monde entier, a obtenu, cette année, dans notre pays, le prix quinquennal des sciences médicales.

La *Société scientifique de Bruxelles* s'est associée de cœur aux manifestations faites en l'honneur du R. P. De Smet et de M. Haton de la Goupillière. Elle félicite MM. Laruelle, Goris, Witz, Verschaffel et Van Gehuchten des distinctions qu'ils ont obtenus et dont l'honneur rejaillit quelque peu sur elle.

M. Ed. Goedseels, trésorier, donne lecture du rapport financier de la Société. Sur la proposition de M. Mansion, le R. P. J. Thirion, S. J. et M. L. Cousin sont chargés d'examiner ce rapport.

La parole est donnée à M. le Commandant J. Henry, pour sa conférence, avec projections lumineuses, sur *la conquête du Haut Nil*. En voici un résumé :

Première reconnaissance de Kéro (5° 1/2 de lat. N. jusqu'au 8° 3/4 de lat. N.). — Ayant reçu des autorités anglaises l'autorisation de faire des reconnaissances vers le nord aussi loin que nous voulions, nous partons vers Gaba Shambé à bord du vapeur *Vankerkhoven*, dès que celui-ci est complètement mis en état de naviguer. Il était urgent, tant pour les Anglais que pour nous, de savoir ce que les Derviches étaient devenus après avoir abandonné Bor, et de posséder des renseignements précis sur les barrages du Nil. La reconnaissance sous les ordres du commandant Henry comprenait : le commandant Adam, le lieutenant Nielsen, l'inspecteur mécanicien Mulders, 65 soldats et gradés, un canon Nordenfeld, deux chalands en acier. Elle trouve Bor tout à fait détruit et apprend que les Derviches ont fui vers le Darfur après avoir débarqué au fond du lac Pamelwal et détruit leur bateau.

A Shambé nous trouvons, le 2 août 1899, un poste français composé de 35 soldats sénégalais commandés par le lieutenant de Tonquedec et le sergent Salpin. Nous sommes accueillis avec la cordialité la plus aimable par les Français. M. de Tonquedec nous confirme la fuite des Derviches vers le Darfur : ils se sont faufilés entre les postes français du Bahr-el-Gazal sans oser les inquiéter

Le Nil en est donc débarrassé. Cela nous conduit à aller faire la reconnaissance des barrages du Nil. Nous trouvons bientôt le premier établi en aval de Gaba Shambé. Les herbes arrêtent les eaux qui se déversent dans les marais où elles forment un vrai labyrinthe de dérivations et de lagunes à travers lesquelles nous passons en traînant souvent nos embarcations au moyen de chaînes et de cordes. Après 25 kilomètres environ de ce parcours le fleuve redevient libre jusqu'au 8^{me} degré de lat. N. où nous trouvons le même barrage qu'à Shambé, flanqué de dérivations et de lagunes analogues. Après cela le fleuve redevient libre jusqu'au $8^{me}3/4$ degré de lat. N. où il disparaît sous les papyrus sans laisser la moindre trace. Du haut de notre observatoire, nous apercevons une grande lagune située à environ deux kilomètres de nous. Mais après d'énergiques tentatives pour rompre la digue végétale qui nous en sépare, nous devons nous décider à retourner à Kéro, nos provisions de bois de chauffage et de vivres étant pour ainsi dire complètement épuisées.

Deuxième reconnaissance, de Kéro à Khartum. (Départ de Kéro le 14 septembre 1899. Retour par le Bahr-el-Girafe). — Elle comprend le vapeur anglais *Kénia* et le vapeur congolais *Vankerkhoven*. Le *Kénia* remorque une de nos grandes allèges en acier. Il a à son bord MM. le capitaine Gage, le docteur Milne, 15 soldats et gradés. Le *Vankerkhoven* remorque deux allèges et a à son bord les capitaines de Rennette et Bertrand, l'inspecteur mécanicien Mulders, le sous-lieutenant Nagels, le commandant Henry, 65 soldats et gradés ainsi qu'un canon Nordenfeld.

La saison des pluies ayant complètement manqué sur le Haut-Nil, les tribus Bari, Dinka Niambara déjà ravagées par les Derviches, se trouvent pour ainsi dire sans ressources contre une famine calamiteuse qui va durer un an au moins. Nous jugeons que c'est pour nous un devoir impérieux de chercher à sauver ces pauvres gens de la ruine et de la mort en créant entre Khartum et le Haut-Nil une bonne voie de communication pour nos vapeurs ou tout au moins pour nos canots. Nous n'avons, pour effectuer ce travail important, aucune complication à craindre. Le pays est débarrassé des Derviches, tandis que notre entente avec les autorités anglaises est complète. Nous pouvons donc aller de l'avant sans aucune crainte. Arrivés au point extrême que nous avons atteint lors de la première reconnaissance, MM. Gage et Bertrand coupent dans la digue végetale dont il a été parlé tout à l'heure un canal de 8 à 10 mètres de largeur qui malheureusement se referme derrière eux. C'est une première expérience. Ce canal trop étroit pour livrer passage à la masse végétale accumulée en amont, est bouché par elle. Nous jugeons qu'il lui faut au moins quarante mètres de largeur et nous y employons tous nos efforts. En quinze jours notre travail est couronné de succès. Nous avions pour but de rompre brusquement la digue végétale qui retenait les eaux. Celles-ci, subitement lâchées, devaient, selon nous, former un formidable torrent dont la force irrésistible irait briser la barrière qui se trouvait au fond de la lagune que nous avions devant nous, pour aller rejoindre la partie libre du Nil situé en aval comme cela avait lieu à Shambé et au 8^{me} degré de lat. N. Notre désir ne se réalisa pas. Sous la poussée violente des eaux, les herbes reculèrent vers le nord, mais résistèrent par élasticité sans se rompre. Le résultat que nous avions atteint était très appréciable toutefois, car nous avions allongé, vers le nord, la voie navigable pour nos vapeurs, de vingt kilomètres environ. Cela nous conduisit à explorer les marais avec nos canots en acier et à découvrir que parallèlement à la bordure de papyrus du Nil et derrière celle-ci croît, dans une profondeur d'eau et de vase de 1^{m} à 1^{m}20, une bande uniformément composée de plantes aquatiques qui se brisent facilement au ras de leurs racines sous une légère pression. Cette exploration fut faite par MM. Gage, de Rennette, Bertrand et Henry. MM. Milne, Mulders et Nagels étaient restés à bord de nos bateaux pour les garder et soigner nos malades. Nous pûmes ainsi nous frayer à travers les marais un joli canal de trois à quatre mètres de largeur en avançant vers le nord de 3 à 5 kilomètres par jour. Nous marchons ainsi jusqu'au 25 novembre, puis nous devons retourner à nos bateaux faute de vivres et de moyens de nous en procurer autrement. Il ne nous faut que six jours pour refaire en sens inverse une route qui nous en avait demandé quatorze pour la frayer. C'était donc la preuve convaincante que nous pouvions aboutir au Nil Blanc, sinon avec nos vapeurs du moins avec nos canots. Seulement il fallait à nos hommes un repos réparateur de vingt jours, car ils étaient fortement amaigris et exténués de fatigues et de privations. Le 3 décembre, MM. de Tonquedec et Salpin nous rejoignirent au moyen de petites pirogues qu'ils avaient solidement accouplées pour leur donner sur l'eau un peu de stabilité. Il est décidé entre M. de Tonquedec et nous que nous voyagerons de conserve. Nous avions pour cela de grands avantages communs. Le travail est repris le 20 décembre. Malheureusement M. de Rennette, atteint de rhumatismes douloureux, est obligé de retourner à Kéro. La marche se fait dans les marais comme précédemment, au moyen de nos trois allèges en acier et de quelques pirogues de M. de Tonquedec. Les Européens composant cette étrange caravane sont : MM. de Tonquedec et Salpin, français; Gage et Milne, anglais; Bertrand et Henry, belges. Le 30 décembre nous étions déjà au point extrême atteint le 25 novembre. Le manque d'eau nous oblige à appuyer vers le lit du fleuve où nous trouvons de longs biefs navigables séparés par des obstacles courts et compacts. Nous traversons chaque barrage en y pratiquant un canal le long d'une des rives et en le décollant ainsi d'un côté. Cette opération était très dangereuse parce qu'il arriva que des barrages se mirent en marche d'un seul bloc, menaçant de nous écraser. Le 19 janvier, nous rencontrons M. le major anglais Peake, qui était venu avec une très forte expédition pour débarrasser le Nil de ses obstructions. Cette expédition avait déjà enlevé deux barrages. L'officier anglais nous reçut avec la courtoisie la plus exquise et mit à notre disposition une canonnière qui nous conduisit à Khartum où nous arrivâmes le 7 février 1900. M. le Sirdar de l'armée égyptienne, Sir Wingate Pasha, nous y donna une hospitalité grandiose. Nos vaillants compagnons MM. Gage, de Tonquedec, Milne et Salpin continuèrent leur route vers l'Europe pendant que nous retournions à Kéro. Par suite de la disparition des barrages, les eaux du Nil avaient repris leur cours naturel à l'endroit où nous avions repris le cours du fleuve. Le canal que nous avions créé se trouvait ainsi à sec, rendant impossible notre retour par les marais. Avec l'assentiment des officiers anglais nous retournons par le Bahr-el-Girafe, craignant que le temps qu'il leur aurait fallu pour achever la complète désobstruction du fleuve ne fût trop long. Grâce à mon dévoué compagnon, le capitaine Bertrand et à l'expérience de nos hommes, il ne nous faut que vingt-cinq jours pour remonter cette rivière depuis son embouchure jusqu'à son origine la plus méridionale. Dans le cas où le Nil serait resté obstrué, le Bahr-el-Girafe aurait donc permis des communications très faciles entre le Bahr-el-Djebel et Khartum. Le 2 avril, nous avions rallié nos bateaux qui étaient restés à la garde de MM. Mulders et Nagels. Pendant le temps que nous avions mis à remonter et à explorer le Bahr-el-Girafe, une canonnière avait pu arriver jusqu'à l'endroit où nous avions laissé le *Vankerkhoven*. Le Nil se trouvait donc, dorénavant, ouvert à la navigation à vapeur. Le 1er mai, enfin, nous étions de retour à Kéro avec le *Vankerkhoven*.

M. le comte Fr. van der Straten-Ponthoz remercie et félicite l'orateur.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 9 AVRIL 1902

La séance s'ouvre à 2 heures, à l'hôtel Ravenstein, sous la présidence de M. E. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain, vice-président de la Société.

On trouvera plus loin (page 200) le rapport sur la *Société bibliographique de Paris* qui figurait à l'ordre du jour de cette séance.

Le R. P. G. Hahn, S. J., fait une conférence sur *les multiples organes de locomotion chez les vertébrés*. Cette conférence est reproduite *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1902.

En voici un résumé :

Chez les vertébrés, l'organe de locomotion est constitué par les os, par les ligaments qui réunissent les os et par les muscles qui les mettent en mouvement.

L'embryologie révèle dans cet appareil deux qualités rarement associées, une continuité parfaite et l'existence de parties nettement caractérisées.

Tout os mobile et capable de prendre appui sur un obstacle extérieur peut servir à la locomotion. Aussi les organes de locomotion sont très variés.

Les serpents marchent sur leurs côtes comme sur autant de pieds, et peuvent même bondir en contractant d'abord leurs muscles et en les relâchant ensuite subitement comme on ferait d'un ressort.

L'organe principal de locomotion des poissons est la queue et la nageoire caudale. Si on se rend bien compte de l'état d'un être vivant plongé tout entier dans un fluide, on verra que le poisson ne s'élance pas de lui-même. Tout ce qu'il peut faire, c'est de modifier la forme de sa queue et de lui donner une disposition convenable relativement au corps par des mouvements empreints d'une certaine vitesse. Sa progression dépend du fluide lui-même. Si ce fluide oppose une résistance suffisante aux changements de forme du poisson, il déterminera par réaction le mouvement de l'animal et lui imprimera une vitesse dépendant de la vitesse et de la nature des changements de forme.

Chez certains poissons, comme la sole, le corps tout entier prend part aux mouvements. Comme il est fort aplati transversalement, il se couche naturellement sur le côté, et grâce à de brusques incurvations, il exécute les mouvements d'ascension auxquels se plaît l'animal.

Les membres des vertébrés terrestres et aériens ont, à l'état embryonnaire, une direction transversale et les extrémités se portent en dehors.

Les ailes des oiseaux, au moment du vol, reprennent cette direction. Elle leur est avantageuse, parce qu'elle favorise l'ascension en permettant de longues excursions du membre dans le sens vertical.

L'ascension des oiseaux exige en outre pour condition une vitesse d'abaissement de l'aile capable de produire dans l'air une résistance supérieure au poids total de l'oiseau. De là, on déduit la nécessité que les muscles pectoraux soient puissants, qu'ils soient insérés sur l'aile très près de l'épaule, que l'aile elle-même soit en même temps légère et rigide, qualités données par les plumes.

S'il est utile pour le vol que les membres s'étendent latéralement loin du corps, une telle disposition serait excessivement incommode pour la marche et la course. Aussi à partir de l'état embryonnaire, les membres se replient le long du corps, le coude en arrière et le genou en avant. La rotation en arrière du coude demande comme compensation une torsion du bras en sens contraire, sinon chez les quadrupèdes les extrémités des doigts seraient dirigées en arrière.

Les deux membres postérieurs, et, chez les quadrupèdes bons coureurs, les deux membres antérieurs eux-mêmes se reportent, sous le ventre, le plus près possible l'un de l'autre; l'organe de locomotion, en se rapprochant ainsi du plan axial, satisfait à une loi d'économie de travail.

La marche et la course relèvent surtout des muscles extenseurs. Les muscles fléchisseurs, au contraire, jouent le rôle prépondérant dans l'acte de grimper, où excellent les singes en s'aidant parfois de leur queue.

Les singes le cèdent cependant encore aux geckos qui ne reculent pas devant l'ascension des surfaces les plus lisses; c'est que ces lézards ont les pattes munies de ventouses.

Chez les vertébrés, aussi bien que dans les autres embranchements du règne animal, les organes de locomotion sont construits sur un type, mais ce type n'a rien de rigide ou d'invariable. Il s'adapte aux conditions d'existence. Tel organe prendra des proportions considérables, tel autre restera rudimentaire. Et même lorsque tous les organes ordinaires font défaut, la nature n'est pas à bout de ressources ; elle crée des suppléances inattendues.

M. E. Pasquier adresse quelques paroles de félicitations au conférencier.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 10 AVRIL 1902

L'assemblée générale s'ouvre à 2 heures dans la salle de l'hôtel Ravenstein, sous la présidence de M. E. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain, vice-président de la Société.

A l'ouverture de la séance M. Mansion soumet à l'assemblée les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes de la Société relatifs à l'année 1901. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée.

En voici les détails et le résumé.

Recettes et dépenses de la Société scientifique pendant l'année 1901

Revue

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements .	fr. 9912,70	Impression, expédition, etc.	fr. 6120,73
Vente d'anciens volumes .	405,25	Collaboration	4127,70
Subside de la Société . .	515,40	Administration et propagande	584,92
	10833,35		10833,35

Séances et Annales

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des cotisations . .	5085,00	Impression et expédition . .	2775,57
Vente d'anciens volumes .	60,00	Indemnités pour secrétariat de la Société et des sections	2500,00
Subside de la Société . . .	2070,09	Administration. frais de bureau, frais de sessions (y compris les frais extraordinaires de la session jubilaire), location des locaux	1939,52
	7215,09		7215,09

Société

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des coupons . . .	3720,08	Subside à la *Revue*	515,40
Intérêts du compte courant	115,42	Subside aux *Annales* . . .	2070,09
Une part de membre à vie .	150,00	Subsides pour recherches scientifiques	750,00
	3985,50		3335,49
		Excédent des *Recettes* . .	650,01
			3985,50

Il reste à réaliser sur l'exercice :

Abonnements à la *Revue*	812,00
Cotisations	345,00
	1157,00

RÉSUMÉ

Recettes réalisées ou à réaliser.	20605,45
Dépenses	18798,44
Boni	1807,01

La parole est donnée à M. Fernand Meunier, pour une conférence, avec projections lumineuses, sur *les travailleurs de la mort :* L'entomologie et ses applications en médecine légale. En voici un résumé.

Déjà dans l'antiquité on soupçonnait que les larves des mouches étaient carnivores. A en croire Plutarque, les Perses faisaient dévorer leurs condamnés par les larves de ces articulés. Ce n'est que depuis quelques années que les naturalistes étudient avec soin les rapports pouvant exister entre l'animal et sa pâture. Il faut remonter jusqu'au XVI^e^ siècle pour trouver quelques renseignements précis concernant l'examen des cadavres au point de vue de la médecine légale. L'histoire des cadavres a été élucidée par Zachias, Taylor, Chaussier, Orfila et quelques autres, mais aucun de ces médecins n'a remarqué quel rôle important les insectes peuvent jouer dans des questions aussi difficiles et aussi obscures que celles de la détermination de l'époque exacte à laquelle remonte la mort. Orfila fut le premier à soupçonner que les insectes sont de puissants auxiliaires de la décomposition des cadavres humains. Ce naturaliste avait entrevu la haute portée des recherches entomologiques faites sur les cadavres, mais ne songeait pas à tirer parti des lois qui président à la génération des insectes pour en faire l'application à la médecine légale.

C'est un modeste médecin de province, le D^r^ Bergeret d'Arbois, qui fut le premier à s'occuper de la faune des cadavres. Les médecins, dit-il, „ ont pu étudier à fond les modifications que les cadavres subissent lorsqu'ils se putréfient dans certains milieux, comme l'eau, la terre, le fumier „. Orfila n'a jamais eu à sa disposition de cadavres momifiés. Les insectes perçoivent à des distances prodigieuses les gaz odorants qui leur indiquent les degrés auxquels la putréfaction est arrivée et leur permettent de choisir le moment le plus convenable pour perpétuer leur espèce. Ni le naturaliste Redi de la renaissance, ni Orfila, ni Bergeret, ni aucun médecin n'avait soupçonné, avant M. P. Mégnin, le fait de l'apparition successive et régulière des insectes sur les cadavres exposés à l'air libre ou inhumés, et quelle est la loi entomologique qui préside au développement de ces animaux. Ce sont les mouches des genres *Musca* et *Cyrtoneura* qui forment la première escouade des travailleurs de la mort et qui occupent le chantier jusqu'à la formation des acides gras. Dès que l'odeur putride d'un corps mort à l'air libre se fait sentir, arrive un deuxième groupe de travailleurs, les Lucilies et les Anthomyies, qui recherchent les cadavres chez lesquels la putréfaction a commencé. De trois à six mois après la mort se montre une troisième escouade de travailleurs, les Dermestes (coléoptères) et les Aglosses (lépidoptères) connus pour êtres friands tant pour eux que pour leur progéniture de matières grasses ayant subi la fermentation acide. Peu après le développement de la fermentation butyrique dans les matières grasses, s'en développe une autre dans les substances albuminoïdes qui constitue une véritable fermentation caséique. A ce moment, se montrent les Piophiles (diptères) dont les larves attaquent les fromages. Les Anthomyies s'observent fréquemment sur les cadavres humains d'individus morts depuis plus de six mois. Ces mouches ayant des habitudes rurales, il est facile de comprendre que leur présence peut fournir d'utiles renseignements au point de vue de la détermination de la localité où la mort a pu subvenir. Les émanations de la fermentation ammoniacale appellent une cinquième escouade, parmi laquelle on rencontre des Tyréophores (acariens), des Lonchées, des Ophyres, des Phores (diptères), des Silphes, des Nécrophores, des Histers et des Saprines (coléoptères). Les travailleurs de la sixième escouade achèvent d'absorber toutes les humeurs dont le cadavre reste encore imprégné. Le résultat de leur action c'est la dessiccation complète ou la momification des parties organiques qui ont résisté aux diverses fermentations. Les travailleurs des trois dernières escouades appartiennent au monde des acariens. Ces parasites fonctionnent à tous les âges, mais surtout à celui de femelle ovigère qui est l'âge d'absorption par excellence. Parmi ces articulés nous citerons les Uropodes, les Glyciphages, les Tyroglyphes et le Serrator nécrophage. Les cadavres entièrement momifiés sont attaqués par des insectes voisins du Dermeste du lard, des Anthrènes (coléoptères) de l'Attagène des pelleteries et de l'Aglosse cuivrée (lépidoptères), qui rongent les tissus membraneux, les tendons, les poils et les cheveux. Les travailleurs de la huitième et dernière escouade sont encore des petits coléoptères, les Ptines et Ténébries, qui viennent absorber les restes du festin laissés par les sept premières escouades. Si ces articulés disparaissent sans laisser de trace de leur présence l'appréciation de l'époque de la mort est plus difficile. Cependant, même dans ce cas, on aurait la certitude qu'elle remonte à plus de trois ans, époque où les débris des insectes de la septième escouade sont encore généralement présents et indiquent la fin complète de leur travail préparé par tous leurs prédécesseurs.

Les cadavres normalement inhumés sont également attaqués par diverses espèces d'insectes. Il est curieux de constater que le nombre des larves qui dévorent les cadavres des bières est très considérable en individus mais relativement pauvre en espèces, et que certains articulés se rencontrent exclusivement dans les tombeaux. L'activité des Calliphores s'exerce dès la mise en bière, les Anthomyies leur succèdent, puis les Phores et d'autres espèces. Les larves des mouches arrivent sur les corps enfermés dans les cercueils aux planches assez bien jointes par les voies de pénétration qui se produisent par la poussée des terres et sous l'action de l'humidité.

On ne possède encore que des renseignements épars concernant la faune des cadavres immergés. Si on en juge d'après les recherches du D^r Fallot, les crustacés et d'autres animaux peuvent aider à déterminer approximativement la durée de la submersion d'un cadavre.

Les nombreuses applications d'entomologie médico-légale ont permis à M. Mégnin de formuler des conclusions scientifiques du plus grand intérêt. Par l'étude de sa faune, il est possible d'apprécier l'âge d'un cadavre inhumé jusqu'à trois ans et plus, par larges phases qui ne sont plus que d'un an après la première année. Si les recherches d'entomologie cadavérique sont encore si négligées, on doit en attribuer la cause aux médecins légistes qui, dans les rapports d'exhumations ou de trouvailles de cadavres ayant été exposés à l'air libre qu'ils sont chargés de fournir à l'autorité judiciaire, méconnaissent ordinairement le rôle que jouent les insectes et les acariens aux diverses phases de la décomposition cadavérique. Dans les cas douteux, les rapports des médecins légistes devraient être accompagnés de documents annexes indiquant les diverses escouades de travailleurs qui se sont succédé sur un cadavre exposé à l'air libre, sur ceux anormalement ou normalement inhumés et pouvant contribuer à déterminer, d'une manière assez précise, l'époque à laquelle remonte la mort.

M. Mansion fait ensuite les deux communications suivantes au nom du Conseil de la Société.

1° D'après les statuts, chaque section peut avoir des réunions extraordinaires en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section, pendant les sessions ordinaires de la Société.

2° Conformément au vœu de l'assemblée générale du 30 janvier 1902, le Conseil a examiné s'il y avait lieu, pour la Société, d'adhérer au programme de la délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale. Il a reconnu qu'il n'y a aucun inconvénient à adhérer, au moins partiellement, à ce programme et a désigné le R. P. Van den Gheyn, S. J., comme délégué de la Société scientifique.

M. Mansion donne lecture des questions de concours et fait connaître le résultat des élections des membres du Conseil et des bureaux des différentes sections.

La composition du Conseil pour l'année 1902-1903, est la suivante :

Président : M. le Chanoine Boulay.
1^er^ Vice-Président : M. le Chanoine Delvigne.
2^e^ Vice-Président : M. le Comte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Secrétaire : M. P. Mansion.
Trésorier : M. Ed. Goedseels.
Membres : MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes (*).
L. Cousin.
L. De Lantsheere (*).
le Lieutenant-Général De Tilly.
Fr. De Walque (*).
G. De Walque.
le D^r^ Ach. Dumont.
Ch. Lagasse-de Locht.
le D^r^ Lefebvre.
E. Pasquier.
A. Proost (*).
le Chanoine Swolfs.
Ch.-J. de la Vallée Poussin (*).
G. Van der Mensbrugghe.
Ed. Van der Smissen.

M. E. Pasquier déclare close la session de Pâques 1902.

(*) Ces membres sont élus pour quatre ans, d'après le nouvel article 8 des statuts.

Rapport sommaire de M. le Marquis de Beaucourt sur la Société bibliographique pendant les années 1900 et 1901 (voir p. 192).

La *Société bibliographique* a tenu son assemblée générale annuelle, en 1900, sous la présidence du R. P. van den Brule, de la Compagnie de Jésus, et en 1901, sous la présidence de M. A. de Margerie, doyen honoraire de la Faculté des lettres à l'Université catholique de Lille.

En 1900, nous avons eu à constater le succès obtenu à Poitiers, où s'est tenu notre 7e Congrès provincial. Ce Congrès a réuni une élite de travailleurs, d'hommes d'œuvres, d'ecclésiastiques. Le compte rendu de ce Congrès contient, entre autres mémoires : *De l'intérêt des monographies de communes,* par M. Arnold Mascarel ; *La corporation des bouchers de Limoges,* par M. le marquis de Moussac ; *Le clergé canonique régulier dans l'ancien Poitou,* par Dom Fourier Bonnard ; *Les premières origines du collège des Jésuites à Poitiers,* par le R. P. Mercier ; *La bibliographie des dialectes limousins depuis 1870,* par M. L. de Nussac ; *Une cour huguenote en Bas-Poitou : Catherine de Parthenay, duchesse de Rohan,* par M. le comte de Chabot.

Le résultat de ce Congrès a donné à la *Société bibliographique* un redoublement d'activité. Il lui a amené de nombreux et précieux concours, et a provoqué la constitution d'organisations provinciales, indispensables au développement de l'œuvre.

Notre secrétaire général, le comte Amédée de Bourmont, qui avait pris la part la plus active à la préparation et aux travaux du Congrès de Poitiers, nous a été enlevé en 1901, au moment où sa collaboration favorisait et accentuait la renaissance qui a signalé ces deux années.

Un de nos plus anciens et plus zélés sociétaires, le comte Aymer de la Chevalerie, vient de lui succéder.

La *Société bibliographique,* avec le concours d'une importante maison de librairie, celle de M. Bloud, a entrepris dans la collection : *Science et Religion,* publiée depuis quelque temps avec succès, une série de publications historiques dont les volumes suivants ont déjà paru :

D'où viennent les moines? Étude historique, par Dom Besse, O. S. B. — *Le Christianisme au pays de Ménélik,* par J. L. Gondal, prêtre de Saint-Sulpice, Supérieur du grand séminaire de Toulouse. — *L'Église et l'enseignement populaire sous l'ancien régime*, par le chanoine E. Allain, curé de Saint-Ferdinand de Bordeaux. — *Les Juifs en France avant et depuis la Révolution. Comment ils ont conquis l'égalité*, par Joseph Denais-Darnays, avocat à la Cour d'appel de Paris, diplômé des Études supérieures d'histoire et de géographie. — *Le Catholicisme dans les pays scandinaves*, par Lucien Crouzil, docteur en droit (ès-sciences politiques et économiques), chargé de cours à l'Institut catholique de Toulouse. I. *Danemark et Islande*. II. *Norvège et Suède*. — *Petites religions d'Amérique. Les cures divines. Le spiritisme*, par le baron Carra de Vaux, professeur à l'École libre des Hautes Études. — *La Révolution française et l'enseignement national (1789-1802)*, par le chanoine E. Allain, curé de Saint-Ferdinand de Bordeaux. — *La première année sainte du XIX^e^ siècle. Le Jubilé de 1825*. Étude historique, par M. Geoffroy de Grandmaison. — *L'Église et le rachat des captifs*, par Paul Deslandres, archiviste-paléographe. — *La propriété foncière, l'ancien régime et la vente des biens ecclésiastiques pendant la Révolution*, par M. G. Lecarpentier, licencié ès-lettres. — *Les danses macabres et l'idée de la mort dans l'art chrétien*, par Louis Dimier, archiviste-paléographe.

La Conférence d'Études historiques, instituée en 1875, a poursuivi ses travaux sous la direction de M. Deslandres, qui succédait à M. Ch. de La Roncière. Elle a entendu en 1900-1901 les communications suivantes : *Le monachisme au moyen âge* par Dom Besse; *La captivité à Alger au XVII^e siècle*, par M. Deslandres; *La carrière de La Reynie, premier lieutenant de police de Paris*, par M. R. Bonnat; *L'abbaye de Sainte-Geneviève aux XIII^e et XIV^e siècles*, par M. R. Giard; *Saint Yves, son rôle comme avocat, comme évêque de Tréguier; ses miracles*, par M. de La Roncière; *Les débuts de la Réforme allemande*, par M. l'abbé Paquier; *La cour littéraire de Marguerite d'Angoulême, sœur de François I^er^*, par M. F. Duval.

En 1901-1902, cette même Conférence a été dirigée par le R. P. Dom Besse. Parmi les communications qu'elle a entendues, nous citerons : *L'armateur Jean Ango sur la route des Indes*, par M. de La Roncière; *Travaux parus depuis un an sur les monastères de France*, par Dom Besse; *La trahison du maréchal de Toiras en 1632*, par M. R. Lavollée; *Relations du duché de*

Lorraine avec la France, au début de la guerre de Cent ans, par M. H. Levallois; *Un épisode de l'histoire du protestantisme au XVII^e^ siècle,* par M. Aug. Cochin: *La rivalité entre Riom et Clermont,* par M. Ojardias; *Le Colbertisme appliqué au port de Nantes;* par M. Gabory.

Parmi les anciens directeurs de cette Conférence, deux ont reçu de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, la plus haute de ses récompenses. Le prix Gobert a été décerné à M. Bourel de La Roncière pour son *Histoire de la marine française;* à M. P. Guilhiermaz pour son *Essai sur la noblesse au moyen âge.*

La Commission de lecture, sous la direction de M. Gabriel Martin, a examiné, en 1900, 172 ouvrages et 193 en 1901, ce qui porte à 6425 le nombre des inscriptions sur nos catalogues. Le service des prêts de livres a vu renaître son ancienne activité. En 1900, 197 bibliothèques par abonnement ont été envoyées. Au cours de 1901, 53 dépôts à Paris, et 214 en province ont reçu les uns 25 volumes, les autres 50, destinés a être renouvelés dans l'année qui suit l'envoi.

Grâce à l'impulsion donnée par le Congrès de Poitiers, et au dévouement de ses administrateurs et de ses membres, la Société Bibliographique a comblé par de nouvelles adhésions les vides causés par la mort ou les démissions. Nous enregistrons en 1900-1901, 191 inscriptions. L'année 1901-1902 a été encore plus heureuse. Elle a vu venir à nous 209 membres.

L'année 1900 a été marquée par la perte de 50 de nos membres, parmi lesquels nous devons compter : Mgr Robert, évêque de Marseille; Mgr Dabert, évêque de Périgueux; des ecclésiastiques éminents tels que le R. P. Dom Lévêque, auteur d'une *Histoire de saint Grégoire le Grand* qui doit paraître sous les auspices de la Société; M. l'abbé Hertzog, curé de la Madeleine de Paris; des hommes d'œuvres, puis des savants ou des écrivains de marque; le duc de Broglie, de l'Académie française; le comte Arthur de Marsy, directeur de la Société française d'archéologie: M. Ludovic Sciout; M. Amédée Lefèvre-Pontalis, ancien député; M. Arthur de la Borderie, membre de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres; le vice-amiral de Dompierre d'Hornoy, etc.

Nous avons eu le regret de constater en 1901 des morts non moins douloureuses. Quatre des membres du Conseil : le comte

Amédée de Bourmont, le comte de Puymaigre, le comte de Bourbon-Lignières et le R. P. Sommervogel ont disparu de nos rangs. Plusieurs adhérents éminents nous ont été enlevés : Mgr Isoard, évêque d'Annecy ; Mgr Geraigiry, patriarche grec melchite, et l'un de nos plus actifs collaborateurs, M. l'abbé Allain. Donnons aussi un souvenir à Mgr Desnoyers, à M. Léonce Couture, professeur à la Faculté libre de Toulouse, savant de premier ordre ; au comte Ludovic de Montesquiou, au vénérable M. Bulliot, correspondant de l'Institut ; à M. Delamarre, ancien professeur à l'Institut catholique ; à M. René de Maulde.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1901 au 1er mai 1902

I. Livres et brochures

R. d'Adhémar. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles intégrables par approximations successives (Extrait des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES). Une broch. grand in-4° de 3 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Alexis-M. G. Cours supérieur de Géographie. 2me partie, 1re division. L'Europe. Un vol. in-8° de VIII-228 pages. Liége, Dessain, 1902.

V. Bernies. Spiritualité et Immortalité. Un vol. in-4° de VII-493 pages. Paris, Bloud, 1901.

Henri Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection en régime permanent (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès-sciences physiques). Un vol. in-8° de 89 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

M. Berthelot. Les carbures d'hydrogène (1851-1901). Recherches expérimentales.

T. I. L'acétylène : synthèse totale des carbures d'hydrogène, x-414 pages.
T. II. Les carbures pyrogénés. Séries diverses, 558 pages.
T. III. Combinaison des carbures d'hydrogène, avec l'hydrogène, l'oxygène, les éléments de l'eau, 459 pages.

Trois vol. in-8°, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

L. Boltzmann. Leçons sur la théorie des gaz. 1re partie. Un vol. grand in-8° de XIX-204 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

G.-A. Boulenger. Les poissons du Bassin du Congo. Un vol. in-8° de LXII-532 pages. Bruxelles, Publication de l'État Indépendant du Congo, 1901.

J. Boussinesq. Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. T. I. Problèmes généraux. Un vol. in-8° de xxvii-333 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Th. Cambier et Jul. Bernard. La question du gaz à Paris. Une broch. in-8° de 8 pages. Paris, 1901.

A. Castelein, S. J. Cours de philosophie. I. Logique : Logique formelle. Critériologie. Méthodologie. Un vol. in-8° de xvi-548 pages. Bruxelles, O. Schepens, 1901.

C. Colson. Cours d'économie politique, professé à l'École nationale des ponts et chaussées (*Encyclopédie des travaux publics)*. T. I. Exposé général des phénomènes économiques, le travail et les questions ouvrières). Un vol in-8° de 596 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

G. Combeliac. Calcul des triquaternions (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès-sciences mathématiques). Un vol. grand in-4° de 123 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Ch. Coppens, S. J. Morale et médecine. Conférences de déontologie médicale, traduit de l'anglais sur la 2e édition américaine par J. Forbes, S. J., avec une préface et des notes par le Dr Surbled. Un vol. in-8° de 200 pages. Einsiedeln (Suisse), 1901.

Marc Dechevrens, S. J. Les variations passagères de la température. Causes ou effets des tourbillons atmosphériques (Extrait des Memorie della Pontificia Academia Romana dei Nuovi Lincei, V. XIX). Une broch. grand in-4° de 32 pages. Rome, Cuggiani, 1902.

J. Delemer. Génération des sons vocaux. A propos d'un livre du Dr Guillemin (Extrait du Journal des Sciences médicales de Lille). Une broch. in-8° de 32 pages. Lille, Morel, 1902.

Ém. De Wildeman. Études sur la flore du Katanga. Fasc. I, pp. 1 à 24, pl. I à VI (Extrait des Annales du Musée du Congo. Botanique. Série IV). In-folio de 24 pages avec pl. Bruxelles, Spineux, 1902.

Cte Domet de Vorges. Saint Anselme. Un vol. in-8° de vi-335 pages. Paris, F. Alcan, 1901.

Ern. Doudou. Preuves indéniables que la grotte de Spy a été fouillée sans méthode et que les ossements humains qu'on y a découverts n'ont pas d'âge sûr (Extrait du Bulletin de l'Association des Disciples d'Ernest Doudou).

Ém. Duclaux. L'hygiène sociale. Un vol. in-8° de 271 pp. Paris. F. Alcan, 1901.

P. Duhem. Thermodynamique et Chimie. Un vol. grand in-8° de x-496 pages. Paris, Hermann, 1902.

C. de Freycinet. Sur les principes de la Mécanique rationnelle. Un vol. in-8° de viii-170 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

A. Gaudry. Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux (2e note) (Extrait de l'Anthropologie, t. XII, 1901). Une brochure in-8° de 16 pages. Paris, Masson, 1901.

K. Groos. Les jeux des animaux *(Bibliothèque de philosophie contemporaine)*. Un vol. grand in-8° de VIII-376 pages. Paris, F. Alcan, 1902.

Ch.-Éd. Guillaume. La convention du Mètre et du Bureau international des poids et mesures (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE, t. CI). Un vol. grand in-4° de VII-238 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Dr Dubois-Havenith. Observations présentées par le Conseil supérieur d'hygiène publique *(Rapport du Conseil supérieur d'hygiène publique)*. Une broch. de 32 pages, 1901.

Journée. Tir des fusils de chasse. Un vol. grand in-8° de VI-387 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Abbé J.-J. Kieffer. Monographie des Cécidomyides d'Europe et d'Algérie. 1re partie, avec 30 planches (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ ENTOMOLOGIQUE DE FRANCE. Paris, Sociétés savantes, 1901.

H. Lambrechts. Un manuel pour unions professionnelles. Une broch. in-8° de 32 pages. Bruxelles, 1899.

H. Lambrechts. Un manuel pour syndicats d'achat de matières premières. Une broch. in-8° de 54 pages. Ixelles, 1901.

Le colonel A. Laussedat. Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. T. II. 1re partie : Iconométrie et métrophotographie. Un vol. in-8° de 198 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

G. Lechalas. Logique et Histoire des sciences. De la comparabilité des divers espaces *(Bibliothèque du Congrès international de philosophie)*. Une broch. in-4° de 15 pages. Paris, A. Colin. 1901.

L. Marchis. Leçons sur les moteurs à gaz et à pétrole *(Actualités scientifiques)*. Un vol. in-16 de XL-175 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

M. Monier. Contribution à l'étude de l'action physiologique de l'alcool. (Extrait du MOUVEMENT HYGIÉNIQUE, août 1901). Une broch. in-4° de 12 pages.

M. Monier. Contribution à l'étude de l'action physiologique de l'alcool (Extrait du JOURNAL DE PHARMACIE D'ANVERS, septembre 1901). Une broch. in-8° de 14 pages. Anvers, Jos. Dirix, 1901.

M. Monier. Historique de la corrélation physiologique (Extrait du JOURNAL DE PHARMACIE D'ANVERS, novembre 1901). Une broch. in-8° de 11 pages. Anvers, Dirix, 1901.

M. Monier. La Zomothérapie (Extrait du JOURNAL DE PHARMACIE D'ANVERS, février 1902). Une broch. in-8° de 16 pages. Anvers, Dirix, 1902.

Félix Müller. Vocabulaire mathématique, français-allemand et allemand-français. 2me partie. Un vol. grand in-8° de XIV-316 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1901.

Désiré Nys. La notion de l'espace au point de vue cosmologique et psychologique. Un vol. petit in-8° de V-289 pages. Louvain, Institut supérieur de philosophie, 1901.

Otto de Alencar Sylva. Quelques erreurs de Comte (Extrait du JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURALES, mai 1901). Une broch. in-8° de 5 pages. Lisboa, 1901.

P. de Paepe. Étude sur la compétence civile à l'égard des étrangers. T. II. Un vol. grand in-8° de 503 pages. Bruxelles, Bruylant-Christophe, 1902.

H. Pellat. Cours d'électricité. T. I. Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité. Un vol. in-8° de VI-329 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Th. Pepin, S. J. Sur la décomposition des grands nombres en facteurs premiers. Une broch. grand in-4° de 28 pages. Rome, Filippo Cuggiani, 1900.

H. I. Phillips, F. I. C., F. C. S. Les Combustibles solides, liquides, gazeux (traduit de l'anglais par J. Rosset). Un vol. in-18 de X-165 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Ém. Picard. Quelques réflexions sur la Mécanique, suivies d'une première leçon de Dynamique. Un vol. in-8° de 58 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Gust. Robin. Œuvres scientifiques réunies et publiées par Louis Raffy. Physique mathématique. Thermodynamique générale. Deux vol. in-8° respectivement de VI-150 et XVI-271 pages. Paris, Gauthier-Villars. 1901.

J.-A. Cl. Roux. Études géologiques sur les Monts Lyonnais (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ LINÉENNE DE LYON, t. XLII à XLVIII). 4^{me} fasc., grand in-8° de 284 pages. Lyon, Alex. Rey, 1895, 1896, 1899, 1901.

H. Sicard. Traité de Cinématique théorique. Un vol. grand in-8° de VIII-186 pp. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

M. L. Torres. Sur la construction des machines algébriques (Extrait de la REVUE DE MÉCANIQUE, sept.-oct. 1901). Une broch. in-4° de 32 pages. Paris, V^{ve} Ch. Dunod, 1901.

M. L. Torres. Machines à calculer (Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de l'Institut de France). Une broch. in-4° de 20 pages. Paris, Imprimerie nationale, 1901.

M. L. Torres. Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE). Une broch. in-8° de 12 pages. Paris, 1902.

P. Van Biervliet. L'industrie sucrière aux États-Unis (Extrait de la REVUE GÉNÉRALE AGRONOMIQUE de Louvain). Une broch. in-8° de 26 pages. Brecht, Braeckman, 1901.

Ern. Van den Broeck. Le dossier hydrologique du régime aquifère en terrain calcaire et le rôle de la Géologie dans les recherches et études des travaux et eaux alimentaires. Réponse à la note de M. l'Ingénieur Th. Verstraeten, intitulée : Hydrologie des roches, nécessité de préciser les situations et les termes (Extrait du t. XI, fasc. V du BULLETIN de LA SOCIÉTÉ BELGE DE GÉOLOGIE). Un vol. in-8° de 176 pages. Bruxelles, Hayez, 1901.

J. Vincent. Études sur les nuages. I. Les nuages lacunaires. II. Les faux cirrus de l'alto-cumulus. Une broch. grand in-4° de 9 pages avec planches. Bruxelles, Hayez, 1901.

Aimé Witz. Rendement comparé des machines à vapeur et des machines à gaz (Extrait de l'ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE, janvier 1902). Une broch. in-4° de 26 pp. Paris, C. Naud, 1902.

C. Wolf. Histoire de l'Observatoire de Paris de sa fondation à 1793. Un vol. in-8° de XII-392 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

H.-G. Zeuthen (traduit par Jean Mascart). Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Un vol. in-8° de XIV-296 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Encyclopédie des Aide-mémoire publiée sous la direction de M. Léauté, membre de l'Institut. Collection de vol. petit in-8°. Paris, Gauthier-Villars et Masson.

Section de l'ingénieur :

H. Astruc. Le vin.
A. Blondel. Moteurs synchrones à courants alternatifs.
G. Halphen. Analyses des matières grasses.
Ad. Minet. Galvanoplastie et galvanostégie.
Rigaud. Expertises et arbitrages.
V. Thomas. Les plantes tinctoriales et leurs principes colorants.
E. Vigneron. Mesures électriques.

Annales internationales d'histoire, Congrès de Paris 1900. 5e section : Histoire des sciences publiée par les soins de M. P. Tannery. Un vol. gr. in-8° de 348 pages. Paris, Colin, 1901.

Carte agricole de la Belgique. Procès-verbaux des réunions consultatives. Une broch. in-8° de 34 pages. Bruxelles, Weissenbruch, 1901.

Ministère de l'agriculture. Exposé statistique de la situation des associations d'intérêt agricole pendant l'année 1900. Une broch. in-8° de 119 pages avec cartes. Bruxelles, Weissenbruch, 1901.

Ministère de la justice. Statistique judiciaire de la Belgique. Deuxième année. Un vol. gr. in-4° de 283 pages. Bruxelles, Larcier, 1901.

H. Lambrechts. Een handboek voor beroepsvereenigingen. Une broch. in-8° de 32 pages. Anvers, 1901.

H. Lambrechts. Handboekje voor aankoopsyndikaten van grondstoffen. Une broch. in-8° de 54 pages. Ixelles, 1901.

Bellino Carrara. S. J. La Selenografia antica e moderna (Studio storico-scientifico). Un vol. in-8° de 202 pages. Pavia, Fusi, 1901.

Fabio Invrea. Elementi di Fisica. Volume secondo. Fasc. 1 et 2. Magnetismo ed Elettricita. Ottica. Deux vol. de XII-237 et XVIII-150 pages. Torino, Unione tipografico editrice, 1901.

Gino Loria. La scienze esatte nell' Antica Grecia. Libro III. Il sustrato matem. della filosofia natur. dei Greci. Libro IV. Il period argentea della geometria greca. Deux vol. in-4° de 130 et 80 pages. Modena, Societa tipografica, 1900.

Universita commerciale Luigi Bocconi. Statuto e Programma. Un vol. in-8° de pages. Milan, G. Martinelli, 1902.

Armando da Silva. O. Aquario Vasco Da Gama. Relatorio apresentad a sua éx. o ministerio da marinha e ultramar sobre o estado d'este estabelecimento e a sua reorganizaçao. Un vol. in-8° de 70 pages. Lisboa, Imprensa nacional, 1901.

Don Francisco González Herrero. El Hipnotismo, a la luz de la Filosofia, de la Fisiologia y de la Moral. Un vol. in-8° de 590 pages. Cuenca, José Gomez Madina, 1901.

M.-W. Travers. The experimental Study of Gases. Un vol. gr. in-8° de XIV-324 pages. London, Macmillan and C°, 1901.

Georgetown College Observatory. Preleminary light Curve of nova Persei 1901 from February 22 to May 1. Georgetown, University Press, 1901.

J. Fényi, S. J. Protuberanzen beobachtet in den Jahren 1888, 1889, 1890 am Haynald-Observatorium. Un vol. in-4° de 133 pages avec planches. Kalocsa, Jurcso, 1902.

Dr Karl Fischer. Der Naturwissenschaftliche Unterricht in England ins besondere in Physik und Chemie. Un vol. in-8° de VIII-94 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

Dr E. Hammer. Sechsstellige Tafel der Werte ${}^{10}\log \frac{1+x}{1-x}$. Un vol. gr. in-8° de IV-74 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Dr Moritz Kitt. Grundlinien der politischen Arithmetik. Un vol. in-8° de IV-78 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

Dr Eug. Netto. Lehrbuch der Combinatorik. Un vol. in-8° de VIII-260 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

John Schreiber, S. J. P. Christoph Scheiner, S. J., und seine Sonnenbeobachtungen. Une broch. in-8° de 62 pages. Münster, Aschendorffschen Buchhandlung, 1902.

Dr Max Simon. Euclid und die sechs planimetrischen Bücher mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. Un vol. in-8° de VII-141 pages avec 192 fig. dans le texte. Leipzig, Teubner, 1901.

J.-W.-J.-A. Stein, S. J. Beobachtungen zur Bestimmung der Breitenvariation in Leiden nach der Horrebow-Methode angestellt von Juni 1899 bis Juli 1900. Un vol. in-4° de 136 pages. Haarlem, Enschedi en zoon, 1901.

Den Norske Nordhaus-Expedition 1876-1878. Christiania. XXVIII Zoologi. Mollusca.

II. Périodiques

Académie des Sciences. Comptes rendus hebdomadaires des séances (1902). Paris.

Académie royale de médecine de Belgique :

Bulletin : 4e série, t. XV (1901).

Procès-verbaux des séances de l'année 1901.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille, t. XI.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. 2e série, t. III (1901).

Annales de la Société géologique de Belgique, t. XXVIII, 2e, 3e et 4e livr. Liége.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique, t. XXIV.

Annales de Philosophie chrétienne, 1902. Paris.

Annuaire pour l'an 1902, publié par le Bureau des longitudes, Paris.

Annuaire astronomique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1902. Bruxelles.

Annuaire météorologique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1902. Bruxelles.

L'Anthropologie, t. XIII (1902). Paris.

Bulletin de la Société astronomique de France (1902). Paris.

Bulletin de la Société bibliographique et des publications populaires (1902). Paris.

Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique (1902). Bruxelles.

Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie, t. XI, fasc. 5; t. XII, fasc. 3; t. XV, fasc. 3, 4, 5, 6; t. XVI, fasc. 1. Bruxelles.

Bulletin mensuel du magnétisme terrestre de l'Observatoire royal de Belgique (1902). Bruxelles.

Bulletin météorologique de l'Observatoire royal de Belgique (1901). Bruxelles.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXX (1902). Paris.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy, série II, t. I à XII, t. XIV; série III, t. II, fasc. 1, 2 et 3. Nancy.

Ciel et Terre (1901-1902). Bruxelles.

Le Cosmos (1902). Paris.

Études (Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus), 1902. Paris.

Journal de l'École Polytechnique, IIe série, 5e et 6e cahiers. Paris.

Journal des sciences médicales de Lille (1902). Lille.

Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (1902). Paris.

Le Progrès médical (1902). Paris.

La Réforme sociale. Bulletin de la Société d'économie sociale et des Unions de la paix sociale, fondées par P.-F. Le Play (1902). Paris.

La Revue générale (1902). Bruxelles.

Revue néo-scolastique, publiée par la Société philosophique de Louvain (1902). Louvain.

Revue de Philosophie (1902). Paris.
Revue philosophique (1902). Paris.
Séances de la Société française de physique (1901). Paris.
L'Université catholique (1902). Lyon.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, t. X, 1re partie (1902). Amsterdam.
Wiskundige opgaven met de oplossing en door de leden van het wiskundig genootschap. 8ste deel, 4e stuk. Amsterdam.
Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede reeks, deel V, 3de stuk. Amsterdam.

Civilta cattolica (1902) Roma.
Rivista di Fisica, Matematica et Scienze naturali (1902). Pavia.
Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie (1902). Roma.
La Scuola cattolica (1902). Milano.

Anales del Museo nacional de Montevideo publicados bajo la direccion de J. Arechavaleta, fasc. XIX à XXII. Montevideo.
Boletin del Observatorio astronomico nacional de Tacubaya, t. II, nos 6 et 7. Mexico.
Ciudad de Dios (1902). Madrid.
El criterio católico en la Ciencas medicas (1902). Barcelona.
Memorias y Revista de la Sociedad cientifica " Antonio Alzate ", t. XIII, nos 1 et 2; t. XV, nos 1 et 2; t. XVI, no 1. Mexico.
Observatorio de Manila bajo la dirección de los Padres de la Compañia de Jesus. Boletin mensual. 1898 : 4e trim.; 1899 : 4e trim.; 1900 : 1er, 2e, 3e et 4e trim. Manille.
Razon y Fe (1902). Madrid.

Annuario publicado pelo observatorio de Rio de Janeiro para o anno de 1901. Rio de Janeiro.
Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo D. F. Gomes Teixeira. Vol. XIV, nos 4, 5 et 6. Coimbra.

The Damian Institute (1902). Birmingham.
The Dublin Review (1902). London.
The Month (1902). London.
Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations with Report and Notes of the Director (1901). Clitheroe.

American chemical Journal, edited by Ira Remsen. Vol. 23, 24, 25 et 26, nos 1, 2 et 3. Baltimore.
American Journal of Mathematics. Vol. XXII, 2, 3 et 4. Vol. XXIII, 1 à 4 (1901). Baltimore.
Bulletin of University of Kansas. Kansas University Quarterly : Juill. oct. 1900; Janv. avr. 1901.

The Catholic World (1902). Washington.
Missouri botanical garden. Twelfth report (1901). St Louis Mo.
The American Museum of Natural History :
  Bulletin, vol. XIII (1900).
  Annual Report of the President for the Year 1900.
Occasional Papers of the California Academy of Sciences, VII. San Francisco.
Proceedings of the California Academy of Sciences :
  Botany, vol. I, nº 10; vol. II, nºs 1 et 2.
  Geology, vol. I, nºs 7, 8 et 9.
  Mathematics — Physics, vol. I, nºs 5, 6 et 7.
  Zoology, vol. II, nºs 1 à 6.
The Proceedings and Transactions of the Nova Scotia Institute of Science. Vol. X. Part. 2. Session of 1899-1900. Halifax, Nova Scotia.
The American Catholic Quarterly Review (1902). Philadelphia.
Smithsonian Institution (Washington) :
  Annual Report 1897 (II), 1898, 1899, 1900.
  U. S. National Museum 1897 (II), 1898, 1899, 1900.
Transactions of the Academy of Sciences of St Louis. Vol X : 9, 10 et 11. Vol. XI : 1 à 5.
Unised States. Department of Agriculture. Section of Foreign Markets.
  Bulletin, nºs 22 et 23.
  Report, nº 67.
United States Geological Survey. Washington.
  Twentieth annual Report (1898-1899). Part. II, III, IV, V et VII.
  Preleminary report on the Cape nome Gold Region Alaska.
  Map of Alaska.
  Monographs, XXXIX, XL.
  Bulletin, nºs 163 à 176.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen begründet von Dr O. Böhlen im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Würtemberg, herausgegeben von Dr A. Schmidt, Dr A. Haas, Dr E. Wolfing (1902) Stuttgart.
Publicationen der Dr Kuffner'schen Sternwarte in Wien. Herausgegeben von Dr Leo De Ball. VI Band, 1e Theil (1902). Vienne.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. V. part. I, nº 9. Upsala.
Kongl. Vitterhets historie och antiqvitets Akademiens Manadsblad (1900). Stockholm.
Journal de la Société physico-chimique russe de l'Université Impériale de St-Pétersbourg (en russe). T. XXXIII et XXXIV, 1 à 3.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

—— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in 8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par **CH.-ED. GUILLAUME** et **L. POINCARÉ**, 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année 1896. (Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris, 2 volumes grand in-8°.**

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures.** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : ***(En préparation.)***

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. POLLEUNIS ET CEUTERICK, rue des Ursulines, 37.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SIXIÈME ANNÉE. 1901-1902

DEUXIÈME FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1902

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PAGES
Session du 30 janvier 1902 . . . . **107**
Première Section . . . . *Ibid.*
Deuxième — **116**
Troisième — **131**
Quatrième — **136**
Cinquième — **138**
Assemblée générale **139**
Conférence de M. Heymans, sur la *Tuberculose* . . . . *Ibid.*

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur certaines équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en Physique mathématique et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité, par M. J. Delemer 69
Description de quelques diptères de l'ambre, par M. Fernand Meunier. 96
Analyse des terres et leur représentation graphique, par M. P. Nyssens. 105
Complications cutanées graves de la rougeole, par M. Alex. Faidherbe. 111

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE : **M. Paul Mansion**, *6, quai des Dominicains, Gand.*

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

SUR LES RELATIONS QUI EXISTENT
ENTRE
LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE ET CELLES DE SA DÉRIVÉE

PAR

Ch.-J. de la VALLÉE POUSSIN
Professeur à l'Université de Louvain

1. On sait que si R et Θ désignent le module et l'argument d'un polynome entier en z, les courbes sur lesquelles on a

$$R = \text{const.} \qquad \Theta = \text{const.}$$

forment un système orthogonal. Ces courbes ne peuvent avoir de points singuliers que ceux qui sont racines du polynome considéré ou de sa dérivée. Il en résulte entre les situations de ces diverses racines des relations dont l'étude sommaire fait l'objet de la présente Note.

2. Dans ce qui va suivre, nous considérerons un polynome de degré n, sans racines multiples,

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n;$$

nous désignerons ses racines par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et celles du polynome dérivé par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$. Parmi ces dernières plusieurs pourront être égales.

§ I. — PROPRIÉTÉS DES CASSINOÏDES.

3. Nous donnerons le nom général de *cassinoïdes* aux courbes représentées par l'équation

$$|f(z)| = \text{const.}$$

et nous nous occuperons d'abord de celles-ci.

Nous allons avoir à considérer souvent la suite des quantités

$$|f(\beta_1)|, \qquad |f(\beta_2)|, \qquad \dots \qquad |f(\beta_{n-1})|;$$

nous la représenterons en abrégé par

$$b_1, \qquad b_2, \qquad \dots \qquad b_{n-1},$$

et plusieurs de ces quantités peuvent être égales entre elles.

4. Ceci posé, nous allons énumérer les principales propriétés des cassinoïdes qui nous serviront :

1° *Par tout point z_0 du plan, non racine de $f(z)$, passe une cassinoïde ayant pour équation*

$$|f(z)| = |f(z_0)|.$$

2° *Si le point z_0 n'est pas racine de $f'(z)$, c'est un point ordinaire pour la cassinoïde précédente ; celle-ci a une tangente unique bien déterminée et, dans le voisinage du point z_0, elle partage le plan en deux régions bien distinctes, où l'on a respectivement*

$$|f(z)| < |f(z_0)|, \qquad |f(z)| > |f(z_0).$$

L'une s'appellera la région intérieure, l'autre la région extérieure à la courbe.

Ce théorème est une conséquence de la formule

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h[f(z_0) + \epsilon],$$

dans laquelle ϵ est infiniment petit avec h.

Elle montre que le module de $f(z_0 + h)$ sera $>$ ou $<$ que celui de $f(z_0)$, suivant que la quantité

$$\arg.\left(h\frac{f'(z_0)+\epsilon}{f(z_0)}\right),$$

supposée comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, sera, en valeur absolue, $<$ ou $>$ que $\frac{\pi}{2}$. Si h est infiniment petit et $f'(z_0)$ différent de zéro, on en déduit aisément le théorème énoncé.

3° *Si z_0 est une racine d'ordre k de multiplicité de la dérivée $f'(z)$, la cassinoïde*

$$|f(z)| = |f(z_0)|$$

a un point multiple d'ordre $k+1$ en z_0. Il y a $(k+1)$ branches de courbes se coupant en z_0; elles ont toutes une tangente déterminée et les tangentes aux branches consécutives se coupent sous l'angle $\frac{\pi}{k+1}$. Enfin ces diverses branches partagent la région du plan située autour du point z_0 en $2(k+1)$ régions consécutives où l'on a alternativement

$$|f(z)| < |f(z_0)|, \qquad |f(z)| > |fz_0)|.$$

Ce théorème est une conséquence de la formule

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,[f^{(k+1)}(z_0)+\epsilon].$$

Elle montre que le module de $f(z_0 + h)$ sera $>$ ou $<$ que celui de $f(z_0)$, suivant que la quantité

$$\arg.\left(h^{k+1}\frac{f^{(k+1)}(z_0)+\epsilon}{f(z_0)}\right),$$

supposée comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, sera, en valeur absolue, $<$ ou $>$ que $\frac{\pi}{2}$. Si l'on suppose h infiniment petit et si l'on fait varier son argument de 2π, on voit que cet intervalle se décompose en $2(k+1)$ intervalles partiels égaux à $\frac{\pi}{k+1}$ tels qu'on se trouve alternativement dans le premier et dans le second des deux cas. Le théorème énoncé en résulte immédiatement.

4° *Soit* a *un nombre positif distinct de chacune des quantités* $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ (nº **3**), *la cassinoïde*

$$|f(z)| = a$$

se compose d'un ou de plusieurs contours fermés, et s'il y a plusieurs contours, ceux-ci sont extérieurs les uns aux autres. A l'intérieur de chacun d'eux, on a

$$|f(z)| < a$$

et dans la région unique extérieure à tous les contours, l'inégalité est de sens contraire.

Soit A une des régions d'un seul tenant dans laquelle on a

$$|f(z)| < a;$$

cette région ne pouvant s'étendre à l'infini, sera limitée extérieurement par un contour fermé appartenant à la cassinoïde $|f(z)| = a$ et cette courbe sera sans point multiple. De plus, la région A ne peut être à contour complexe. En effet, dans le cas contraire, elle enfermerait une région B où l'on aurait $|f(z)| > a$ et le module de $f(z)$ devrait avoir dans cette région B un maximum, ce qui est impossible. Donc la région A est limitée par un contour fermé simple. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les régions analogues, on en conclut le théorème énoncé.

5° *Lorsque* a *est égal à l'une des quantités* b_k, *on rencontre un cas limite du précédent ; la cassinoïde*

$$|f(z)| = b_k$$

se compose encore de contours fermés extérieurs les uns aux autres, mais il arrive que deux ou plusieurs contours se réunissent en un point commun, racine de $f'(z)$. On peut concevoir que deux ou plusieurs contours simples s'y touchent par leurs points anguleux, comme cela a lieu dans les figures ci-contre.

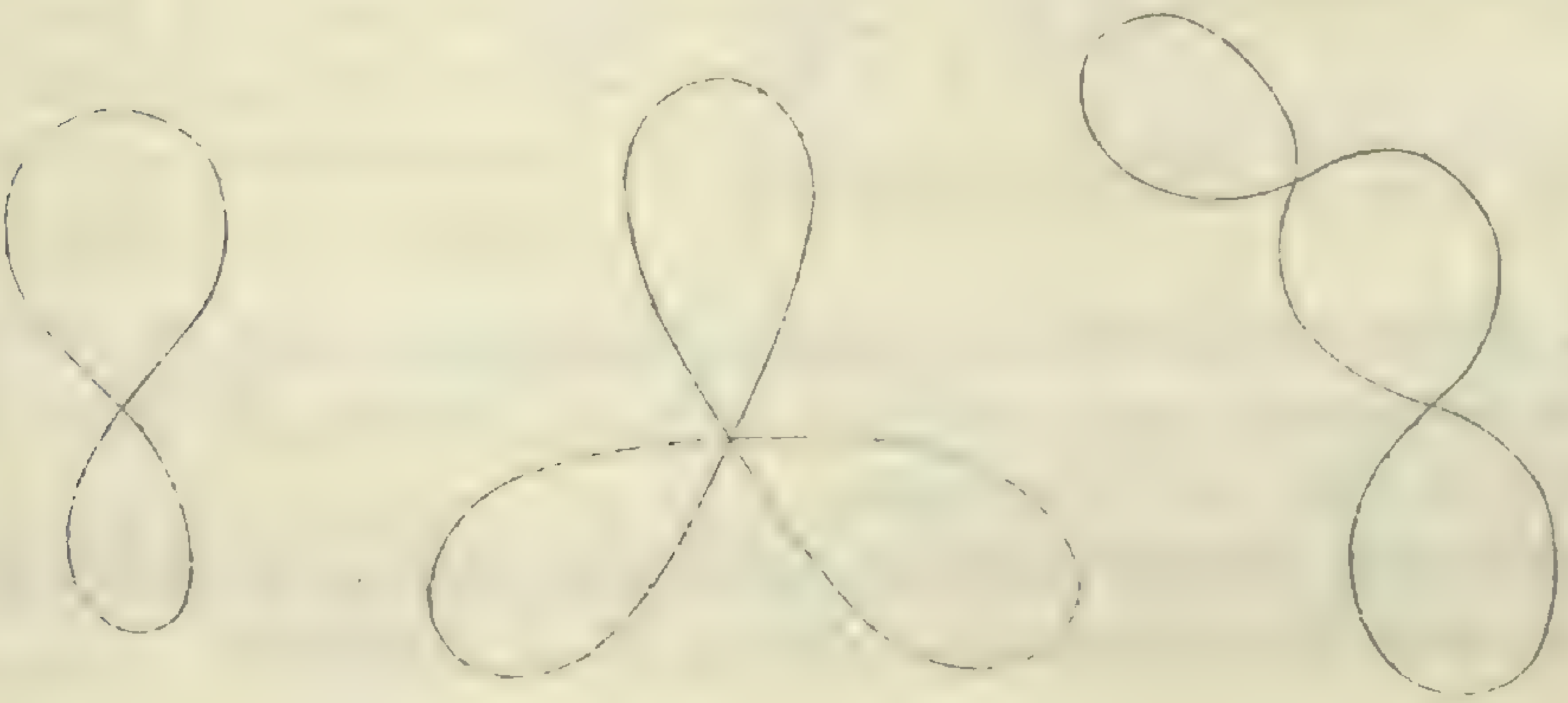
5. Si a est infiniment grand, la cassinoïde

$$|f(z)| = a$$

se réduit a un cercle de rayon infini qui enveloppe toutes les racines de $f(z)$.

Si, au contraire, a est infiniment petit, la cassinoïde se réduit à n cercles infiniment petits décrits autour de chacune des racines α de $f(z)$.

Imaginons que l'on fasse décroître a d'une manière continue depuis l'infini jusqu'à zéro. Le contour de la cassinoïde va se rétrécir constamment. Ce contour, unique d'abord, se scinde successivement en plusieurs autres, qui se rétrécissent et se scindent à leur tour. Mais le partage d'un contour en deux ou plusieurs autres ne peut avoir lieu que si a passe par l'une des valeurs b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}$. Les points où plusieurs contours se détachent l'un de l'autre sont les racines de $f'(z)$. Enfin, le partage se fait en autant de contours qu'il y a d'unités plus une dans l'ordre de multiplicité de cette racine. On déduit évidemment de là les propriétés fondamentales suivantes :



6° *Si le nombre a diffère de chacune des quantités b_k, la cassinoïde $|f(z)| = a$ se compose d'autant de contours distincts qu'il y a d'unités plus une dans le nombre des quantités b_k qui sont supérieurs à a.*

7° Si la cassinoïde

$$|f(z)| = a$$

se compose de k contours fermés, chacun de ces contours renferme au moins une racine α *de* $|f(z)|$. *Il peut en renfermer plusieurs ; mais, dans ce cas, il renferme aussi des racines* β *de* $f'(z)$ *et le nombre de de celles-ci est inférieur d'une unité à celui des racines* α *contenues dans le contour.*

6. Pour montrer l'usage que l'on peut faire de ces propriétés, supposons qu'on ait numéroté les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ de la dérivée de telle sorte qu'on ait

$$b_1 \overset{=}{>} b_2 \overset{=}{>} b_3 \ldots \overset{=}{>} b_{n-1}.$$

On aura les théorèmes suivants :

I. *Une courbe fermée sur laquelle le module de* $f(z)$ *est constamment plus grand que* b_1, *contient toutes les racines de* $f(z)$ *et de sa dérivée ou n'en contient aucune.*

Soit ϵ une quantité positive infiniment petite. La courbe considérée aura tous ses points en dehors de la cassinoïde

$$|f(z)| = b_1 + \epsilon.$$

Celle-ci se compose d'un contour unique enveloppant toutes les racines (6° et 7°). La courbe considérée enveloppe ce contour ou ne l'enveloppe pas, d'où le théorème énoncé.

II. *Une courbe fermée sur laquelle le module de* $f(z)$ *est constamment* $< b_1$, *contient au plus* $(n - 1)$ *racines de* $f(z)$.

En effet, cette courbe a tous ses points à l'intérieur de la cassinoïde

$$|f(z)| = b_1 - \epsilon$$

qui se compose au moins de deux contours fermés (6°) renfermant chacun une racine au moins (7°). La courbe considérée étant à l'intérieur d'un de ces deux contours, ne peut donc contenir toutes les racines.

III. *Une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ est constamment $< b_k$, ne peut contenir plus de $(n - k)$ racines de $f(z)$.*

En effet, cette courbe a tous ses points à l'intérieur de la cassinoïde

$$|f(z)| = b_k - \epsilon.$$

Celle-ci se compose au moins de $k + 1$ contours séparés (6°) renfermant chacun au moins une racine. La courbe considérée étant intérieure à l'un de ces contours, il en reste au moins k à l'extérieur et, par suite, il reste au moins k racines à l'extérieur de cette courbe.

IV. *En particulier, une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ reste inférieur à la plus petite b_{n-1} des quantités b_k, ne peut contenir qu'une seule racine de $f(z)$.*

Ce dernier théorème peut donner un criterium commode pour la séparation des racines.

V. *Une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ reste compris entre deux quantités consécutives b_k et b_{k+1} et qui contient p racines de $f(z)$ en contient $(p - 1)$ de la dérivée.*

En effet, cette courbe sera située tout entière dans l'espace annulaire, compris entre deux contours intérieurs l'un à l'autre des deux cassinoïdes

$$|f(z)| = b_{k+1} - \epsilon, \qquad |f(z)| = b_k + \epsilon.$$

Entre ces deux contours, il n'y a aucune racine de $f(z)$ ni de $f'(z)$. Donc la courbe renferme autant de racines de l'un et de l'autre polynome que les contours correspondants de ces cassinoïdes. Le théorème résulte alors de la propriété (7°) de ces contours.

§ 2. — PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES. CONSÉQUENCES.

7. Les courbes sur lesquelles l'argument de $f(z)$ est constant, sont, on le sait, les *trajectoires orthogonales* des courbes considérées précédemment. C'est pourquoi nous leur donnerons le nom général de *trajectoires*.

Ces trajectoires jouissent de propriétés qui correspondent à celles des cassinoïdes et qui se démontrent d'une manière tout à fait analogue.

1° *Par tout point* z_0 *du plan non racine de* $f(z)$, *passe une trajectoire qui a pour équation*

$$\arg.\ f(z) = \arg.\ f(z_0).$$

2° *Si ce point* z_0 *n'est racine ni de* $f(z)$ *ni de* $f'(z)$, *c'est un point ordinaire pour la trajectoire qui y passe. Celle-ci a une tangente unique bien déterminée en ce point. Si on parcourt la trajectoire dans le voisinage de ce point, le module de* $f(z)$ *va en croissant dans un sens et en décroissant dans l'autre.*

3° *Si le point* z_0 *est une racine d'ordre* k *de multiplicité pour* $f'(z)$, *la trajectoire passant par ce point y possède un point multiple d'ordre* $k + 1$. *On peut alors, à partir du point* z_0, *se déplacer sur la trajectoire dans* $2(k + 1)$ *directions différant successivement entre elles d'un angle* $\frac{\pi}{k+1}$. *Si l'on considère successivement ces diverses directions consécutives, le module de* $f(z)$ *va alternativement en croissant et en décroissant quand on s'éloigne du point* z_0.

4° *Si le point* z_0 *est racine de* $f(z)$, *l'argument de* $f(z_0)$ *est indéterminé. Il y a, dans ce cas, une infinité de trajectoires passant par ce point et il y en a une correspondant à toutes les valeurs possibles que l'on peut assigner à l'argument de* $f(z)$. *Mais chacune de ces trajectoires présente en* z_0 *un point d'arrêt.*

Soit, en effet, θ une valeur quelconque assignée à l'argument de $f(z)$ et considérons la trajectoire

$$\arg.\ f(z) = \theta.$$

Soit $z_0 = \alpha_1$ et posons $z = \alpha_1 + h$; on aura, si h est infiniment petit,

$$\arg.\ f(z) = \arg.\ h + \sum_{k=2}^{n} \arg.\ (\alpha_1 - \alpha_k).$$

On en déduit toujours une valeur et une seule de arg. h pour laquelle on aura arg. $f(z) = \theta$. Donc cette trajectoire possède une branche unique dans le voisinage de $z = \alpha$ et cette branche vient s'arrêter en ce point.

Désignons maintenant par

$$\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{n-1}$$

les arguments des quantités

$$f(\beta_1), f(\beta_2), \dots f(\beta_{n-1}).$$

5° *Si* θ *désigne un argument différent de tous les précédents, la trajectoire*

$$\text{arg. } f(z) = \theta$$

se compose de n branches de courbes séparées, partant respectivement de chacune des racines α *de* $f(z)$ *et s'éloignant jusqu'à l'infini sans se rencontrer. Le long de chacune d'elles, le module de* $f(z)$ *va constamment en croissant de* 0 *à* ∞.

Ceci résulte des propriétés 2° et 4°; la branche issue d'une racine ne peut ni se fermer, ni aboutir à une autre racine, puisque le module va en croissant quand on s'avance sur cette branche; elle s'éloigne donc jusqu'à l'infini.

8. Ceci posé, supposons qu'il y ait μ quantités distinctes dans la suite $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ et désignons-les par

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\mu,$$

les indices étant choisis de telle sorte que la suite de ces quantités aille constamment en croissant entre les limites 0 et 2π.

Imaginons que l'on décrive une circonférence de cercle assez grande pour contenir toutes les racines de $f(z)$ et de $f'(z)$ et pour que l'argument de $f(z)$ varie toujours dans le même sens quand on parcourt cette circonférence. Nous appellerons cette circonférence la *circonférence limite*. Menons ensuite les μ trajectoires

$$\text{arg. } f(z) = \tau_k$$

que nous appellerons les *trajectoires frontières*.

Je dis que *ces trajectoires décomposent le cercle en* μn *régions, telles qu'il y ait une racine de* $f(z)$ *et une seule sur la frontière de chacune d'elles et que chacune de ces régions ait une partie de sa frontière et une seule sur la circonférence limite.*

Soit A une quelconque des régions dans lesquelles on a décomposé le cercle et soit z_0 un point situé à l'intérieur de cette région. Par le point z_0 passe une trajectoire qui part d'une racine α de $f(z)$ et vient rencontrer la circonférence limite. Désignons cette trajectoire par

$$\arg. f(z) = \theta.$$

Si l'on fait croître ou décroître θ d'une manière continue, la trajectoire se déforme et se déplace en tournant autour de la racine α et cela d'*une manière continue* aussi longtemps qu'elle ne vient pas rencontrer une racine de $f'(z)$. Supposons que θ tombe entre les deux valeurs successives τ_1 et τ_2. Si on fait varier cet argument de $\tau_1 + \epsilon$ à $\tau_2 - \epsilon$, la trajectoire balayera tout un secteur ayant son sommet au point α et terminé à la circonférence limite. En supposant ϵ infiniment petit, ce secteur s'étendra à toute la région A que l'on examine. Comme le module de $f(z)$ est constamment croissant quand on parcourt les trajectoires d'argument $\tau_1 + \epsilon$ et $\tau_2 - \epsilon$ issues de la racine α, il ne peut y avoir d'autre racine sur la frontière de A. Le théorème est donc prouvé en ce qui concerne la nature des diverses régions.

Quant au nombre des régions, il y en a μ autour de chaque racine et comme une même région ne peut avoir deux racines sur sa frontière, il y aura en tout μn régions.

9. Les frontières de ces diverses régions établissent alors une connexité entre les diverses racines dont on peut formuler la propriété fondamentale dans le théorème suivant que nous allons démontrer :

Étant données deux racines quelconques de $f(z)$, *on peut toujours passer de l'une à l'autre en suivant les trajectoires frontières et on ne le peut que d'une seule manière sans parcourir d'impasse.*

Chaque région est limitée par des portions de trajectoires et une portion de la circonférence limite. Nous appellerons les premières ses frontières fixes et la dernière sa frontière limite. Ceci admis, soient α_1 et α_2 deux racines quelconques situées sur les frontières de deux régions A et B ; soit P un des points où la frontière fixe de A rencontre la circonférence limite. Suivons cette circonférence en dehors de A jusqu'à ce qu'on rencontre en Q la frontière fixe de B. Hachurons maintenant toutes les régions dont nous avons ainsi parcouru une frontière limite. La région totale hachurée n'aura qu'une seule frontière limite PQ. Par conséquent, sa frontière fixe mettra en communication les frontières fixes de A et de B et, par suite, les deux racines α_1 et α_2.

D'autre part, il n'y aura pas d'autre chemin pour aller de α_1 à α_2, car, s'il y en avait deux, ils enfermeraient une région sans frontière limite et il n'en existe pas.

10. Le théorème précédent peut s'énoncer comme il suit :

Étant données deux racines de $f(z)$, par exemple α_1 et α_2, on peut toujours faire varier z de α_1 à α_2 de telle façon que l'argument de $f(z)$ ne change que quand $f(z)$ passe par zéro et le chemin qui vérifie cette condition est unique.

11. La trajectoire d'égal argument, qui mène ainsi d'une racine α_1 à une racine α_2 de l'équation $f(z) = 0$, passera généralement par un certain nombre d'autres racines de cette équation. On dira, dans ce cas, que celles-ci sont *intermédiaires* entre les deux autres et se suivent dans l'ordre où on les rencontre quand on va de α_1 à α_2.

Deux racines seront *consécutives*, si la trajectoire qui les réunit ne passe par aucune racine de l'équation.

12. Sur ces trajectoires qui réunissent les racines de $f(z)$ entre elles, l'argument de $f(z)$ ne change que quand on passe par une racine de cette fonction. De plus, on se rappellera que la variation du module de $f(z)$ ne peut changer de sens que si l'on passe par une racine de $f(z)$ ou de sa dérivée. D'où la conclusion suivante :

La trajectoire qui réunit deux racines consécutives d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée. La trajectoire qui réunit deux racines quelconques d'une équation passe au moins par une *racine de la dérivée et au moins par autant d'autres racines en plus que de racines intermédiaires de l'équation.*

Dans le cas où une équation a ses coefficients réels et possède des racines réelles, la trajectoire qui réunit ces racines réelles n'est autre que l'axe réel et le théorème précédent se réduit au théorème de Rolle.

SUR LE QUADRILATÈRE COMPLET

PAR

J. NEUBERG
Professeur à l'Université de Liége.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre droites quelconques situées dans un même plan et dont trois ne passent pas par un même point. Elles forment quatre triangles $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_1$, $a_4a_1a_2$, $a_1a_2a_3$ que nous représenterons par T_1, T_2, T_3, T_4; nous désignerons par A_1, A_2, A_3 les sommets de T_4 respectivement opposés à a_1, a_2, a_3. et par A_4, A_5, A_6 les points a_4a_1, a_4a_2, a_4a_3.

Il est intéressant d'étudier la figure déterminée par quatre éléments analogues des triangles T. Ainsi, on sait que les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 de ces triangles sont sur une même droite, directrice de la parabole π tangente aux quatre droites a. Les circonférences circonscrites passent par un même point F, foyer de la parabole π, et leurs centres O_1, O_2, O_3, O_4 sont sur une même circonférence ω passant par F; les rayons de ces cercles menés par les sommets des triangles T correspondants concourent trois à trois en quatre points de la circonférence ω.

La présente note a pour objet principal le quadrangle formé par les centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4 des triangles T. Nous indiquerons également quelques propriétés des points de Lemoine K_1, K_2, K_3, K_4 de ces triangles.

1. Appliquons aux six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ six masses égales à μ; nous donnerons au centre de gravité G de ces masses le nom de *barycentre* du quadrilatère complet $a_1a_2a_3a_4$. Ce point peut être déterminé de plusieurs manières.

Si l'on combine les deux masses μ appliquées aux extrémités d'une même diagonale A_1A_4, A_2A_5 ou A_3A_6, on réduit les six masses μ à trois masses 2μ attachées aux milieux B_1, B_2, B_3 des diagonales. Donc G est situé sur la droite qui unit les milieux des trois diagonales (la *newtonienne* du quadrilatère) et l'on a $CG = \frac{1}{3} CB_1$, C désignant le milieu de la distance B_2B_3 (*).

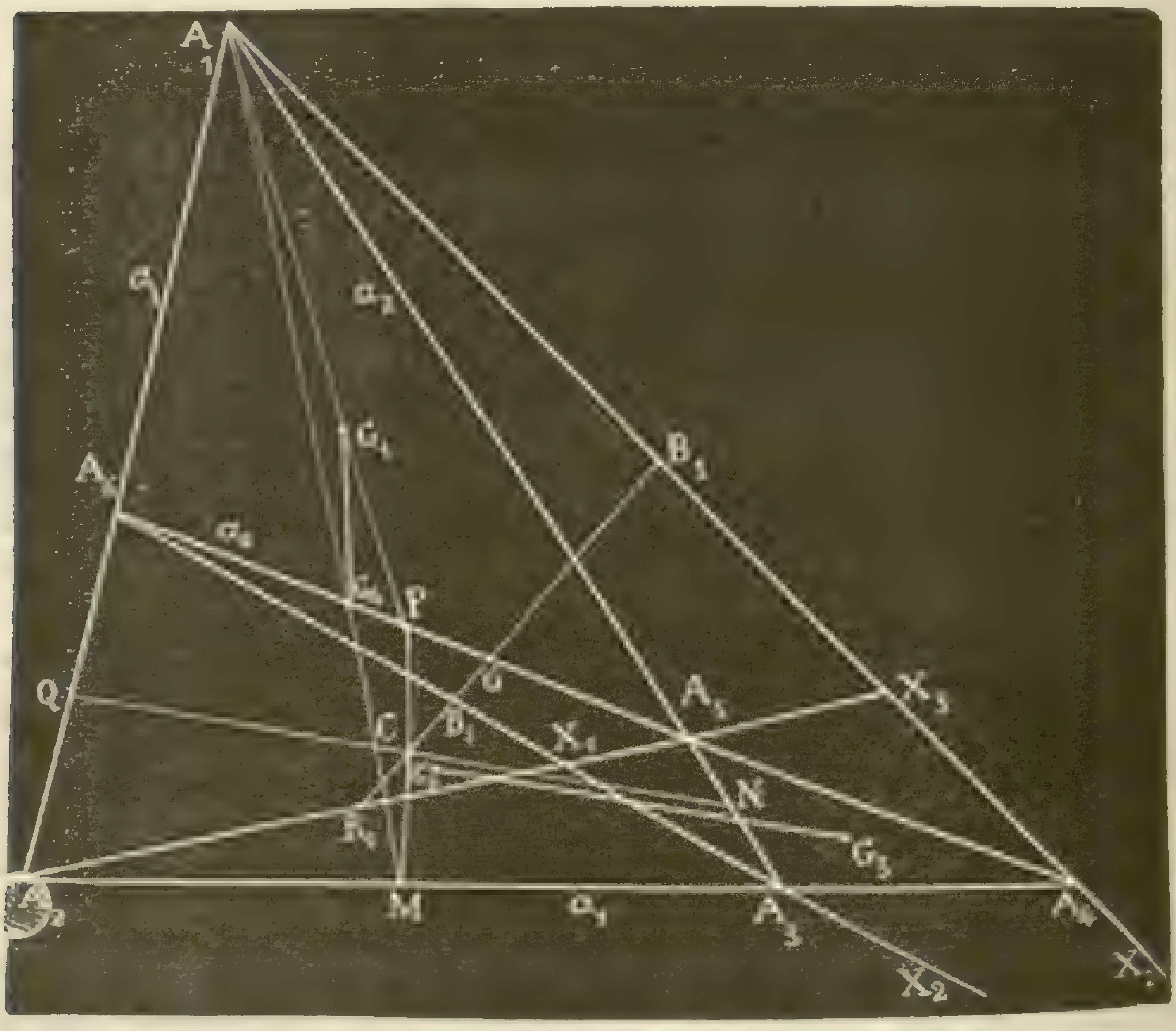


Fig. 1

Décomposons en chaque sommet la masse μ en deux masses égales $\frac{1}{2}\mu$; nous pourrons remplacer trois masses $\frac{1}{2}\mu$ attachées aux sommets du triangle T_i par une masse $\frac{3}{2}\mu$ attachée au centre de gravité G_i. Le système primitif est donc équivalent à quatre masses $\frac{3}{2}\mu$ appliquées en G_1, G_2, G_3, G_4. Par conséquent, le point G coïncide avec le barycentre du quadrangle $G_1G_2G_3G_4$, c'est-à-dire

---

(*) C'est fortuitement que le point G_4 se trouve sur a_4.

avec le milieu commun des trois droites joignant les milieux de deux côtés opposés de ce quadrangle.

Enfin, on peut combiner les masses μ appliquées aux trois sommets du triangle T_i, de même que celles qui sont attachées aux points d'intersection de la droite a_i avec les trois autres droites. Si donc on appelle G'_i le centre de gravité de trois masses égales placées aux trois sommets du quadrilatère appartenant à la droite a_i, le point G est le milieu commun des quatre droites $G_1G'_1$, $G_2G'_2$, $G_3G'_3$, $G_4G'_4$.

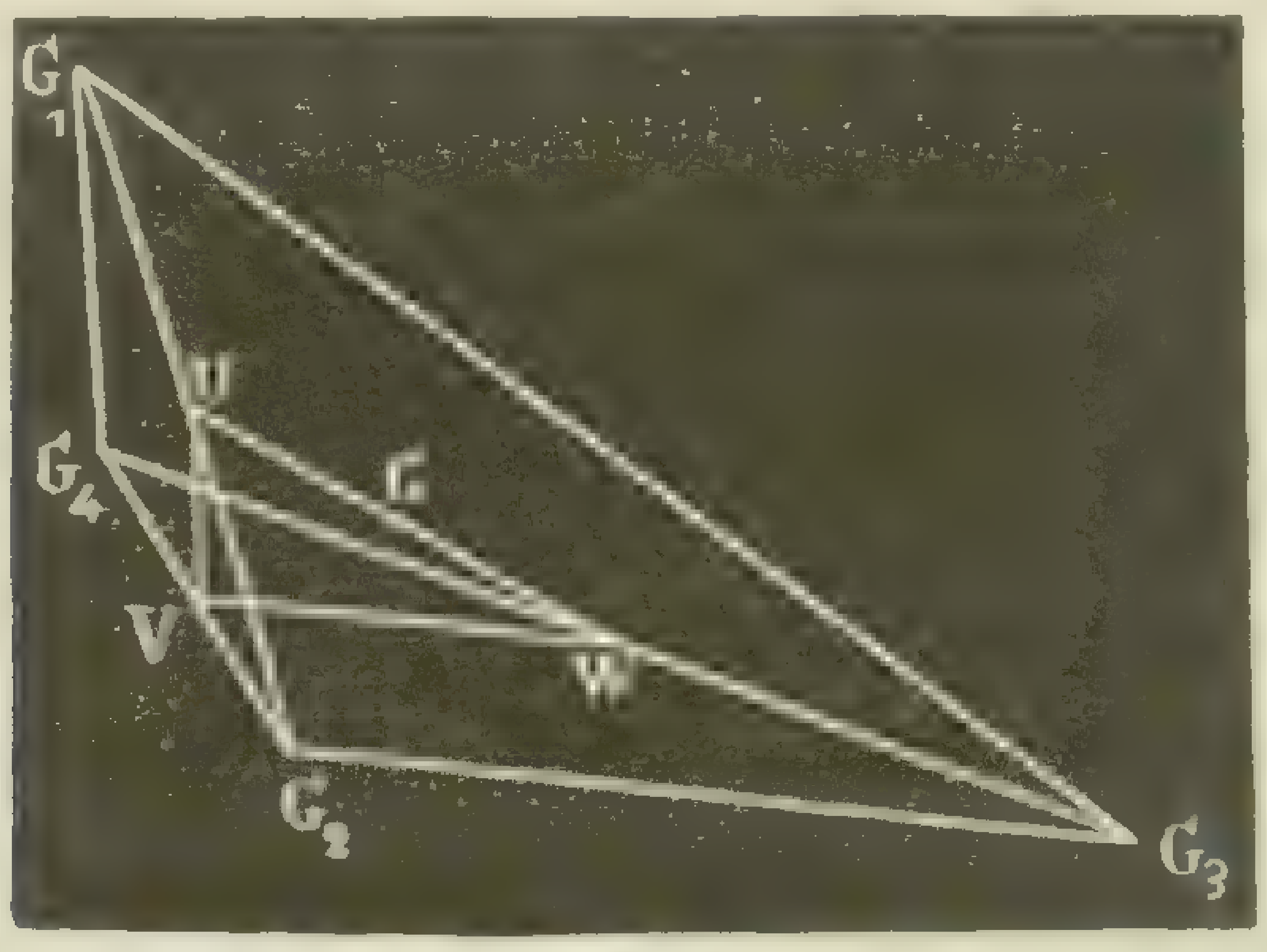


Fig. 2

2. Désignons par M, N, P, Q les milieux des segments A_2A_3, A_3A_5, A_5A_6, A_6A_2. Les points G_4, G_1 divisent les droites A_1M, A_1P dans le rapport 2 : 1; donc la droite G_4G_1 est parallèle à MP et égale à $\frac{2}{3}$ MP. Semblablement, G_2G_3 est parallèle à QN et égale à $\frac{2}{3}$ QN. On voit par là que les trois couples de côtés opposés du quadrangle complet $G_1G_2G_3G_4$ sont parallèles aux droites qui joignent les milieux des côtés opposés dans les quadrilatères simples $A_2A_3A_5A_6$, $A_1A_3A_4A_6$, $A_1A_5A_4A_2$.

Soient U, V, W les milieux des droites G_1G_2, G_2G_4, G_4G_3. Les droites VU, VW parallèles à G_4G_1, G_2G_3 sont parallèles à CP, CN et égales à $\frac{1}{2}\,G_4G_1$, $\frac{1}{2}\,G_2G_3$ ou égales à $\frac{2}{3}$ CP, $\frac{2}{3}$ CN, C étant le milieu commun des droites MP, QN, B_2B_3. Il en résulte que VW est parallèle à PN et égale à $\frac{2}{3}$ PN, ou parallèle à A_6A_3 et égale à $\frac{1}{6}\,A_6A_3$. Ainsi, les trois droites qui joignent les milieux de deux côtés opposés du quadrangle complet $G_1G_2G_3G_4$ sont parallèles aux trois diagonales du quadrilatère complet $a_1a_2a_3a_4$ et égales respectivement au tiers de la diagonale parallèle.

3. Étant donné le quadrangle $G_1G_2G_3G_4$, comment peut-on en déduire le quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$?

Le barycentre G du quadrangle est un point de la newtonienne $B_1B_2B_3$; en construisant les symétriques G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 des sommets du quadrangle par rapport à G, on obtient un point de chacune des droites a_1, a_2, a_3, a_4. Il suffit donc de connaître encore les directions de ces lignes.

Les droites qui unissent les milieux des côtés opposés du quadrangle $G_1G_2G_3G_4$ étant parallèles et proportionnelles aux diagonales du quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$, le problème est ramené au suivant :

Construire un quadrilatère complet, connaissant trois lignes équipollentes aux trois diagonales.

Soient X_1, X_2, X_3 les points d'intersection des diagonales (A_2A_5, A_3A_6), (A_3A_6, A_1A_4), (A_1A_4, A_2A_5) du quadrilatère. Connaissant les directions de ces diagonales, on peut tracer un triangle auxiliaire $X'_1X'_2X'_3$ homothétique à $X_1X_2X_3$; si m_1, m_2, m_3 sont les longueurs des côtés de $X'_1X'_2X'_3$, celles de $X_1X_2X_3$ sont ρm_1, ρm_2, ρm_3, ρ étant un facteur inconnu. Les côtés du triangle $X_1X_2X_3$ sont divisés harmoniquement par les couples de points A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, et les points A_1, A_2, A_6 sont en ligne droite ; par suite, les droites X_1A_4, X_2A_5, X_3A_3 concourent en un même point Y, pôle trilinéaire de la droite A_2A_6 par rapport au triangle de référence $X_1X_2X_3$.

Appelons x_1, x_2, x_3 les coordonnées barycentriques de Y dans le triangle $X_1X_2X_3$. Nous aurons

$$\frac{X_2A_4}{A_4X_3} = -\frac{X_2A_1}{A_1X_3} = \frac{x_3}{x_2},$$

d'où l'on déduit d'abord

$$X_2A_4 = X_2X_3\,\frac{x_3}{x_2+x_3}, \qquad X_2A_1 = X_2X_3\,\frac{x_3}{x_3-x_2},$$

et ensuite

$$A_4A_1 = X_2X_3\,\frac{2x_2x_3}{x_3^2-x_2^2}.$$

Les longueurs A'_1A_1, A_2A_5, A_3A_6 sont connues; désignons-les par n_1, n_2, n_3. L'équation précédente et les deux autres analogues prennent la forme

$$n_1 = \rho m_1 \frac{2x_2x_3}{x_3^2 - x_2^2}, \quad n_2 = \rho m_2 \frac{2x_3x_1}{x_1^2 - x_3^2}, \quad n_3 = \rho m_3 \frac{2x_1x_2}{x_2^2 - x_1^2}.$$

Si l'on représente les rapports $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}$ par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on peut écrire

$$x_3^2 - x_2^2 = 2\rho\lambda_1x_2x_3, \quad x_1^2 - x_3^2 = 2\rho\lambda_2x_3x_1, \quad x_3^2 - x_1^2 = 2\rho\lambda_3x_1x_2.$$

En éliminant ρ on obtient deux équations qui déterminent les coordonnées x_1, x_2, x_3. Pour faire cette élimination de manière à éviter des solutions étrangères, nous ajoutons d'abord les trois équations membre à membre, ce qui donne

$$(1) \qquad \frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \frac{\lambda_3}{x_3} = 0.$$

En les ajoutant membre à membre après les avoir multipliées respectivement par x_1^2, x_2^2, x_3^2, on obtient

$$(2) \qquad \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 = 0.$$

Les équations (1) et (2) permettent de construire sur le triangle $X'_1X'_2X'_3$ comme homologue de $X_1X_2X_3$ une figure homothétique au quadrilatère cherché. Elles représentent une conique et une droite dont chacun des points d'intersection peut être pris pour l'homologue de Y.

La droite (2) est la polaire trilinéaire du point qui a pour coordonnées $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ ou $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \frac{n_3}{m_3}$. Le lieu de l'équation (1) est la transformée par points réciproques de cette polaire. Par suite, les deux points qui correspondent à Y sont des points réciproques par rapport à $X'_1X'_2X'_3$; résultat qui s'explique *à priori*.

Si l'on élimine x_3 entre les équations (1) et (2), on obtient

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_1\lambda_2} x_1x_2 = 0.$$

On en conclut que le problème admet deux solutions réelles si l'on a

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2 > 0$$

ou

$$\Sigma\lambda_1^4 - 2\Sigma\lambda_1^2\lambda_2^2 > 0.$$

Par suite, la plus grande valeur absolue des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ doit être plus grande que la somme des deux autres.

4. Pour résoudre le même problème, on peut s'appuyer sur la proposition suivante :

Si les côtés d'un triangle variable ABC *pivotent autour de trois points fixes* A', B', C' *de manière que le barycentre* G *du triangle reste fixe, le sommet* A *décrit une conique passant par* B' *et* C'.

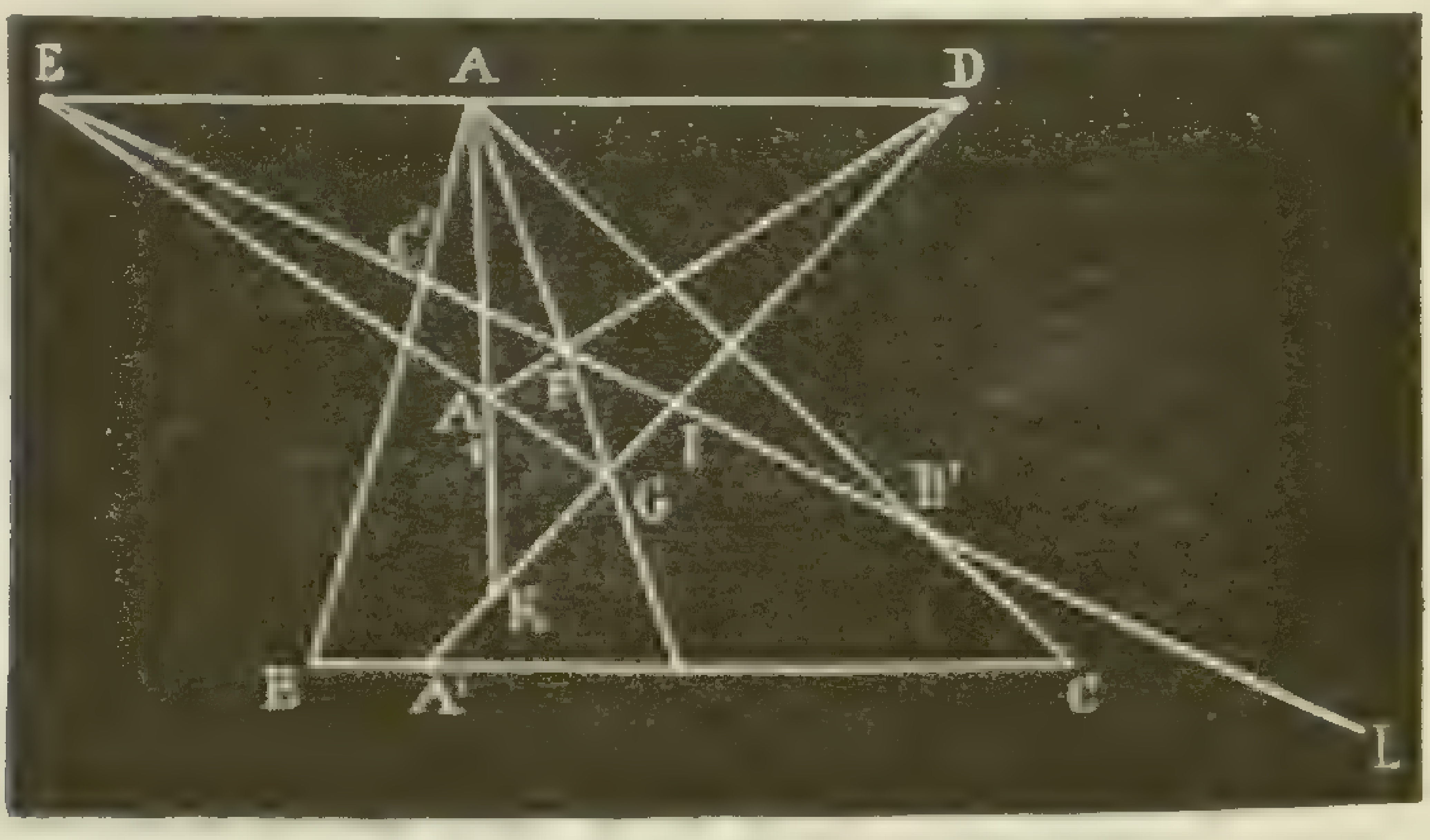


Fig. 3

Pour démontrer ce théorème, prolongeons A'G de GD = 2A'G ; la parallèle menée par A à BC passe constamment par le point D. Mais cette parallèle, la médiane AG et les côtés AC, AB forment un faisceau harmonique, qui détermine sur la droite B'C' une division harmonique EFB'C'. Par conséquent, si l'on construit l'involution qui a pour éléments doubles les points B', C', on obtint une position de A en projetant deux points conjugués quelconques E, F, l'un à partir de D, l'autre à partir de G. Les deux faisceaux projetants étant projectifs, l'intersection des rayons homologues engendre une conique passant par les centres G, D des deux faisceaux.

Un couple EF de l'involution donne deux points A, A_1 de la conique, car on peut joindre G à F et D à E ou G à E et D à F. La droite AA_1 passe par un point fixe K de GD; en effet, la diagonale GD du quadrilatère complet EA_1FA est divisée harmoniquement par les deux autres EF, AA_1 en I et K. Soit L le conjugué harmonique de I par rapport à $B'C'$; en remplaçant le couple EF par IL, on voit facilement que GL et DL sont les tangentes en G et D à la conique. Si l'on prend pour EF le couple BB' ou CC', on trouve que B' et C' sont deux points de la courbe et que les tangentes en ces points concourent en K.

Cela posé, si l'on donne le quadrangle $G_1G_2G_3G_4$, on peut déterminer les points G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 appartenant aux côtés a_1, a_2, a_3, a_4 du quadrilatère cherché. Connaissant les points G'_1, G'_2, G'_3 des côtés du triangle $a_1a_2a_3$ et le barycentre G_4, construisons la conique lieu du point a_1a_2; cette courbe passe par G_4, G'_1, G'_2. Construisons encore la conique lieu du sommet a_1a_2 du triangle $a_1a_2a_4$ dont les côtés passent par G'_1, G'_2, G'_4 et qui a pour barycentre G_3. Ces deux coniques qui ont deux points communs G'_1, G'_2, se coupent encore en deux autres points dont chacun peut être pris pour le point a_1a_2. Le problème s'achève maintenant facilement.

5. Dans les triangles

$$T_4 \equiv A_1A_2A_3, \qquad T_2 \equiv A_6A_2A_4, \qquad T_3 \equiv A_5A_3A_4,$$

qui ont le côté commun a_1, traçons les médianes A_1G_4, A_6G_2, A_5G_3 qui correspondent à ce côté. Si I_1 désigne le point à l'infini sur a_1, les médianes considérées sont les conjuguées harmoniques des droites A_1I_1, A_6I_1, A_5I_1 par rapport aux angles A_1, A_6, A_5 du triangle $T_1 \equiv A_1A_6A_5$; par suite elles rencontrent les côtés opposés de T_1 en trois points de la polaire trilinéaire de I_1. Cette polaire est tangente à l'ellipse inscrite à T_1 et ayant son centre en G_1.

6. Dans les cercles circonscrits aux trois triangles T_4, T_2, T_3, menons les rayons A_1O_4, A_6O_2, A_5O_3 par les sommets opposés au côté commun a_1. Ces droites sont les isogonales des hauteurs A_1H_4, A_6H_2, A_5H_3 par rapport aux angles A_1, A_6, A_5 du triangle T_1; on en conclut qu'elles concourent en un même point D_1 qui est l'inverse par rapport au triangle T_1 du point à l'infini dans la direction perpendiculaire à a_1. D_1 appartient à la circonférence circonscrite au triangle T_1 ; c'est le foyer de la parabole inscrite au triangle et dont les diamètres sont perpendiculaires à a_1.

On démontre facilement que les quatre points D_1, D_2, D_3, D_4 sont les seconds points d'intersection des circonférences O_1, O_2, O_3, O_4 avec la circonférence qui passe par leurs centres.

7. Menons en A_1, A_6, A_5 les tangentes aux circonférences O_4, O_2, O_3 ; ces droites perpendiculaires aux rayons A_1D_1, A_6D_1, A_5D_1 concourent au point E_1 diamétralement opposé à D_1 sur la circonférence O_1. E_1 est le foyer de la parabole inscrite au triangle T_1 et dont l'axe est parallèle à a_1 ; c'est l'inverse du point I_1 par rapport à T_1.

Les propositions des §§ 5 et 6 sont connues; nous les avons démontrées ici à cause de la propriété du § 7, due à Wetzig (J. de Crelle, t. LXII, p. 351) qui l'a établie autrement.

8. Soient K_1, K_2, K_3, K_4 les points de Lemoine des triangles T_1, T_2, T_3, T_4.

Les symédianes A_1K_4, A_6K_2, A_5K_3 sont conjuguées harmoniques des tangentes A_1E_1, A_6E_1, A_5E_1 aux cercles O_4, O_2, O_3 par rapport aux angles A_1, A_6, A_5 du triangle T_1 ; par suite elles rencontrent les côtés opposés de T_1 en trois points appartenant à la polaire trilinéaire du point E_1. Ce point étant situé sur la circonférence O_1, sa polaire passe par le point K_1.

9. La théorie du centre des moindres carrés *(point de Gauss)* d'un système de droites conduit à quelques autres propriétés assez curieuses des points K_1, K_2, K_3, K_4.

Appelons K le point de Gauss du quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$; c'est le point dont la somme des carrés des distances aux côtés du quadrilatère est minimum. Il est le barycentre de ses projections sur ces côtés.

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 les symétriques d'un point quelconque M par rapport à $a_1a_2a_3a_4$; le barycentre M′ de ces points est appelé le *barycentre symétrique* de M. Les points M, M′ se correspondent dans deux figures symétriquement semblables φ, φ' ayant pour point double le point K. Si N est un second point quelconque et N′ son barycentre symétrique, le point K est à l'intersection de deux droites rectangulaires KX, KY qui divisent les segments MM′, NN′ l'une additivement, l'autre soustractivement dans le rapport MN : M′N′. Ces droites KX, KY, lignes doubles des deux figures φ, φ′, sont les axes de l'une quelconque des ellipses lieux des points dont la somme des carrés des distances aux droites a_1, a_2, a_3, a_4 a une valeur donnée.

Ces notions étant rappelées, observons que K_1 est le barycentre de ses symétriques par rapport à a_2, a_3, a_4; le barycentre symétrique K'_1 de K_1 est donc le milieu de la distance de K_1 à a_1. Les quadrilatères $K_1K_2K_3K_4$, $K'_1K'_2K'_3K'_4$ sont inversement semblables.

Le point K est le centre de gravité des six sommets a_1a_2, a_2a_3, . . ., a_4a_3 du quadrilatère pour des masses proportionnelles à $\sin^2 a_1a_2$, $\sin^2 a_2a_3$, . . ., $\sin^2 a_4a_3$. Cette propriété admet des conséquences analogues à celles que nous avons développées au nº 1, mais d'une nature moins simple.

DEUX LETTRES INÉDITES

DE

GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT

publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de Saint-Vincent

ET

LES MANUSCRITS DE DELLA FAILLE

PAR

Henri BOSMANS, S. J.

Introduction

Vers l'année 1873, un historien de la Compagnie de Jésus, le P. Charles Waldack trouvait, à Gand, une lettre autographe de Grégoire de Saint-Vincent, et la communiquait à A. Quetelet, alors directeur de l'Observatoire et secrétaire perpétuel de l'Académie royale de Belgique. Cette lettre, disait-il, prise en elle-même n'était pas bien importante; mais elle offrait cependant un grand intérêt provenant surtout de la signature de son auteur. Aussi eut-elle immédiatement trois éditions; le P. Waldack la publiait lui-même dans les *Précis historiques* et en même temps Quetelet la faisait paraître dans les *Bulletins de l'Académie* et dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique* (¹).

Quinze ans plus tard, en 1888, la Société hollandaise des Sciences commençait la publication de la correspondance du grand Huygens (²) et y insérait de nombreuses lettres de Grégoire de Saint-Vincent, dont Mgr Monchamp donnait, en 1894, dans les *Bulletins de l'Académie*, une analyse très remarquée ; preuve nouvelle de l'intérêt que les savants ont toujours attaché aux trop rares lettres de l'illustre mathématicien brugeois (³). J'ai donc cru être agréable à la Société Scientifique en lui présentant à mon tour deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent.

I

La minute originale de la première se trouve aux Archives du Royaume à Bruxelles (⁴). Elle est datée de Gand, le 12 avril 1655, et est adressée au P. Remi Happart (⁵), religieux de la Compagnie de Jésus, habitant alors la Maison professe d'Anvers. Cette lettre est inédite, je l'ai dit ; mais son existence est connue depuis longtemps, et il est vraiment surprenant que personne, jusqu'ici, n'ait songé à la publier. Le P. Vanderspeeten entre autres l'a eue en mains. A plusieurs reprises, il en parle dans sa notice sur Jean-Charles della Faille (⁶), et en traduit même quelques extraits. Il eût mieux valu en publier intégralement le texte lui-même, du moins en appendice et comme pièce justificative, les détails omis n'étant peut-être pas dénués d'intérêt et la traduction rendant assez mal certaines nuances de la pensée de l'auteur.

La lettre de Grégoire de Saint-Vincent tout entière a pour objet la vie et les travaux de Jean-Charles della Faille, son élève. Après avoir loué sa mortification et sa piété, Saint-Vincent s'étend avec complaisance sur la profondeur de sa science. Della Faille est un peu oublié aujourd'hui et on lit avec une certaine surprise, dans la correspondance de Huygens (⁷), en quelle estime le célèbre hollandais le tenait. « Collègue de Guldin, professeur de della Faille, écrit-il à Saint-Vincent, le 8 novembre 1651, vous avez eu un élève bien supérieur à votre collègue (⁸). » On entendra le vieux jésuite répéter avec émotion la même phrase au P. Happart, et toute cette partie de sa lettre est un complément heureux d'une page de la correspondance de Huygens.

La lettre de Saint-Vincent mérite aussi l'attention à un autre point de vue. On le sait, un seul grand travail de della Faille, le traité *De Centro gravitatis* (⁹) a été publié jusqu'ici ; encore le fut-il malgré l'auteur. Saint-Vincent dut faire violence à son élève (10), se procurer son manuscrit et se charger lui-même de l'édition. Ce traité est cependant le moindre des écrits de della Faille. Au lieu d'un seul volume, dit Saint-Vincent au P. Happart, il eût pu en jeter dans le public au moins une trentaine. „ Aussi, ajoute-t-il, je prie Votre Révérence de faire l'impossible pour renvoyer ses manuscrits en Belgique. Ils sont, je vous l'affirme, de très grande valeur, et se perdront à coup sûr en Espagne. „ Ils s'y perdirent, en effet, au milieu des papiers de don Juan d'Autriche, dans les fonds des archives espagnoles, où ils se trouvent probablement encore à cette heure. Puisse la lettre de Grégoire de Saint-Vincent appeler sur eux l'attention et aider à les découvrir! Je reviendrai tantôt sur ce sujet (11).

II

La deuxième lettre a, comme la première, été écrite à Gand, en 1655, et est datée du 1er mai. La minute se trouve à la Bibliothèque du Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain. On l'a collée jadis et probablement dès sa réception, en tête du premier volume du *Novum Almagestum* de Riccioli (12), sur le plat intérieur de la reliure. Une note manuscrite écrite au haut du titre de cet ouvrage nous apprend, qu'en 1655, il appartenait au Collège de la Compagnie de Jésus à Bruxelles. Le destinataire de la lettre est inconnu (13), mais le but qu'il a visé en la provoquant n'est pas douteux : mettre en évidence la valeur du *Novum Almagestum,* en s'appuyant sur la grande autorité d'un juge aussi compétent que Saint-Vincent. Les premières lignes de la lettre nous font malheureusement défaut, lacune confirmant qu'elle fut vraisemblablement fixée à sa place actuelle dès l'origine. Quelques années plus tard, en 1667, Saint-Vincent n'était plus, et l'on eût, semble-t-il, gardé, avec plus de souci de conservation et plus de respect, ce souvenir de lui.

III

Grégoire de Saint-Vincent naquit à Bruges le 8 septembre 1584 et mourut à Gand le 27 janvier 1667. Les principaux traits de sa vie ont été esquissés par Quetelet à diverses reprises, notamment dans son *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques chez les Belges* (14), et par Goethals, dans ses *Lectures relatives à l'Histoire des Sciences... en Belgique* (15). Ce n'est pas le moment d'y revenir, mais je crois opportun de dire un mot de la bibliographie des œuvres du grand géomètre.

Cette bibliographie a été donnée pour la dernière fois, dans la troisième édition de la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel (16). Elle est travaillée et fort bien faite; il est d'autant plus utile de la compléter et de la rectifier dans quelques détails intéressants et ne manquant pas d'importance.

1° Quelques remarques d'abord sur le *Problema Austriacum plus ultra quadratura circuli... Antverpiae... M.DC.XLII.* (Bibl. roy. V. H. 8127). C'est, on le sait, l'œuvre maîtresse de Saint-Vincent. On trouve dans la *Bibliothèque* une longue série d'auteurs qui s'en sont occupés; on est néanmoins surpris d'y remarquer les omissions suivantes. Je n'indique que les principales :

a) Kästner, *Geschichte der Mathematik,* tom. 3, Göttingue, pp. 221-250.

b) Marie, *Hist. des scienc. math. et phys.* tom. 3, Paris, 1884, pp. 186-193.

c) Cantor, *Vorles. über Geschichte der Mathem.* 2e édit., tom. 2, Leipsig, 1900, pp. 713-717, et 892-896.

d) *Correspondance de Huygens* éditée par la Société Hollandaise des Sciences dans les *Œuvres complètes de Christiaan Huygens* (La Haye, 1888 et suiv.) et notamment les nombreuses lettres du grand Huygens et de ses correspondants écrites au sujet de la *Christiani Hugenii...* ἐξέτασις (Lugd. Batavor. Ex officina Elzeviriana... CIↃ. IↃCLI), et de la *Christiani Hugenii... de circuli magnitudine inventâ...* (Lugduni Batavorum, Apud Johannem Elzevier... CIↃ.IↃCLIV.)

C'est l'occasion de faire connaître en passant que l'exemplaire de ce dernier ouvrage envoyé par Huygens à Saint-Vincent, avec un hommage d'auteur écrit et signé de sa main, se conserve encore aujourd'hui à la Bibliothèque du Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain. La même Bibliothèque possède aussi l'exemplaire de l'ἐξέτασις, ayant appartenu jadis au Collège des jésuites de Gand; c'est probablement celui dont il est question dans la lettre N° 106 de la *Correspondance de Huygens* (17).

2° *Opus Geometricum posthumum ad mesolabium... Gandavi... 1668*. (Bibl. roy. de Belg. V. H. 8140). La *Bibliothèque* se trompe gravement au sujet des circonstances dans lequelles fut publié cet ouvrage.

Une grande partie des écrits de Saint-Vincent, on le sait, périt en 1631, dans le sac de Prague, qui suivit la prise de cette ville par les Suédois. Si les manuscrits du *Problema Austriacum* et de l'*Opus posthumum* furent sauvés, on le doit au dévouement d'un Espagnol, le P. Rodrigue Arriaga ([18]). Mais les auteurs de la *Bibliothèque* vont plus loin, et en donnant la bibliographie d'Arriaga, ils disent que celui-ci aurait *publié* " deux ouvrages du P. Grégoire de Saint-Vincent ; *Problema Austriacum* et *Opus geometricum*, le premier en 1647, le second en 1668 " ([19]).

Cette assertion est appuyée sur l'autorité de Wydra (1741-1804) ([20]); mais elle est erronée. Saint-Vincent a surveillé lui-même l'impression du *Problema Austriacum*. On ne comprendrait pas, dans l'hypothèse contraire, ce qu'il dit à Huygens des ennuis de la presse, *praeli molestiis,* qu'il a dû supporter ([21]).

L'opinion de Wydra est d'ailleurs invraisemblable *à priori*. Aussi en donnant, au tom. 7 de la *Bibliothèque,* la bibliographie de Saint-Vincent, les PP. De Backer et Sommervogel la regardent-ils comme indéfendable pour le *Problema Austriacum*. Ils continuent néanmoins à s'y rallier, bien qu'avec hésitation, pour l'*Opus posthumum* ([22]).

C'est à tort, derechef; la publication de l'*Opus posthumum* est une œuvre belge. Le savant bollandiste Daniel Papebrochius, contemporain de Saint-Vincent et bien placé pour être exactement informé, dit dans ses *Annales Antverpienses* ([23]) que l'*Opus posthumum* fut publié à Gand par les soins de son frère Joachim Papebrochius.

Un témoignage aussi net et aussi autorisé coupe court à toute difficulté.

3° Il est une tout autre catégorie d'ouvrages dus à la plume de Saint-Vincent, beaucoup moins connus que les précédents, et bien dignes cependant de fixer l'attention : la série des thèses présidées par lui et défendues par ses élèves. Je ne dois pas apprendre au lecteur, quelle est la tradition de la Compagnie de Jésus, dans les solennités de ce genre; ces thèses sont toujours l'expression de l'enseignement du maître. Voici, avec la preuve de leur existence à l'appui, une liste, probablement encore très incomplète, des thèses dues à Saint-Vincent qui ont été imprimées.

a. Theses de Cometis, Lovanii 1619. Lalande les nomme dans sa *Bibliographie de l'Astronomie* (^{24}), et Goethals s'étend assez longuement sur les circonstances dans lesquelles elles furent défendues à Louvain (^{25}).

b. Theses Mathematicae, Lovanii 1623. Le P. Wydra les avait sous les yeux, au moment où il écrivait son *Historia matheseos in Bohemia* comme en fait foi le passage suivant (^{26}) : " Ut porro ingenium hujus aetatis, qua maximus hic geometra floruit, hodiernis mathematicis exhibeam, *Theses mathematicas,* Praeside illo Lovanii 1623 in Collegio S. J. propugnatas, quas apud me habeo, isthic attingam : " Paradoxum 1^{um} : non magis peccavit Zeno negans res motas moveri, quam qui res motas negat quiescere. 2^{um} : calor in flamma solo motu intendi potest. 3^{um} : aërem intrudi vasi aqua pleno, non fiet vas levius, cur igitur levitate aërem praeditum asseras, etc. „. Chez Saint-Vincent le mot *paradoxum* signifie simplement proposition; c'est notamment le sens avec lequel il l'emploie dans ses thèses de statique. Qu'on veuille donc remarquer son second *paradoxe,* soutenu en séance publique, dès 1623 : " La chaleur de la flamme peut être regardée comme due au seul mouvement. „

c. Saint-Vincent lui-même parle à Huygens des thèses qu'il fit défendre à Anvers par Jean-Charles della Faille (^{27}). " Je vous en enverrais un exemplaire, „ lui écrit-il, le 21 novembre 1651, " mais ceux que je possédais ont péri à Prague. „ Les catalogues manuscrits de l'ancienne province Flandro-Belge de la Compagnie nous apprennent que della Faille termina son cours de mathématiques à Anvers, en 1620. C'est probablement à cette date, et en tout cas à cette date au plus tard, qu'elles doivent avoir paru, et c'est à tort que les éditeurs de la *Correspondance de Huygens* les identifient avec celles que della Faille lui-même fit imprimer à Dôle, en 1625 (^{28}).

d. Theses de Motu inclinato. Il en est question dans la lettre n° 111 de la *Correspondance de Huygens* (^{29}). Saint-Vincent écrit à Huygens : " Ut animi gratitudine vices rependam, adjungo libellum *Thesium mearum de Motu inclinato;* dignare non munusculum sed animum suum suis strenis obnoxium aspicere. „ Huygens à son tour lui accuse réception de l'envoi en ces termes (³⁰) : “ ...accepi... libellum elegantem *Thesium mathematicarum*, quas cum defendisti fieri non potuit quin frequentibus argumentis oppugnaveris, ita multae sunt egregie ad disputandum comparatae quasque vel evertere vel demonstrare pene parem difficultatem habeat. „ Saint-Vincent eut le bon goût de ne pas relever cette réflexion un peu impertinente de son jeune correspondant.

Toutes ces thèses sont devenues fort rares et je ne sache pas qu'on en puisse nommer encore un seul exemplaire. On est plus heureux pour les suivantes :

e. *Theoremata mathematica Scientiae Staticae de dvctv pondervm per planitiem Recta et obliquè Horizontem decussantem. Defendenda ac demonstranda In Collegio Societatis Iesu Louanij a Gualtero van Aelst Antverpiensi praeside R. P. Gregorio a S. Vincentio Math. profess. eiusdem Societatis Religiosis. Die 29 Julii ante miridiem* (sic) *Anno 1624.* — A la dern. pag. : *Lovanii typis Henrici Hastenii* (Bibl. roy. de Belg. V. H. 8181 ; — Bibl. de l'Univ. de Gand, Res. 1449). ...(même titre)... *Defendenda ac demonstranda In Collegio Societatis Iesu Louanij a Ioanne Ciermans Dvcissilvio... Dei 29 Iulii post Miridiem Anno 1624...* (Bibl. du Coll. Saint-Servais à Liége).

Ces deux opuscules ne diffèrent entre eux que par cette variante du titre. Ce sont des in-4° oblongs de 23 pp. et 20 gravures hors texte, assez grossières, dessinées dans le goût de l'époque. Ils eurent un retentissement énorme dans l'Europe entière, dit Papebrochius (³¹), et sont en effet remarquables pourvu qu'on ne perde pas de vue leur date de 1624, antérieure de 14 ans aux *Discorsi... a due nuove scienze* de Galilée (Leyde Elsevir, 1638. *Bibl. roy. de Belg.* V. H. 8171).

IV

Les renseignements réunis sur les manuscrits du P. della Faille sont encore peu nombreux, et il n'y a guère d'espoir de pouvoir les compléter de sitôt.

1° Les PP. De Backer et Sommervogel signalent d'abord cinq manuscrits que je n'ai pas eu l'occasion de voir, et qui sont conservés dans la famille della Faille ([32]).

a. Traddado de las secciones conicas (40 propositions). — De la Ellipsi en particular (47); — De la Hiperbolo en particular (22); — De la Parabola en particular (17). Pet. 4°, ff. 72. — *A la suite :* 2 Problemas para escrivir Reloxes, ff. 4 et fig.

b. Analyse (en espagnol) des ouvrages de géométrie les plus célèbres, ff. 24.

c. Vingt-deux chapitres sur la géométrie. In fol. ff. 27.

d. Lugares circulares. — Lugares rectilineos de circulos. — Lugares rectilineos. — Lugares parapolicos. In fol., ff. 8 et fig.

e. La verdadera Longitud por Mar y tierra demonstrada y dedicada a su Mag^{d}. Catholica Philippo IV por Miguel Florencio van Langren, cosmographo, y mathematico de Su Mag^{d}. en Flandes. S.l. M.DC.XLIV.

A la p. 5 " Los curiosos trabaxos que junto en esta materia de los Rumbos el R. P. della Faille..., "; p. 10 " Censura : F. della Faille. S. J. in Collegio Imperiali Regius Matheseos Professor Matriti 17 Januarii, 1633; " — p. 11 " Alia ejusdem Censura Matriti 17 Martii M.DC.XXXIII ".

Je ne vois pas à quel titre les savants auteurs rangent ce dernier ouvrage parmi les *manuscrits* de della Faille. C'est une petite brochure in-fol. de 14 pp. rarissime et très curieuse, dont il existe un second exemplaire à la Bibliothèque royale de Belgique. (V. 5275).

2° La farde des Archives du Royaume à Bruxelles, qui contient la première lettre publiée ci-dessous, est intitulée : *Puncta ad concinnandam vitam R. P. Joannis Caroli della Faille Professoris Ser^{mi} Principis Joannis Austriaci* ([33]). Elle renferme plusieurs lettres de della Faille à sa mère et à sa sœur, qui ont été publiées dans la *Notice* du P. Vanderspeeten. Il n'y a pas lieu d'y revenir ([34]).

3° La Section des Manuscrits de la Bibliothèque royale de Belgique possède un fort volume in-folio, côté 19837-19838 et portant au dos le titre suivant :

E. Puteanus et J. C. Delafail. (sic). *Leur Correspondance avec Van Langren* ([35]) *Cosmographe à Bruxelles.* Il est formé de 233 ff. Les ff. 1-143 renferment les lettres d'Erycius Puteanus et quelques autres pièces ; les ff. 144-233 contiennent la correspondance de della Faille.

Au recto du f. 144, on lit le titre suivant, occupant toute la page et écrit à la main en lettres ayant la forme des caractères d'imprimerie :

Noventa cartas del reverendissimo y doctiss^{mo}. *padre Ivan Carlos de Lafalle* (sic) *sacer*^{te} *de la Compagnie de Iesvs. Professor Mathematico en el Coll*^{o} *Imperial, y Cosmographo mayor de sv Mag*^{d} *escrito a Migvel Florençio Van Langren, Cosmographo y Mathem*^{co}. *de Sv Mag*^{d}.

Ces lettres sont malheureusement loin d'être encore au nombre de 90. Celle du 30 mai 1635, par exemple, est aujourd'hui cotée N° 19676. Mais beaucoup d'autres ont disparu sans qu'on puisse dire ce qu'elles sont devenues.

La correspondance de della Faille a lieu, tantôt en flamand, tantôt en espagnol, et s'étend du 22 avril 1634 au 25 septembre 1645. Plusieurs lettres ont pour objet des problèmes scientifiques, mais dans beaucoup d'autres della Faille entretient van Langren des menus faits quotidiens, qu'il observe autour de lui. Ami de Don Juan d'Autriche et vivant à la Cour, ces observations sont loin d'être banales. Les réponses de Van Langren nous font défaut, mais il indique assez souvent en un mot, qu'il a répondu et à quelle date il l'a fait.

Parmi ces notes rapides de Van Langren, il faut signaler la suivante, écrite en espagnol au dos de la dernière lettre de della Faille :

„ Le Seigneur Hortensio m'a dit qu'à Madrid Don André d'Anduja y Daca possède une grande quantité de manuscrits du R. P. della Faille. Son Altesse le prince Don Juan d'Autriche en a aussi en grand nombre, *comme il m'a été donné de le voir depuis.* „

D'après cela, c'est donc bien au milieu des papiers de don Juan d'Autriche, qu'on a le plus d'espoir de retrouver un jour les manuscrits perdus de della Faille.

4° Voici enfin, pour épuiser le sujet, encore une indication :

Dans sa dernière maladie della Faille avait été soigné par un de ses compatriotes le frère coadjuteur Deraet. Celui-ci y avait mis ce dévouement et ce cœur si caractéristiques souvent chez les religieux sortis du peuple. Dans une lettre écrite à Vincent della Faille et dans laquelle Deraet lui raconte longuement les détails de la maladie et de la mort de son frère le P. Jean-Charles, il lui écrit notamment : “ Ses écrits s'égalent à l'or, de sorte qu'en la première nouvelle de sa mort, beaucoup sollicitèrent à force d'en avoir quelques-uns. Le Supérieur les mit entre les mains du R. P. Hugo Sempilio (36), Écossais de nation, et résidant en ce collège impérial. Son Altesse le prince don Juan a fait enserrer le reste en une chambre à Barcelone. Ils ont dessein d'en faire imprimer une partie qui leur reste, et le Père était aussi de même intention, ne fût que le commandement de suivre Son Altesse ne l'eût empêché ; car les grandes instances qu'on lui en faisait de toutes parts avaient autant gagné sur son humilité et le mépris qu'il avait de lui-même „ (37).

Bruxelles, Collège Saint-Michel, 1er novembre, 1901.

Lettre de Grégoire de Saint-Vincent à Remi Happart, sur la vie et les travaux de Jean-Charles della Faille (37).

Rde in Christo Pater.

Pax ejusdem.

Mortem vere immaturam Patris della Faille summo meo moerore intellexeram priusquam ejus mentionem a R^{ia} V^{a} intellexi. De quo etsi ab anno 20 (39) hujus saeculi eum videre non potuerim, quae occurrent libenter RV^{ae} communicabo. Priusquam ille admitteretur ad Societatem vix unquam ullo cibo fuerat usus, quo in Societate vesci solemus, quae res etsi remoram aliquam admissioni praeberet; nihilominus, spe, quam ipse omnimodam praebebat impetrandi a se, et a Deo ut omnibus vesceretur, admissus fuit. Ex parente (40) superstite, haec accuratius R V poterit intelligere. Cum jam Tyrocinium explevisset, et Philosophiae operam navaret, habitabam in domo professa, cum Patre Aguillonio (41), bonae memoriae. Diebus autem vacationis, rogabat me, ut ingressum sibi concederem cubiculi mei, et libros mathematicos lustraret. Eodem anno in collegio lectionem mathematicam, ad physicos habere coepi, et insequenti disciplinas mathematicas summo desiderio auspicatus est serio, totoque triennio consequenter diligentia summa. Incumbens aliquoties theses mathematicas summo concursu et gratia defendit (42). Collegerat ingentem thesaurum ex variis auctoribus et propriis inventis priusquam a me discederet. Anno 20, cum Parisiis transiret Dolam petiturus, ut simul mathesim doceret. operam theologicis navans; ita gratus fuit professori matheseos, qui decennio integro philosophiam docuerat, illoque anno mathesim inchoare debebat, ut ab illo, neque summa nocte avelli posset. Fuit ab eodem ductus ad Regem salutandum, cum fratribus suis; ut ex illis ipsis melius intelliget R V^{a}. Anno. 27. vel 28. Communicaram animi causa litterarum commercio, propositionem quandam quam P. della Faille Dolae in suis thesibus posuerat, cum quodam e Patribus nostris, professore Matheseos (43), ejusque judicium inquirebam, de illius veritate. Respondit ille, mihi, propositionem illam verissimam esse, seque librum de ea materia habere paratum, quem praelo exponeret ([44]). Quod ubi intellexi, quantocius scripsi Patri della Faille, in Hispaniam, eumdem urgens ut alterum praeveniret; responsi loco, nihil habui, nisi quod non judicaret, aequum, ut discipulus magistrum praecederet. Cui cum secundas ejusdem argumenti rescripsissem, misit Antverpiam libellum suum, censurandum. ac imprimendum. Quo tempore ad minimum adhuc 30. paratos habebat, quos una potuisset publici juris facere. Et quidem de rebus vere in scientia mathematica memorabilibus. Libellus autem ille praeclarus vere est, ut Pater ille, (de quo prius mentionem feci, quod ejus argumenti librum haberet, quem post aliquot annos etiam edidit) mox ut eum legit ad me scripserit haec verba : Vere, ut video, Archimedes est ([45]); libenter cum illo notitiam inibo ; et honorificam valde ejus mentionem in eodem suo libro egit. quam R^a V^a inveniet inter libros P. Pauli Guldin, libro de centro gravitatis etc. ([46]). Memorabile etiam adjungam D. Hughenii Junioris, hoc est Christiani; de duobus hisce libris ejusdem argumenti conscriptis, P. della Faille et P. Guldin. Scripseram D. Christiano, P. della Faille discipulum quondam meum, et P. Guldin quondam condiscipulum, de eodem argumento libellum conscripsisse; ad quod reposuit. se utrumque librum perlegisse, ac me longe doctiorem habuisse discipulum, quam condiscipulum, cum tamen sua laude non careat liber Guldini ([47]). Sed etiam hoc adnectam. Ante pauculos annos, unum alterumve, venit ad me ex Hollandia, D. Schoote ([48]) Professor Leydanus; in mathematicis. occasione operis mei quod prodierat, notitiam initurus; et inter caeteros sermones, etiam libelli P. della Faille mentio cum fieret, quem discipulum meum fuisse asserebam, miratus fuit summopere : asserens, se audivisse alicujus in Geometricis versatissimi, ex eo judicium, quo affirmabat, nunquam se librum aliquem legisse, qui magis accederet ad nitorem, et methodum demonstrandi Archimedaeum; quam esset auctor illius libelli. Utinam R V^a hoc efficere posset, ut ejus scripta in Belgium remittantur. Pulcherrima enim sunt, et procul dubio in Hispania peritura. Cum nullus ea intellecturus sit; quod si autem ea in manus alicujus incidant, qui ea intelligat; labor Belgicus alterius honore indigetabitur. Non dubito

Professores mathematicos, qui cum illo Madriti (49) docuerunt, ejus scripta sui juris fecisse (50).

Finio mi Pater et me SS. R V Sacrificiis humillime commendo. Gand. 1655, 12. Ap.

R. V Servus in Christ
G. a S Vincentio

Salutat R. Vm P. Franç. Aynscombe (51) jam decimam quartam diem tertiana decumbens.

Ro in Chro Patri P. Remigio
Happart Soctis Jesu
Antverpiae.

Lettre de Grégoire de Saint-Vincent à un Père du Collège de la Compagnie de Jésus à Bruxelles, sur le « Novum Almagestum » de Riccioli.

. . . .

Opus decurri obiter, cum nondum otium suppetat serio legendi. Invenio certè benemeritum Bonum Illum Patrem de materiâ quam tractat. Et summopere admiror, quod qui Philosophicis et Theologicis contemplationibus totam ferè vitam indulsit, talem ac tantum laborem in sphaericâ theoriâ impenderit (52). Certè liber utilissimus est et commendatione dignissimus. mihi saltem valde placet. Vale mi optime Pater et mei memor esse dignare. in SS tuis sacrificiis.

Gand. 1a maij 1655.

Adscribo salutem humanissimam R. P. Rectori (53) & P. Sarasa (54).

R V Servus in Chto
G St Vincentio.

NOTES

(1) Collection de Précis Historiques, 2e série, t. II, 1873, p. 504. — Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 2e série, t. XXXVI, 1873, p. 39. — *Annuaire de l'Observatoire Royal* par le Directeur A. Quetelet, 1874, Bruxelles. Hayez. 1873, p. 255.

(2) *Œuvres complètes de Christiaan Huygens* publiées par la Société hollandaise des Sciences, t. I-V, Correspondance. La Haye, Martinus Nijhoff, 1888-1893.

(3) *Les Correspondants belges du grand Huygens*, par Georges Monchamp, correspondant de l'Académie; publié dans les Bull. de l'Acad. roy. de Belg., 3e série, t. XXVII, 1894, p. 255-308.

(4) Fonds : Archives des jésuites de la province Flandro-Belge ; carton renfermant les fardes 1029-1042. Farde 1037, pièce N° B.

(5) Remi Happart, né à Maestricht, le 31 janv. 1608, mort à Bruxelles, le 5 fév. 1675, est peu connu. La Bibliothèque de la Compagnie de Jésus des PP. De Backer et Sommervogel ne le nomme pas et je n'ai pu réunir sur lui que des renseignements sans intérêt.

(6) Le *R. P. Jean-Charles della Faille de la Compagnie de Jésus précepteur de don Juan d'Autriche* par H. P. Vanderspeeten de la même Compagnie. Bruxelles, Vromant, sans date. In-8° de 48 pp. avec un beau portrait hors texte du P. della Faille, gravé par de Meersman d'après le tableau de van Dyck.

Cette brochure est un tiré à part d'une série d'articles publiés en 1874, dans la Collection de Précis historiques (2e série, tom. 3).

(7) *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I. Lett. N° 102, pp. 154-155.

(8) *O. c.*, t. I, p. 154.

(9) Titre complet de l'ouvrage :

Ioannis della Faille Antverpiensis e Societate Iesv, In Academia Matritensi Collegii Imperialis Regij Matheseos Professoris Theoremata de Centro Gravitatis partivm circvli et ellipsis (Marque d'imprimeur de Van Meurs : Poule couvant des œufs. Devise : Noctv incvbando divqve. Pet. Paul. Rubens pinxit. Max Voet sculp.) Antverpiae, ex officina typographica Ioannis Mevrsi. Anno M.DC.XXXII. Gr. in-4° de 8 pp. non ch., 53 c. et 3 non c. (Bibl. de l'Observatoire roy. de Belg. — L'exemplaire de la Bibl. roy. de Belg. V. H. 8139 est lacéré au titre dont on a découpé la magnifique marque d'imprimeur de Van Meurs gravée par Voet d'après Rubens).

Dans l'avis au lecteur de cet ouvrage, della Faille dit qu'il a publié à Dôle, en 1625, des thèses de mécanique ; je ne sache pas qu'on en connaisse encore d'exemplaire.

Les savants éditeurs des *Œuvres de Christiaan Huygens* se trompent à leur sujet, je l'ai déjà dit ci-dessus (p. 6), en les confondant avec celles que della Faille défendit à Anvers sous la présidence de Grégoire de Saint-Vincent (t. I. p. 159 en note). Della Faille quitta Anvers en 1620, et par conséquent ces dernières thèses ont paru au moins cinq ans avant celles qui furent éditées à Dôle.

(10) Voici ce que Saint-Vincent écrit à Huygens, le 21 novembre 1651, sur ce sujet : " Quod si librum tuum ei mittere destinas, (il s'agit de l'ἐξέτασις dont Huygens se proposait d'envoyer un exemplaire à della Faille), memineris rogo, eidem stimulum addere, ut reliqua, quae pridem adfecta habet, in publicum proferat. Nisi enim violentiâ quâdam amicâ usus fuissem, adhuc cum reliquis supressus lateret, qui prodiit libellus. „ (*Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, let. N° 105, p. 158).

(11) § 1V de l'introduction.

(12) Jean-Baptiste Riccioli naquit à Ferrare le 17 avril 1598, entra dans la Compagnie de Jésus le 6 octobre 1614, et mourut, à Bologne, le 25 juin 1671. Ses connaissances en astronomie l'ont rendu célèbre. Il existe deux bonnes biographies de ce savant :

L'une a paru dans les *Vitae Italorum doctrinae excellentium qui saeculis XVII et XVIII floruerunt*, Volumen II, auctore Angelo Fabronio Academiae Pisanae curatore, Pisis, MDCCLXXVII. Excudebat Carolus Ginesius, superioribus annuentibus; in-8°, pp. 355-378.

L'autre se trouve dans les *Memorie istoriche di Letterati Ferraresi volume secundo dell' abate Lorenzo Barotti.* In Ferrara M.DCC.XCIII. Per gli eredi di Giuseppe Renaldi, in-4°, pp. 270-277.

Parmi les études critiques de l'œuvre scientifique de Riccioli il faut surtout nommer celles de Delambre (Hist. de l'Astron. mod., t. II. Paris, Courcier, 1821, pp. 274-323) et de Jacques Cassini (*Traité de la Grandeur et de la Figure de la terre*, Amsterdam, 1723, IIe part., ch. IX. Réflexions sur la mesure de la terre du P. Riccioli, p. 364-376.)

La bibliographie des œuvres de Riccioli a été donnée par les PP. De Backer et Sommervogel (*Bibliothèque*, t. VI, col. 1796-1805). Je ne lui emprunte que le titre de l'ouvrage qui nous intéresse ici : *Almagestum novum astronomiam veterem novamqve complectens observationibus aliorum, et propriis novisqve Theorematibus, Problematibus, ac Tabulis promotam. Opvs absolvtvm qvorvm argvmenta seqvens pagina docebit. Avctore P. Joanne Baptista Ricciolo Societatis Jesv Ferrariensi. Philosophiae, Theologiae, et Astronomiae Professore* (marque d'imprimeur) *Bononiae. Nunc autem Francofurti apud Joannem Beyerum per venales habentur M.DC.LIII. Svperiorvm permissv.* In fol. t. I, pp. 8 n. ch., XLVII, 1 p. bl., 763 ch., 1 n. ch., 2 pl. hors texte; t. II, 6 p. n. ch., XVIII, 675 ch., 1 n. ch. L'*Almagestum novum* comprend à proprement parler un troisième volume : *Astronomia reformata.... Bononiae M.DC.LXV*, mais il est fort rare et manque dans l'exemplaire de Louvain, comme dans presque tous ceux que je connais. Il existe à la Bibliothèque royale de Belgique (V. H. 8258).

(13) La Bibliothèque des Bollandistes possède un catalogue manuscrit donnant les noms de tous les Pères qui habitaient, en 1655, le Collège de Bruxelles. Il faut évidemment exclure des destinataires possibles de la lettre le P. Guillaume de Wael, recteur du Collège et le P. Antoine Sarasa, puisque dans le Post-scriptum de sa lettre, Grégoire de Saint-Vincent demande à son corres-

pondant de les saluer de sa part. Parmi les autres noms appelant l'attention il y a celui du P. Jean Leurechon, l'auteur des célèbres *Recréations mathématiques* renseigné, à ce moment, comme *Instructor juniorum principum Ducis Lotharingiae*, et celui du P. Othon Zylius bibliothécaire. S'il me fallait à tout prix faire un choix, j'indiquerais ce dernier nom comme celui du correspondant de Saint-Vincent.

(14) Bruxelles, 1864, pp. 206-220.

(15) T. IV, Bruxelles, 1838, pp. 166-183.

Goethals utilise beaucoup, sans le citer, un curieux document manuscrit des Archives du royaume, intitulé : " Elogium P. Gregorii a S. Vincentio „ (Arch. des jés. de la prov. Flandro-Belge, farde 1000).

(16) T. VII, 1896, col. 440-443.

(17) *Œuvres*, t. I, p. 159.

(18) Kästner, *o. c.*, t. III, p. 224.

Voyez aussi, dans le *Prob. Austriacum*, la Præfatio ad benevolum lectorem, pp. b_3v° — (b_4) r°.

(19) *Bibl. de la Comp.*, t. I, col. 258.

(20) *Historia Matheseos in Moraviâ et Bohemiâ cultae*, Pragæ 1778; citée dans la *Bibliothèque*, t. VII, col. 441.

(21) *Œuvres*, t. I, lettre N° 105, p. 158.

(22) Col. 441.

(23) Antverpiæ, 1847, t. IV, p. 442.

(24) Paris, 1803, p. 174.

(25) *O. c.*, t. IV, p. 169-170.

(26) P. 39.

(27) *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, t. I, lettre N° 105, p. 159.

(28) *Œuvres... de Huygens*, t. I, p. 159, en note.

(29) *Œuvres*, t. I, p. 164.

(30) *Œuvres*, t. I, lettre N° 118, p. 171.

(31) ANNALES ANTVERPIENSES, t. IV, p. 483.

(32) *Bibliothèque*, t. III, 1892, col. 529-530.

(33) Fonds : Archives des jésuites de la province Flandro-Belge ; carton renfermant les fardes 1029-1042; farde 1037. N°s C et D.

(34) PP. 28-32.

Deux autres lettres de della Faille ont été insérées dans les *Eryci Puteani Bamelrodi Historiographi Regij, Professoris, consiliarij, etc. Epistolarum Apparatus posthumus, in centurias septem distributus Opera et Industria Xysti Antonii Milseri authoris generi. Lovanii, Typis Andreæ Bouveti.* Anno M.DC.LXI et suiv.

La première se trouve : t. I, centur. I, litt. XXV, pp. 53-56. Elle est datée : Lovanii, in arce, XI Kal. sept. 1632.

La deuxième est au t. II, centur. II, litt. XX, pp. 33-34. Elle est datée, comme la précédente : Lovanii, in arce, XI Kal. sept. 1632.

Ce sont deux lettres écrites le même jour à Erycius Puteanus.

(35) Michel Florent van Langren, naquit probablement à Anvers, mais on ne

sait pas au juste à quelle date, et mourut à Bruxelles, en 1675. Il existe une bonne notice biographique de ce savant par A. Wauters, dans la BIOGRAPHIE NATIONALE, publiée par *l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, t. XI, Bruxelles, 1890-1891. col. 276-292. Quant à la bibliographie de ses œuvres, elle a été donnée dans la *Bibliotheca Belgica*... par le Bibliothécaire en chef et les Conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand, 1re série, t. XIII, Gand et La Haye, 1880-1890. L. 8, — L. 17 et L. 46.

(36) Hugues Sempel, né en Écosse, on ne sait pas au juste en quelle année, mort à Madrid, en septembre 1654.

Le P. Vanderspeeten (*o. c.*, p. 15) lit à tort Scripilio. La lettre originale de Deraet, écrite en flamand, se trouve aux *Archives*, dans la farde 1037, déjà citée (pièce I), et l'on y a joint une traduction française ; ni l'un ni l'autre de ces documents ne permet la lecture Scripilio.

(37) Voir : Vanderspeeten, *o. c.*, p. 15. Je cite la traduction française de la lettre de Deraet, mais en rajeunissant l'orthographe.

(38) Il est nécessaire, pour l'intelligence de cette lettre, de donner ici les principales dates de la vie de della Faille, jusqu'à son départ pour l'Espagne.

Jean-Charles della Faille est né à Anvers le 1er mars 1597.

Il entre au noviciat à Malines, le 12 septembre 1613 et y reste deux années complètes.

De là il est envoyé au Collège d'Anvers et y demeure pendant cinq années scolaires, de l'année 1615-1616 à l'année 1619-1620. Il y étudie successivement la logique pendant un an, puis la physique aussi pendant un an et enfin les mathématiques pendant 3 ans. C'est à Anvers qu'il connut François d'Aguilon et Grégoire de Saint-Vincent et, comme je l'ai dit ci-dessus, c'est probablement au mois d'août 1620, qu'il défendit en séance publique les thèses de mécanique de Saint-Vincent.

D'Anvers il se rend à Dôle en passant par Paris et y reste pendant six années scolaires de 1620-1621 à 1625-1626. Il y fait son cours de théologie et y enseigne les mathématiques. C'est en 1625, à Dôle, qu'il imprime ses propres thèses de mécanique.

De Dôle il revient enseigner, pendant deux années scolaires, les mathématiques à Louvain (1626-1627 et 1627-1828); puis il va faire quelques mois de 3e an de probation à Lierre et part enfin pour l'Espagne, le 26 mars 1629. Il y devient précepteur des pages de Philippe IV et est attaché à la personne de don Juan d'Autriche.

Il meurt au siège de Barcelone, le 4 novembre 1652.

(39) L'année 1620, où il quitta Anvers pour se rendre à Dôle.

(40) C'est la mère de della Faille. Son père était mort le 16 octobre 1641. (Vanderspeeten, *Notice*, p. 37, note.)

(41) François d'Aguilon naquit à Bruxelles en 1566, entra au noviciat de Tournai, le 15 septembre 1586, et mourut, à Anvers, le 20 mars 1617. Il n'a laissé qu'un seul ouvrage, mais qui est fort célèbre : *Francisci Agvilonii e Societate Iesv Opticorvm libri sex...: Antverpiae, ex officina Plantiniana, Apud Viduam et Filios Io. Moreti M.DC.XIII.* In f°. (Bibl. roy. de Belg., V. H. 29710.)

(42) La phrase doit évidemment être ponctuée comme suit :
“ .... diligentia summa incumbens, aliquoties theses ... „

(43) Il s'agit du célèbre père Paul Guldin, né, le 12 juin 1577, à Mels prés Saint-Gall, mort à Graetz le 3 novembre 1643.

Les théorèmes dont il est ici question sont évidemment ceux qui, sous le nom de corollaires, terminent, en le résumant, le traité de della Faille, et notamment les deux premiers (p. 53 v°) :

“ I. Inventa circuli quadratura dabitur centrum gravitatis cujuslibet secto-
„ ris... etc.; II. Dato cujuslibet istarum [circuli] partium centro, ipsius etiam
„ quadratura erit obvia... „

(Voir Guldin, *o. c.*, liv. I, tom. I, p. 65-67).

(44) *Pavli Gvldini Sancto-Gallensis e Societate Jesu, De centro Gravitatis Trium Specierum Quantitatis continuae... Viennae Avstriae... M.DC.XXXV — M.DC.XLI.* In f°. — L'ouvrage complet est en quatre livres et est devenu rare en Belgique. Il en existe un exemplaire à la Bibliothèque de l'Université de Louvain (Scienc. 426). Le Coll. S^t^-Servais à Liège possède le 1^er^ volume. La Bibl. roy. de Belg. n'a que l'*Appendix tabulas continens numerorum quadratorum et cuborum decies millium*, fragment du 1^er^ volume (5^e^ clas. ; I; F, 2; Guld.).

(45) Guldin repète la même phrase dans son traité *De Centro Gravitatis* (Liv. I, ch. v, pag. 65) “ ... haec ipsa a *viro Archimedeo* Joanne della Faille Societatis nostrae Sacerdote, jure merito expecto.... „

(46) Voir la Note ci-dessus.

(47) Voir la Note (8).

(48) Il s'agit de François van Schooten le fils, né à Leiden vers 1615 où il mourut le 30 mai 1661.

(49) Lisez : Matriti.

(50) Voir la Note (11).

(51) François Xavier Aynscom ou Aynscombe, d'origine anglaise, naquit à Anvers, le 27 novembre 1620, et y mourut le 8 décembre 1660. Il n'a laissé qu'un seul ouvrage. Il est écrit pour la défense de Saint-Vincent et a pour titre : *Francisci Xaverii Aynscom Antverpiani e Societate Iesv Expositio ac dedvctio Geometrica Qvadratvrarvm Circvli, R. P. Gregorii a S. Vincentio eivsdem Societatis; cvi praemittitvr liber de natvra et affectionibvs rationvm ac proportionvm geometricarvm* (marque d'imprimeur de Van Meurs) *Antverpiae. Apvd Iacobvm Mevrsivm. Anno M.DC.LVI.* In f°. (Bibl. roy. de Belg., II. 355.)

(52) Le P. Riccioli écrivit sur les sujets les plus divers, comme il est aisé de s'en convaincre en parcourant la bibliographie de ses œuvres dans la *Bibliothèque* des PP. De Backer et Sommervogel (t. VI, col. 1796-1805).

(53) Le P. Guillaume De Wael.

(54) Le P. Alphonse Antoine de Sarasa naquit le 31 octobre 1618, à Nieuport en Flandre, de parents espagnols. Il entra dans la Compagnie de Jésus le 8 septembre 1632 et mourut à Anvers le 1^er^ juillet 1667. Il est surtout connu par son *Ars semper gaudendi* qui a eu d'innombrables éditions. Il écrivit aussi pour défendre Grégoire de Saint-Vincent, contre les attaques du P. Mersenne :

Solvtio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi. Datis tribus quibuscumq; magnitudinibus, rationalibus vel irrationalibus, datisque duarum ex illis Logarithmis, tertiæ Logarithmum Geometrice inuenire. .... Avctore P. Alfonso Antonio de Sarasa Societatis Iesv. Antverpiae, Apud Ioannem et Iacobvm Mevrsios. Anno M.DC.XLIX. In f°. (Bibl. roy. de Belg., V. H. 8127; relié à la suite du *Problema Austriacum* de Grégoire de Saint-Vincent, et renseigné, à tort, sous le nom de ce dernier, dans le catalogue imprimé du fonds Van Hulthem.)

La Question 419 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* fait croire qu'il existe des lettres de Saint-Vincent à Mersenne, à la Bibliothèque nationale de Paris, sous la cote : " Nouvelles acquisitions françaises, 6024-05-06 ". L'auteur de la Question, M. J. Boyer, le dit explicitement. Ce renseignement, s'il est exact, est très intéressant; mais il m'a été impossible, jusqu'ici, de le vérifier. Je n'ai aucune raison positive de le révoquer en doute, mais je dois observer néanmoins, qu'il n'est pas confirmé par les catalogues de la Bibliothèque. (Voir : *Bibliothèque nationale, Catalogue des fonds Libri et Barrois*, par Léopold Delisle, Membre de l'Institut, administrateur général de la Bibliothèque nationale, Paris, 1888, pp. 166-167; — *Bibliothèque nationale. Manuscrits latins et français ajoutés au fond des nouvelles acquisitions, pendant les années 1875-1891. Inventaire alphabétique* par Léopold Delisle, Membre de l'Institut, administrateur général de la Bibliothèque Nationale. Partie II, Paris, 1891, p. 411).

SUR LA GÉNÉRATION DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES

PAR LE

CAMPYLOGRAPHE

du P. Marc Dechevrens, S. J.

PAR

le P. POTRON, S. J.
Ancien Élève de l'École polytechnique

Les pages qui suivent sont extraites d'une étude du *Campylographe* (*) au seul point de vue scientifique ou mathématique, étude dont le sort fait aux Congrégations religieuses en France me force d'ajourner la publication intégrale. Dans ce travail, qui sera accompagné de nombreuses planches et qui a été fait en collabo-

---

(*) Le *Campylographe*, appareil à tracer des courbes, a fait l'objet de deux notes à l'Académie des Sciences (11 juin et 13 août 1900); la NATURE et le COSMOS lui ont consacré plusieurs articles. Enfin une description très détaillée du mécanisme et de son fonctionnement a paru dans le n° de janvier 1901 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES de Bruxelles. Nous ne nous occuperons ici que de la théorie mathématique de cet intéressant instrument traceur de courbes.

Le Campylographe, dans sa conception première, devait se borner à tracer les courbes de Lissajous, courbes qui résultent de deux mouvements rectilignes vibratoires rectangulaires.

Tout en conservant son premier but, il s'est bientôt transformé en un instrument plus général et de plus grande portée, par la seule addition d'un mouvement circulaire uniforme, celui du plan d'inscription des résultantes précédentes.

ration avec le R. P. Potron, S. J., ancien élève de l'École polytechnique, je montre tout le parti que l'enseignement des mathématiques pourrait tirer de cet instrument. Qu'il me suffise de dire qu'il trace avec une égale facilité, non seulement les courbes usuelles, le point, la ligne droite, le cercle, l'ellipse, la parabole et toutes les courbes dites de Lissajous, si connues des physiciens, mais aussi un très grand nombre des courbes classiques de l'enseignement des mathématiques élémentaires ou supérieures, telles que les épicycloïdes et les hypocycloïdes de tout ordre et de toutes variétés, les rosaces, les foliums, le scarabée, le limaçon de Pascal sous toutes ses formes, les transformées de ces courbes, les courbes parallèles, les courbes conchoïdes, etc. etc. Et pour chacune de ces diverses catégories l'appareil multiplie les variantes d'une façon merveilleuse, livrant ainsi des sujets sans nombre de problèmes à résoudre et indiquant des objets de recherches à poursuivre en géométrie analytique auxquels on n'aurait autrement jamais songé peut-être.

Or, toutes ces richesses sortent d'un même fond, d'un même arrangement mécanique assurément fort simple, et les équations diverses de toutes ces courbes disparates, dont le lien commun n'avait pas même été entrevu jusqu'ici, se trouvent comme confondues dans une même équation qui est l'équation générale du Campylographe.

C'est ce lien qu'on a voulu mettre ici en relief au moins pour un certain nombre des courbes les plus connues. Je veux espérer que ce travail de mon confrère se recommandera de lui-même à l'attention des mathématiciens. Marc Dechevrens, S. J.

I. Résultantes des deux mouvements vibratoires

Courbes de Lissajous

La composition des deux mouvements vibratoires rectangulaires a été réalisée de deux manières différentes dans deux appareils très distincts, le Campylographe *grande forme* à deux règles croisées, et le Campylographe *simplifié* à une seule règle double différentielle (*). Voici le principe de chacune de ces deux dispositions.

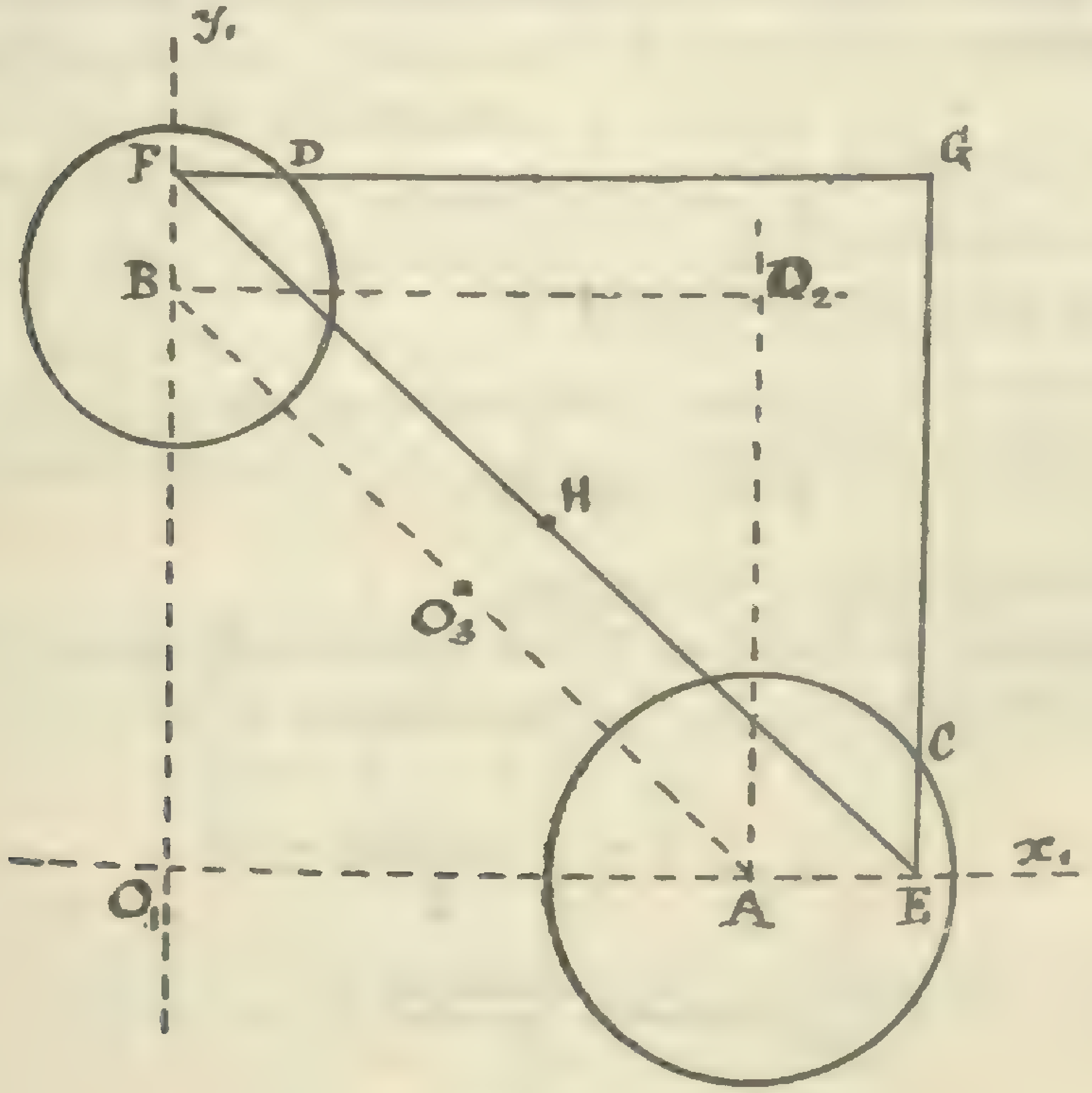


Fig. 1.

Deux points C et D décrivent d'un mouvement uniforme deux cercles (A) et (B), de centres A et B et de rayons a et b.

(*) Le Campylographe *simplifié* est en quelque sorte plus complet que le Campylographe *grande forme*. C'est la forme simplifiée qui est recommandée et qu'on peut voir fonctionner chez les constructeurs, MM. Chateau, horlogers, 118, rue Montmartre, Paris.

1re disposition (grande forme) :

Par ces points passent deux règles parallèles à deux directions fixes AO_2 BO_2, inclinées à 45° sur AB : la courbe est décrite par leur intersection G.

Prenons un système d'axes $x_1O_1y_1$ défini par O_1A, O_1B, parallèles aux règles. Supposons que dans la position initiale

AC fait avec Ax_1 un angle θ

BD est parallèle à O_1x_1.

Si m et p désignent les vitesses angulaires respectives des points C et D, si $\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = l$, les coordonnées de G sont à un instant quelconque

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= l + a\cos(m\varphi + \theta) \\ y_1 &= l + b\sin p\varphi \end{aligned}\right.$$

ou, si l'on transporte l'origine en O_2

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_2 &= a\cos(m\varphi + \theta) \\ y_2 &= b\sin p\varphi \end{aligned}\right.$$

2de disposition (forme simplifiée) :

On projette C en E et D en F ; le milieu H de EF décrit la courbe.

On a immédiatement pour les coordonnées de H dans le système $x_1O_1y_1$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{l + a\cos(m\varphi + \theta)}{2} \\ y_1 &= \frac{l + b\sin p\varphi}{2} \end{aligned}\right.$$

et si on transporte l'origine en O_3 milieu de AB

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x_3 &= \frac{a}{2}\cos(m\varphi + \theta) \\ y_3 &= \frac{b}{2}\sin p\varphi \end{aligned}\right.$$

Les deux dispositions conduisent donc aux mêmes courbes.

On pouvait d'ailleurs immédiatement remarquer que, H étant milieu de O_1G, les courbes (H) et (G) sont homothétiques.

Il n'y a pas à s'arrêter plus longtemps à ces courbes dites de Lissajous. Disons seulement que le Campylographe les trace régulières et fermées, ce qu'on ne peut obtenir ni avec les deux diapasons croisés, ni avec deux pendules rectangulaires.

II. RÉSULTANTES DE TROIS MOUVEMENTS, DEUX RECTANGULAIRES VIBRATOIRES ET UN CIRCULAIRE UNIFORME

Le Campylographe permet de transformer les courbes de Lissajous en donnant au plan d'inscription un mouvement de rotation uniforme autour d'un point O et aussi en excentrant O par rapport à la courbe élémentaire.

Partant des formules (2) nous définirons O par ses coordonnées $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ dans le système $x_2O_2y_2$, et nous cherchons les coordonnées de H par rapport à un système xOy, lié au plan d'inscription et supposé, dans sa position initiale, parallèle au système $x_2O_2y_2$.

La vitesse angulaire du plan d'inscription étant prise pour unité, on a

$$x_2 = \frac{\alpha}{2} + x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y_2 = \frac{\beta}{2} + x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

D'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= \quad\left[\frac{a}{2}\cos(m\varphi + \theta) - \frac{\alpha}{2}\right]\cos\varphi + \left[\frac{b}{2}\sin p\varphi - \frac{\beta}{2}\right]\sin\varphi \\ y &= -\left[\frac{a}{2}\cos(m\varphi + \theta) - \frac{\alpha}{2}\right]\sin\varphi + \left[\frac{b}{2}\sin p\varphi - \frac{\beta}{2}\right]\cos\varphi \end{aligned}\right.$$

Pratiquement l'excentration de O s'obtient en déplaçant respectivement E, F sur O_1x_1, O_1y_1 de quantités $-\alpha$, $-\beta$.

Dans la 1^re^ disposition (grande forme) l'excentration s'obtient en déplaçant les points A et B, c'est-à-dire les deux cercles (A) et (B) soit ensemble, soit isolément.

Pour simplifier l'écriture nous supposerons que a, b, α, β désignent les moitiés des longueurs correspondantes dans l'appareil (2^e disposition) et nous obtenons les formules

$$(3)\quad \begin{cases} x = [a\cos(m\varphi+\theta)-\alpha]\cos\varphi+[b\sin p\varphi-\beta]\sin\varphi \\ y = -[a\cos(m\varphi+\theta)-\alpha]\sin\varphi+[b\sin p\varphi-\beta]\cos\varphi \end{cases}$$

Si l'on tient compte de

$$2\cos(m\varphi+\theta)\cos\varphi=\cos(\overline{1+m}\,\varphi+\theta)+\cos(\overline{1-m}\,\varphi-\theta)$$
$$2\cos(m\varphi+\theta)\sin\varphi=\sin(\overline{1+m}\,\varphi+\theta)+\sin(\overline{1-m}\,\varphi-\theta)$$
$$2\sin p\varphi\sin\varphi=\cos\overline{1-p}\,\varphi-\cos\overline{1+p}\,\varphi$$
$$2\sin p\varphi\cos\varphi=\sin\overline{1+p}\,\varphi-\sin\overline{1-p}\,\varphi$$

et si l'on pose

$$\alpha=r_1\cos\theta_1 \qquad \beta=r_1\sin\theta_1$$

il vient, en changeant la direction positive de Oy :

$$(4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{b}{2}\cos\overline{1-p}\,\varphi-\dfrac{b}{2}\cos\overline{1+p}\,\varphi+ \\ \qquad +\dfrac{a}{2}\cos(\overline{1-m}\,\varphi-\theta)+\dfrac{a}{2}\cos(\overline{1+m}\,\varphi+\theta)- \\ \qquad -r_1\cos(\varphi-\theta_1) \\ y = \dfrac{b}{2}\sin\overline{1-p}\,\varphi-\dfrac{b}{2}\sin\overline{1+p}\,\varphi+ \\ \qquad +\dfrac{a}{2}\sin(\overline{1-m}\,\varphi-\theta)+\dfrac{a}{2}\sin(\overline{1+m}\,\varphi+\theta)- \\ \qquad -r_1\sin(\varphi-\theta_1). \end{cases}$$

Sous cette forme on voit que le mouvement résulte des cinq mouvements circulaires uniformes suivants :

Un point décrit un cercle C_1, dont le centre décrit un cercle C_2, dont le centre décrit un cercle C_3, dont le centre décrit un cercle C_4, dont enfin le centre décrit un cercle C_5.

A chaque permutation des termes des formules (4) répond une combinaison des rayons des cercles et des vitesses angulaires relatives. Le mouvement peut donc s'obtenir de $5! = 120$ manières différentes.

Nous allons étudier quelques-unes des courbes obtenues dans les cas les plus simples, lorsque des hypothèses convenablement faites sur les constantes permettent de ramener les cinq mouvements circulaires à un nombre moindre.

I. Un groupe de courbes provenant de l'égalité des vitesses des deux cercles (A) et (B)

$$m = p$$

Les Épicycloïdes, leurs courbes parallèles, leurs conchoïdes

Pour $m = p$ les cinq mouvements se réduisent tout d'abord à trois.

Les formules (4) deviennent en effet :

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{b + a\cos\theta}{2}\cos\overline{1 - m}\,\varphi + \frac{a\sin\theta}{2}\sin\overline{1 - m}\,\varphi - \\ & - \frac{b - a\cos\theta}{2}\cos\overline{1 + m}\,\varphi - \frac{a\sin\theta}{2}\sin\overline{1 + m}\,\varphi - \\ & - r_1\cos(\varphi - \theta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{b + a\cos\theta}{2}\sin\overline{1 - m}\,\varphi - \frac{a\sin\theta}{2}\cos\overline{1 - m}\,\varphi - \\ & - \frac{b - a\cos\theta}{2}\sin\overline{1 + m}\,\varphi + \frac{a\sin\theta}{2}\cos\overline{1 + m}\,\varphi - \\ & - r_1\sin(\varphi - \theta_1). \end{aligned}$$

Posons :

$$\frac{b + a\cos\theta}{2} = r_2\cos\theta_2 \qquad \frac{a\sin\theta}{2} = r_2\sin\theta_2$$

$$\frac{b - a\cos\theta}{2} = r_3\cos\theta_3 \qquad \frac{a\sin\theta}{2} = r_3\sin\theta_3$$

il vient :

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} x &= \quad r_2 \cos(\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2) - r_3 \cos(\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3) - \\ &\quad - r_1 \cos(\varphi - \theta_1) \\ y &= \quad r_2 \sin(\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2) - r_3 \sin(\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3) - \\ &\quad - r_1 \sin(\varphi - \theta_1). \end{aligned}\right.$$

En même temps les formules (3) deviennent :

$$(5')\quad\left\{\begin{aligned} x &= \quad [a \cos(m\varphi + \theta) - \alpha] \cos\varphi + [b \sin m\varphi - \beta] \sin\varphi \\ y &= - [a \cos(m\varphi + \theta) - \alpha] \sin\varphi + [b \sin m\varphi - \beta] \cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

§ 1. LES ÉPICYCLOÏDES ET HYPOCYCLOÏDES

Les trois mouvements circulaires se réduisent à deux, c'est-à-dire que l'on obtient des *épi-* ou *hypo-cycloïdes,* en annulant r_2, r_3, ou r_1.

1° $r_2 = 0$.

On a

$$r_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

r_2 s'annule pour

$$a = b \qquad \theta = \pi$$

d'où

$$r_3 = a \qquad \theta_3 = 0$$

et (5) devient, en changeant les signes :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} x &= r_1 \cos(\varphi - \theta_1) + a \cos \overline{1+m}\,\varphi \\ y &= r_1 \sin(\varphi - \theta_1) + a \sin \overline{1+m}\,\varphi. \end{aligned}\right.$$

On reconnaît là les formules générales des épi- ou hypocycloïdes; m représente le rapport algébrique des rayons.

La constante θ_1 n'influe que sur la position et non sur la forme de la courbe. Toutes les formes possibles peuvent s'obtenir au moyen des formules

$$(6') \quad \begin{cases} x = \alpha \cos \varphi + a \cos \overline{1+m}\,\varphi \\ y = \alpha \sin \varphi + a \sin \overline{1+m}\,\varphi \end{cases}$$

en faisant varier les rapports $\frac{\alpha}{a}$ et m.

2° $r_1 = 0$

Les formules (5) et (5′) deviennent respectivement :

$$(7) \quad \begin{cases} x = \quad r_2 \cos(\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2) - r_3 \cos(\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3) \\ y = \quad r_2 \sin(\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2) - r_3 \sin(\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3). \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} x = \quad a \cos(m\varphi + \theta) \cos \varphi + b \sin m\varphi . \sin \varphi \\ y = - a \cos(m\varphi + \theta) \sin \varphi + b \sin m\varphi . \cos \varphi. \end{cases}$$

Une rotation d'axes d'un angle v transforme (7) en

$$X = r_2 \cos(\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2 - v) - r_3 \cos(\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3 - r)$$

$$Y = r_2 \sin(\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2 - v) - r_3 \sin(\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3 - r).$$

Prenons v tel que

$$\frac{\theta_2 + v}{1-m} = \frac{\theta_3 + v}{1+m}$$

d'où

$$r = \frac{(1-m)\,\theta_3 - (1+m)\,\theta_2}{2m}$$

Posons

$$\overline{1-m}\,\varphi - \theta_2 - v = \overline{1-m}\,\varphi_1$$

alors

$$\overline{1+m}\,\varphi - \theta_3 - v = \overline{1+m}\,\varphi_1.$$

Mo. Bot. Garden
1903.

Les formules deviennent

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= r_2 \cos \overline{1-m}\,\varphi_1 - r_3 \cos \overline{1+m}\,\varphi_1 \\ Y &= r_2 \sin \overline{1-m}\,\varphi_1 - r_3 \sin \overline{1+m}\,\varphi_1 . \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme le rapport algébrique des rayons est m' défini par

$$\frac{1+m}{1-m} = 1 + m'$$

d'où

$$m = \frac{m'}{2+m'} \qquad\qquad m' = \frac{2m}{1-m} .$$

Les formules (8) représentent une épi- ou hypo-cycloïde normale lorsque

$$\frac{1+m}{r_2} = \frac{1-m}{r_3} .$$

Remarque. — Les rosaces comme épicycloïdes

Un cas particulier intéressant (nous ne savons s'il a été signalé) est celui où $r_2 = r_3$, c'est-à-dire quand

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

ce qui entraîne

$$\theta_2 = \theta_3 ,$$

et si on pose

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad a = -c \cos \theta_0 , \qquad b = c \sin \theta_0$$

on a

$$r_2 = r_3 = \frac{c}{2}; \qquad\qquad \theta_2 = \theta_3 = \theta_0 - \frac{\pi}{2} .$$

Les formules (7′) donnent alors par une combinaison linéaire

$$\begin{aligned} x\cos\varphi - y\sin\varphi &= -a\sin m\varphi = c\cos\theta_0\sin m\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi &= b\sin m\varphi = c\sin\theta_0\sin m\varphi \end{aligned}$$

ou bien, en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \rho\cos(\omega+\varphi) &= c\cos\theta_0\sin m\varphi \\ \rho\sin(\omega+\varphi) &= c\sin\theta_0\sin m\varphi\,; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega+\varphi &= \theta_0 \\ \rho &= c\sin m\varphi \end{aligned}$$

et l'équation polaire de la courbe sera

$$\rho = c\sin m(\theta_0-\omega)\,; \tag{8'}$$

la courbe est également représentée par

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{c}{2}\left[\cos\left(\overline{1-m}\,\varphi-\theta_0+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\overline{1+m}\,\varphi-\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ y &= \frac{c}{2}\left[\sin\left(\overline{1-m}\,\varphi-\theta_0+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\overline{1+m}\,\varphi-\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

L'angle précédemment désigné par v est maintenant

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0\,.$$

En faisant tourner les axes de cet angle on arrive aux formules suivantes :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{c}{2}[\cos\overline{1-m}\,\varphi - \cos\overline{1+m}\,\varphi] = c\sin\varphi.\sin m\varphi \\ Y &= \frac{c}{2}[\sin\overline{1-m}\,\varphi - \sin\overline{1+m}\,\varphi] = -c\cos\varphi.\sin m\varphi, \end{aligned} \right.$$

et

$$P = c.\cos m\Omega, \quad \text{équation des rosaces.} \tag{10'}$$

Géométriquement une rosace est une épi- ou hypo-cycloïde dans laquelle la distance du point décrivant au centre du cercleroulette est égale à la distance des centres. Les formules (6′) donneront donc aussi des rosaces pour

$$\alpha = a.$$

§ 2. — LES COURBES PARALLÈLES DES ÉPICYCLOÏDES

Nous pouvons maintenant interpréter géométriquement les formules (5).

Supposons que les formules (7) et (8) représentent une épi- ou hypo-cycloïde normale, c'est-à-dire que

$$r_2 = r\,(1 + m) \qquad\qquad r_3 = r\,(1 - m)\,;$$

il vient en différenciant (8)

$$\begin{aligned} dX &= r\,(1 - m^2)\,[-\sin \overline{1 - m}\,\varphi_1 + \sin \overline{1 + m}\,\varphi_1]\,d\varphi_1 = \\ &= 2r\,(1 - m^2)\cos\varphi_1 \sin m\varphi_1\,d\varphi_1 \\ dY &= r\,(1 - m^2)\,[\quad \cos \overline{1 - m}\,\varphi_1 - \cos \overline{1 + m}\,\varphi_1]\,d\varphi_1 = \\ &= 2r\,(1 - m^2)\sin\varphi_1 \sin m\varphi_1\,d\varphi_1. \end{aligned}$$

Donc l'angle de OX avec la tangente à l'épicycloïde normale est égal à φ_1; l'angle de Ox avec cette tangente est $\varphi_1 + v$.

Or, des formules qui conduisent à (8) on tire :

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\theta_2 - \theta_3}{2m}.$$

D'où

$$\widehat{Ox.\,\text{tang}} = \varphi_1 + v = \varphi - \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}.$$

Mais on passe de (7) à (5) en portant un segment constant $-r_1$ sur une direction Δ telle que

$$\widehat{Ox.\,\Delta} = \varphi - \theta_1.$$

Donc

$$\widehat{\text{tang.}\,\Delta} = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} - \theta_1.$$

La courbe (5) s'interprétera donc ainsi :

En un point d'une épi- ou hypo-cycloïde on détermine une direction faisant un angle constant avec la tangente au point correspondant de l'épi- ou hypo-cycloïde normale correspondante, et sur cette direction on porte un segment de longueur constante.

On peut, en particulier, tracer ainsi les courbes *parallèles* des épi- ou hypo-cycloïdes normales. Il faut pour cela

$$r_2(1-m) = r_3(1+m) \quad \text{et} \quad \theta_1 = \frac{\theta_2+\theta_3+\pi}{2}.$$

§ 3. — LES CONCHOÏDES DE ROSACES

Étudions encore la transformation que l'on fait subir aux rosaces en portant le segment constant sur une perpendiculaire à la tangente à l'épi- ou hypo-cycloïde normale correspondante.

L'angle θ_1, déterminé par l'excentration, doit être, d'après les valeurs particulières de θ_2 et de θ_3, égal à θ_0. Donc

$$\alpha = r_1 \cos\theta_0 \qquad \beta = r_1 \sin\theta_0$$

Une combinaison linéaire des formules (5') donne alors comme précédemment

$$\rho\cos(\omega+\varphi) = (c\sin m\varphi - r_1)\cos\theta_0$$
$$\rho\sin(\omega+\varphi) = (c\sin m\varphi - r_1)\sin\theta_0.$$

D'où

$$\rho = c\sin m\varphi - r_1$$
$$\omega + \varphi = \theta_0$$

et l'équation polaire de la courbe est :

$$\rho = c\sin m(\theta_0 - \omega) - \pi_1. \tag{11'}$$

On obtient donc ainsi des *Conchoïdes* de rosaces.

Ce résultat pouvait facilement se prévoir géométriquement. La rosace est décrite par le point M tel que O′M = O′O, invariablement lié au cercle O′ qui roule sur le cercle O. L'épicycloïde normale correspondante est décrite par le point P. Or, on sait que sa normale en P passe par A. Donc la parallèle menée par M passe constamment par O, condition de la génération des Conchoïdes.

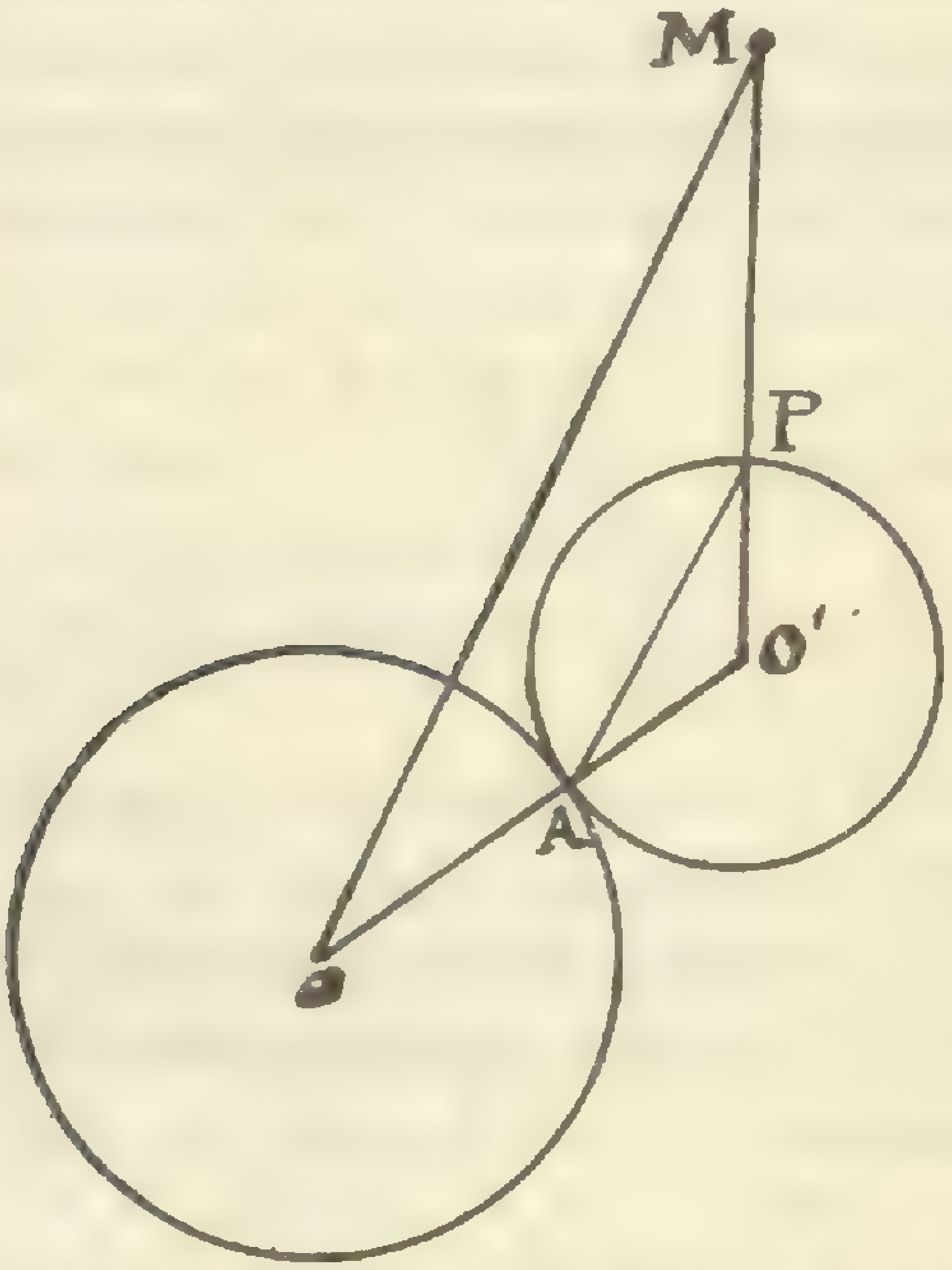


Fig. 2.

II. — Un autre groupe de courbes provenant de l'égalité des vitesses du plan et de l'un des cercles (A) ou (B).

$$p = 1$$

Le Cercle, le Scarabée, les Foliums, etc., et leurs conchoïdes

Les formules (3) combinées linéairement donnent alors :

$$(12)\quad \begin{cases} x\cos\varphi - y\sin\varphi = a\cos(m\varphi + \theta) - \alpha \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi = b\sin\varphi - \beta. \end{cases}$$

La seconde de ces formules montre qu'une importante simplification s'obtient en supposant $\beta = 0$.

Si on pose dans ce cas

$$x = b + \rho \cos \omega \qquad y = \rho \sin \omega,$$

il vient

$$\begin{gathered} b \cos \varphi + \rho \cos (\omega + \varphi) = a \cos (m\varphi + \theta) - \alpha \\ \sin (\omega + \varphi) = 0. \end{gathered}$$

D'où, pour équation polaire de la courbe

$$\rho = a \cos (m\omega - \theta) - b \cos \omega - \alpha. \tag{13}$$

On a ainsi une *conchoïde* de la courbe :

$$\rho = a \cos (m\omega - \theta) - b \cos \omega. \tag{14}$$

Cette formule (14) réunit des courbes fort différentes. Ainsi on a :

le cercle	pour	$m = 1$	
le scarabée	pour	$m = 2$	$\theta = 0$
les trifoliums	pour	$m = 3$	

Ce dernier cas mérite d'être étudié particulièrement.

Nous posons, avec $m = 3$, $a = b$,

$$\theta = \pi + 2\theta' \qquad \omega = \pi + \omega.$$

La formule (14) devient

$$\rho = a\,[\cos (3\omega' - 2\theta') + \cos \omega'] = 2a \cos (2\omega' - \theta') \cos (\omega' - \theta').$$

Posons

$$\omega' = \theta' + \omega''$$

il vient

$$\rho = 2a \cos (2\omega'' + \theta') \cos \omega \tag{15}$$

qui est bien l'équation générale du trifolium.

Pour terminer nous pourrons donner une autre explication géométrique du mouvement représenté par les formules (3). Si nous posons :

$$\begin{cases} x_1 = [a\cos(m\varphi+\theta)-\alpha]\cos\varphi \\ y_1 = -[a\cos(m\varphi+\theta)-\alpha]\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = (b\sin p\varphi-\beta)\sin\varphi \\ y_2 = (b\sin p\varphi-\beta)\cos\varphi. \end{cases}$$

nous avons :

$$(16) \qquad x = x_1 + x_2 \qquad\qquad y = y_1 + y_2$$

Soit M_1 le point (x_1, y_1), M_2 le point (x_2, y_2), M le point (x, y) ; OM est vecteur résultant de O_1M_1, O_2M_2. Or, ces deux vecteurs sont perpendiculaires. M_1 et M_2 décrivent respectivement les conchoïdes de rosaces :

$$(17) \qquad \rho = a\cos(\theta - m\omega) - \alpha$$

$$(18) \qquad \rho = b\sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\right) - \beta.$$

Le mouvement peut donc être ainsi défini : un angle droit tourne autour du pôle des 2 conchoïdes de rosaces (17) et (18). L'extrémité du vecteur résultant des deux rayons vecteurs ainsi définis décrit une courbe. Ce sont toutes ces courbes que peut tracer le Campylographe.

QUELQUES OBSERVATIONS

SUR

LA SERRE ET LES RÉGIONS VOISINES

PAR

M. le Chanoine BOURGEAT

On appelle montagne de la Serre un dôme de terrains primitifs qui s'élève au nord de Dôle entre la Côte-d'Or et le Jura, à peu près au milieu de la ligne qui réunirait la pointe méridionale des Vosges au bassin du Creusot. Son importance comme étendue n'est que peu considérable, car c'est à peine s'il mesure 10 ou 12 kilomètres de long sur 4 à 5 de large; mais il présente un très grand intérêt en raison de sa position.

Il semble en effet établir une liaison entre les Vosges et le Plateau Central et jalonner une branche du pli Hercynien qui se poursuivrait de Ronchamp vers le Creusot par dessous la couverture des terrains sédimentaires plus récents. De plus, comme autour de lui cette couverture varie beaucoup d'âge et de physionomie, il est un témoin précieux des phénomènes qui se sont déroulés dans la région qu'il occupe. Aussi a-t-il attiré depuis longtemps l'attention des géologues.

En 1854, il fut l'objet des recherches de Pidancet qui y recueillit beaucoup d'observations, mais qui se contenta de les communiquer à ses amis. Vers la même époque, on essaya par des sondages d'y découvrir la houille.

En 1857, il donna lieu à une excellente note de Coquand, qui fit remarquer les analogies que présentent les sédiments permiens et triasiques de son contour avec ceux de Ronchamp et du Creusot (*).

Depuis cette époque il fut successivement étudié par MM. Jourdy (**), Bertrand (***), Fournier (iv) et Deprat (v). J'ai, de mon côté, publié dans le Bulletin de la Société géologique de France plusieurs notes qui s'y rattachent.

En revenant aujourd'hui à l'étude de ce massif, mon but n'est pas de donner des coupes de détail, que je réserve pour un travail plus complet ; je voudrais simplement résumer son histoire en m'appuyant sur les faits les plus saillants, sans avoir la prétention de ne dire que du nouveau.

Ce qui frappe tout d'abord lorsqu'on examine le massif cristallin, c'est sa direction nord-est qui est celle des plis Hercyniens sur la bordure orientale du Plateau Central et celle aussi du Jura dans sa partie nord. On s'aperçoit bien vite aussi que cette direction est à peu près celle des cours d'eau qui l'avoisinent : le Doubs à l'est, l'Ognon au nord et la Saône un peu plus loin à l'ouest vers le Bassin de Paris. Son action sur ces cours d'eau paraît incontestable, en même temps que ses relations avec les terrains sédimentaires méritent d'être signalées.

Vers l'est, en effet, c'est-à-dire du côté du Doubs, on ne voit affleurer autour de lui ni le Calcaire à Gryphées, ni les étages supérieurs du Trias, ni le Muschelkalk, ni aucune formation permienne. Seule une sorte d'arkose ou de grès quartzifère, qu'on rapporte au grès bigarré, y présente quelques affleurements très limités émergeant au-dessous des formations du Lias supérieur ou des étages du Jurassique. Il y a donc partout de ce côté des contacts anormaux ; car c'est tantôt l'arkose, tantôt le Lias supérieur, tantôt le Jurassique inférieur ou moyen qui touche à la granulite ou au gneiss. Est-ce par suite d'une faille réelle ou par l'effet d'une transgressivité dans la sédimentation ? C'est là une

---

(*) Bulletin de la Société géologique de France, 1re série, t. 14.

(**) Bulletin de la Société géologique, 2e série, t. 28 et 29.

(***) Feuille de Besançon.

(iv) *La Tectonique du Jura :* Feuille des jeunes naturalistes, 335, 336.

(v) Feuille des jeunes naturalistes, nos 338, 339, 340.

question que nous n'examinerons pas ici. Nous nous contenterons de constater que dans la partie nord de cette bordure orientale, le dôme semble s'engouffrer au-dessous d'une nappe de Lias et de Jurassique inférieur, qui se prolonge sur un parcours de plus de 60 kilomètres vers le Trias salifèrien de Miserey.

A l'ouest et au nord, le gneiss est recouvert par des grès rouges, des poudingues permiens entourés eux-mêmes de Trias, de Lias, de Jurassique et de quelques lambeaux de Crétacé. Plus au loin dans la vallée de la Saône se montrent les calcaires à *Planorbis Cornu* de Talmay et les calcaires lacustres Oligocènes. Celles de ces formations qui sont proches de la Serre sont coupées de failles ou relevées par le massif, mais elles ne présentent pas cette série de plis qui les caractérisaient plus à l'est dans le Jura.

Vers le sud, c'est-à-dire dans la direction de Dôle, les schistes et les gneiss relevés supportent en discordance des couches de grès vosgien presque horizontales. A la suite et en retrait dans une disposition à peine inclinée se succèdent le grès bigarré, le Muschelkalk et quelques assises inférieures des marnes irisées qui s'engouffrent à leur tour sous une couverture de Secondaire ou de Quaternaire.

Des filons assez nombreux de pegmatite traversent le granite et gneiss. Deux surtout sont bien visibles, l'un près de Serre-les-Mouillères, l'autre près d'Amange.

D'autres filons plus nombreux de Pétrosilex et d'Eurite, passant parfois à la Pyroméride, y traversent non seulement les terrains cristallins, mais encore les couches inférieures du Permien.

Permien. — Lorsqu'on examine le Permien, le premier étage sédimentaire visible, on constate les deux faits suivants :

1° Les poudingues qui en constituent la majeure partie sont en très grande partie formés de débris de Granite, de Gneiss et d'Eurite sans aucune trace de débris sédimentaires, ce qui prouve deux choses : premièrement, que le reste du Primaire, c'est-à-dire le *Sibérien*, le *Dévonien* et le *Carbonifère,* s'il s'est déposé dans la région, doit se montrer assez loin ou être lui-même à l'état de poudingue; que les Eurites et les Pétrosilex ont fait éruption dès le début du Permien.

2° Le Permien contient quelque peu de Dolomie avec des Calcédoines rouges, d'aspect jaspoïde et des traces de Barytine.

C'est à peu près ce que l'on trouve dans le Permien de Saint-Dié aux environs de Robache, où les Dolomies et les Calcédoines sont beaucoup plus nombreuses. Faut-il voir dans ces deux substances un produit d'éruption comme pourrait le faire croire leur association avec certains débris d'Eurite, ou vaut-il mieux supposer que la Dolomie du moins est d'origine sédimentaire? C'est là une question que je n'oserais résoudre ; mais, ayant vu si fréquemment les Calcédoines dans les dépôts lacustres ou demi-saumâtres du Purbeckien, je serais porté à croire qu'il y avait à l'époque permienne sur le pourtour de la Serre des sortes de lagunes, où les Dolomies se déposaient, pendant que les cours d'eau y déversaient des produits d'érosion provenant des Eurites, Pétrosilex ou des terrains primitifs.

Trias. — Si l'on passe ensuite au Trias, trois faits attirent l'attention :

1° Les premières assises, qui reposent sur le gneiss relevé, sont presque horizontales. Elles sont quasi sableuses et on y remarque beaucoup de débris de Pétrosilex plus ou moins altérés. La stratification en est entrecroisée comme celle des dunes ou des hauts fonds. Ces faits montrent évidemment que le massif s'affaissa après le Permien, que la mer n'y acquit toutefois qu'une faible profondeur, et surtout que la Serre n'a pas subi de commotions violentes depuis cette époque; sinon, la quasi horizontalité de ces couches aurait été troublée.

2° Les Calcaires y sont rares dans le Muschelkalk qui est en grande partie formé de Dolomie.

3° Les Gypses y sont peu développés dans les marnes irisées et le Sel semble jusqu'ici y faire défaut vers l'ouest et vers le sud. Ce faible développement du gypse et cette absence probable de sel à proximité du massif fait supposer que les conditions, qui ailleurs en favorisaient le dépôt, n'ont pas été réalisées à l'ouest au voisinage de la Serre. Comme ce sont des produits d'évaporation, il est naturel d'admettre que de ce côté-là les eaux marines devenaient rapidement profondes. Il n'en serait pas de même vers le nord sur le prolongement du Jurassique inférieur, dont nous avons parlé, car, à Miserey, les marnes irisées contiennent du sel qu'on exploite.

Lias. — En ce qui concerne le Lias, la principale remarque à faire est que les marnes, qui en constituent les couches supé-

Ouest
Vallée de la Saône
La Serre
Vallée du Doubs
Environs de Salins
Est
A
Ouest
Vallée de la Saône
La Serre
Vallée du Doubs
Environs de Salins
Est
B
Ouest
Saône
La Serre
Doubs
Salins
Est
Jura
C
1
2
3
4
5
6

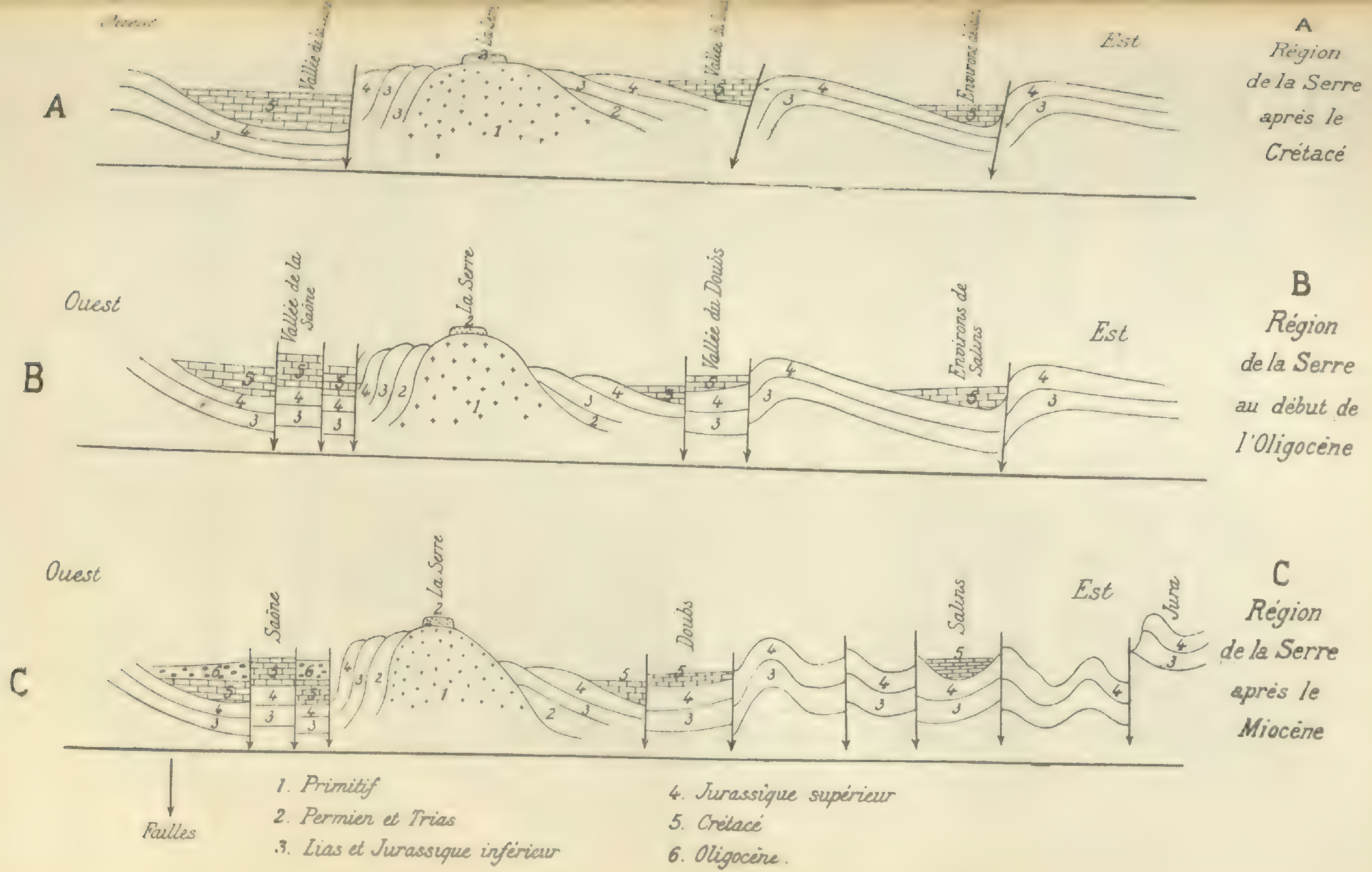
A
Région
de la Serre
après le
Crétacé

B
Région
de la Serre
au début de
l'Oligocène

C
Région
de la Serre
après le
Miocène

↓ Failles

1 *Primitif*
2 *Permien et Trias*
3. *Lias et Jurassique inférieur*
4 *Jurassique supérieur*
5 *Crétacé*
6. *Oligocène.*


A
Ouest
La Serre
Est
Région de la Serre après le Crétacé
B
Ouest
Vallée de la Saône
La Serre
Vallée du Doubs
Environs de Salins
Est
Région de la Serre au début de l'Oligocène
C
Ouest
Saône
La Serre
Doubs
Salins
Est
Jura
Région de la Serre après le Miocène
Failles
1. Primitif
2. Permien et Trias
3. Lias et Jurassique inférieur
4. Jurassique supérieur
5. Crétacé
6. Oligocène.

rieures, sont fortement micacées et en quelque sorte gréseuses sur le bord oriental de la Serre, non seulement à proximité, mais à une assez grande distance d'elle dans la direction du grand recouvrement infrajurassique qui s'étend du côté de Miserey. On y trouve sur plus d'un point des empreintes végétales ou des cristaux de gypse, qui m'ont paru surtout abondants du côté d'Évans et de Berthelange.

Cette constitution, jointe à la présence d'une faune quasi littorale, ne permettrait-elle pas de supposer que là le massif primitif formait une saillie au-dessous de ce recouvrement et que le col de Bermont, où le Bathonien forme une traînée à peu près normale à la direction de la Serre, correspond à un ancien couloir séparant deux saillies du pli Hercynien : la Serre vers le sud, le bombement en question vers le nord.

S'il en est réellement ainsi, le massif de la Serre se trouverait singulièrement allongé. Ce serait une vraie barrière ou mieux un long seuil qui aurait été émergé de Dôle à Miserey au début du Jurassique et de part et d'autre duquel les terrains de cet âge doivent offrir une constitution différente. Et de fait ils offrent des différences sensibles suivant qu'on les observe à l'ouest où à l'est.

Jurassique. — A l'ouest vers Ougney, Montmirey-la-Ville et Rainans, le Bajocien inférieur présente à son contact avec le Lias des assises oolithiques franchement ferrugineuses, qui ont été à Ougney l'objet d'une sérieuse exploitation. A l'est au contraire, tant aux environs de Besançon qu'à Gendrey et Evans, la présence du fer est moins abondante et ne suffit pas pour constituer un minerai.

Dans ses assises supérieures, le même étage Bajocien est bien plus franchement coralligène du côté de l'ouest que du côté de l'est ; mais il l'est surtout le long du grand couloir qui aurait séparé la Serre du massif nord.

De même le Bathonien, si riche en chailles et en bryozaires du côté de l'ouest, n'en présente que peu ou même point à l'est du massif.

Si dans l'Oxfordien les changements sont moins observables à raison du peu d'étendue des affleurements, il n'en est plus ainsi lorsqu'on arrive au Jurassique supérieur. Tout le corallien de la bordure orientale est composé de formations à spongiaires et à

Polypiers avec Nérinées nombreuses, tandis qu'à l'ouest on n'en rencontre presque pas.

L'*Ostrea virgula* du Kimméridien, très commune au nord-ouest près d'Ougney, se rencontre à peine dans la direction du Jura, c'est-à-dire de l'autre côté de la Serre.

On sait qu'à cette époque du Jurassique supérieur un grand phénomène d'émersion se produisit dans le Jura en commençant vers l'ouest. La mer, avec sa bordure de récifs coralliens, se retira de plus en plus vers l'est; et, quand les assises portlandiennes eurent fini de se déposer il n'y eut plus sur les terres émergées du Jura qu'une longue dépression lacustre ou mieux une série de lacs, qui s'étendait de Belley vers Neuchâtel et dont la trace est marquée par les dépôts à fossiles d'eau douce du Purbeckien.

A la même époque aussi le bord oriental du bassin de Paris se releva, mettant à sec le détroit de la Côte-d'Or, qui avait durant tout le Jurassique maintenu en communication les mers du Midi avec le Bassin anglo-parisien.

Est-ce que le contre-coup de ces mouvements ne se fit pas sentir dans la région intermédiaire, c'est-à-dire près du massif qui nous occupe? Tout montre qu'il y participa, mais d'une façon particulière. Tandis que sur son flanc oriental les assises du Jurassique supérieur s'y montrent très sérieusement en retrait les unes par rapport aux autres, elles ne le sont que faiblement sur le bord occidental, c'est-à-dire du côté de la vallée de la Saône. L'Oxfordien est en effet presque complètement recouvert par le Corallien et par l'Astartien, comme ceux-ci le sont par le Virgulien. Il y a même un point, au voisinage de Brans, où le Portlandien déborde les étages inférieurs et vient presque en contact immédiat avec le Trias.

Cela nous autorise à croire que la Serre, avec ce que nous avons appelé son prolongement vers le nord, s'exondait du côté du Jura tandis que vers la Saône se dessinait une fosse où les sédiments s'accumulaient les uns sur les autres sans se disposer en retrait.

Lorsque le Jurassique prit fin toute la Serre et toutes les régions circonvoisines connues se trouvaient émergées. Nous en avons la preuve dans l'absence du Purbeckien et du Valanginien, aussi bien que dans la présence de certaines brèches qui se trouvent comprises dans ces régions entre le Jurassique supérieur et les dépôts de l'Hauterivien ou du Gault. L'une des plus visibles est celle que l'on peut observer vis-à-vis le parc de M. le baron d'Aligny à Montmirey-la-Ville et qui, reposant sur le Portlandien, supporte les assises Hauteriviennes, dont MM. de Tribolet et Charpy ont décrit la faune en 1884.

Tout porte à croire que, pendant que cette émersion s'effectuait, la région comprise entre la Serre et les avant-monts actuels du Jura s'était divisée aussi en deux bombements longitudinaux parallèles à la Serre ou aux anciens plis Hercyniens, offrant chacun une fosse sur leur regard occidental et abaissant au contraire lentement leurs croupes du côté de l'est.

C'est dans celle de ces fosses qui était la plus voisine de la Serre, que se serait déposé le Crétacé de Rozet sur le Doubs, et dans la plus orientale qu'on trouve le petit lambeau de Néocomien de S^t^ Thiébaud près de Salins au pied du mont Poupet.

Je pense donc en résumé que lorsque la période Jurassique prit fin, il y eut entre le Jura, qui refoulait l'Océan vers le sud-est et la région de la Côte-d'Or, qui le refoulait vers le nord-ouest, toute une région, celle de la plaine actuelle de la Saône, où le terrain, également exondé, était divisé en compartiments alternativement saillants et rentrants, qui couraient du sud-ouest au nord-est et qui offraient sur une coupe transversale une véritable disposition en crémaillère.

Comme toutefois les lambeaux de Trias, que nous avons signalés dès le commencement de cette note sur l'axe granitique de la Serre, y sont restés sensiblement horizontaux, il faut croire que l'exhaussement général qui mit fin à la période Jurassique ne fut qu'un mouvement très lent et de sens vertical. Si, en effet, il eut été brusque ou tangentiel, ces couches triasiques en auraient subi le contre-coup et seraient inclinées.

Crétacé. — Nous avons vu tout à l'heure qu'au-dessus des brèches qui surmontent le Jurassique supérieur à Montmirey-la-Ville, s'observent des assises à faune néocomienne. Vers le milieu du Néocomien, en effet, les fosses du Jurassique supérieur s'affaissèrent de nouveau et la mer du Midi pénétra sous la forme de fjords dans les vallées actuelles de la Saône et du Doubs. Dans ces golfes étroits se déposèrent successivement l'Hauterivien, le Gault et quelques assises de Cénomanien. Tous ces dépôts, par leur structure et par leur faune littorales, témoignent de la faible profondeur et de la faible étendue des eaux. Comme l'a fait remarquer d'ailleurs M. Deprat, ils n'ont que peu de ressemblance avec ceux qu'on trouve au même âge dans la partie orientale du Jura. Tous les géologues ont admis qu'à cette époque les eaux marines de cette vallée de la Saône, comme la faune en témoigne, étaient rentrées de nouveau en communication avec celles du Bassin de Paris. Si le fait ne paraît pas douteux, on peut se demander si c'est bien par le détroit de la Côte-d'Or que la communication s'était rétablie, attendu que jusqu'ici on n'a trouvé aucun lambeau de Crétacé sur l'emplacement de ce détroit. Ne serait-ce pas plutôt par la région du Morvan sur le contour de laquelle on trouve de nombreux gisements de silex, résidus d'une dissolution de la craie, et dont les mouvements durant le Secondaire ont eu beaucoup d'analogies avec ceux de la Serre ?

Tertiaire. — Quoi qu'il en soit, lorsque vers la fin du Crétacé les eaux marines se retirèrent du Bassin de Paris et de la région du Jura, elles abandonnèrent aussi la vallée de la Saône. Le sol y subit un exhaussement qui dura tout le temps de l'Éocène inférieur et moyen. Mais à l'époque de l'Éocène supérieur, un mouvement inverse du sol y produisit des bassins où l'eau douce s'accumula, comme en témoignent les Calcaires à *Planorbis cornu* de Talmay. Durant l'Oligocène ce mouvement prit des proportions telles que toute la haute vallée de la Saône fut submergée. Les dépôts lacustres de cette époque s'étendent, en effet, fort loin vers le nord et l'ouest comme il est facile de le constater snr les feuilles géologiques de Besançon, de Dijon et de Gray.

Est-ce que ce lac était isolé, ou se reliait-il aux eaux lacustres qui d'une part recouvraient la vallée du Rhin jusqu'au sud de Belfort et qui de l'autre occupaient la dépression de la Loire jusqu'auprès de Paray-le-Monial. Il serait téméraire actuellement de se prononcer sur ce point. Si je ne craignais toutefois de soulever les protestations des géologues, j'oserais presque dire vu la ressemblance des faunes que la communication de la région de la Loire avec celle de la Saône à cette époque ne semble pas plus improbable que celle de la Loire avec le Bassin de Paris. Toute la solution de la question dépend des découvertes de Tertiaire qui pourront se faire sur la feuille d'Antun.

M. Deprat, dans sa récente étude sur la Serre, croit que l'affaissement de l'Éocène supérieur et de l'Oligocène, qu'il appelle affaissement Pyrénéen, se produisit non seulement à l'ouest de la Serre, mais encore à l'est jusqu'au pied du Jura dans le voisinage d'Arbois et de Salins, où des failles nombreuses orientées à peu près parallèlement à la Serre accidentent les divers étages du Jurassique.

La chose est possible, mais la seule direction des failles ne suffit pas à l'établir, il faudrait pour en avoir la certitude découvrir quelque affleurement oligocène dans la vallée du Doubs ou de la Loue, entre Montbarrey et Belmont.

Il n'en est pas moins vrai cependant, que l'affaissement de l'époque tertiaire produisit à l'ouest de la Serre des effondrements locaux d'une grande importance. La plupart des lambeaux crétacés qui avaient échappé à l'érosion, lorsque les lacs se formèrent, sont en effet coupés de failles qui les ont descendus par contact anormal au niveau d'assises plus *anciennes du Jurassique.* Comme les dépôts lacustres oligocènes supérieurs qui les recouvrent ne paraissent pas dérangés, il faut admettre que c'est avant leur formation que ces effondrements eurent lieu et que le plissement Miocène du Jura ne se fit pas sensiblement sentir dans cette région.

Il en fut autrement des territoires compris entre la Serre et le Jura. Là, si des effondrements s'étaient déjà produits avant l'Oligocène, comme le suppose M. Deprat, ils furent au moins fortement influencés par la poussée venue de l'est. Il s'y produisit des chevauchements nombreux et les failles prirent un air de parenté avec les plis du Jura. Mais la Serre, sur laquelle le Trias est resté presque horizontal, n'en fut pas sensiblement affectée.

Résumé. — En résumé, on voit que durant la série des temps secondaires et tertiaires, ce massif offre presque les caractères d'un *horst.* Plissé une fois pour toutes vers la fin du Carbonifère, il subit bien quelques oscillations légères d'affaissement et d'exhaussement, quelques faibles mouvements de bascule durant le Secondaire et le Tertiaire ; mais c'est de part et d'autre de sa croupe que les grands effondrements se produisirent et préparèrent les voies que suivront dans leur cours supérieur la Saône, l'Ognon et le Doubs. Sous le rapport de l'antiquité, il n'y a guère, semble-t-il, de rivières qui puissent le disputer à ces dernières. La région qu'elles arrosent avait son relief déjà en grande partie accusé, alors que celle du Jura enfermée sous les eaux marines de la mollasse avait une physionomie bien différente de celle qu'elle présente aujourd'hui.

Nous devons ajouter toutefois, que pour être ancien, le bassin supérieur de la Saône n'en est pas encore arrivé à l'immobilité de la vieillesse. Chaque jour, depuis le Tertiaire, il s'est accru et il s'accroît par des conquêtes faites du côté de l'ouest et du nord sur le domaine de la Seine. Nous espérons pouvoir montrer un jour comment l'Ouche, la Tille et la Vingeanne, en poussant leur tête plus en avant, drainent en faveur de la Saône une notable partie des plateaux bourguignons.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

que l'on rencontre en Physique mathématique
et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité

PAR

J. DELEMER

Docteur en sciences
Professeur suppléant à la Faculté libre des sciences de Lille

CHAPITRE PREMIER

Exposé de la question traitée dans le mémoire

Je me propose d'étudier ici des équations aux dérivées partielles que l'on rencontre dans diverses branches de la Physique mathématique. Je me permettrai de dire un mot en commençant sur les raisons qui m'ont amené à considérer ces équations.

Dans son traité d'électricité, aux premières pages du chapitre intitulé « Théorie électromagnétique de la lumière „, Maxwell pose trois équations aux dérivées partielles, qu'il appelle les équations générales des perturbations électromagnétiques.

Ces équations régissent en somme la propagation de telles perturbations dans un milieu diélectrique présentant une certaine conductibilité c différente de 0. Un semblable milieu, capable de transmettre l'induction électrique, ou si l'on veut, ce que Maxwell appelle le déplacement, propagera en même temps l'électricité par conduction.

On sait que s'il n'existe aucun corps parfaitement conducteur et aucun parfaitement isolant, presque tous les corps connus sont, ou de bons conducteurs, ou de bons isolants. Toutefois, il doit en exister chez lesquels les caractères de l'isolant sont assez imparfaits pour que la transmission par induction des vibrations électromagnétiques ne puisse se faire nettement à leur intérieur. A la propagation de ces vibrations dans de tels corps pourraient s'appliquer les équations de Maxwell.

Peut-être rentreraient dans cette catégorie de milieux, certains diélectriques placés dans des conditions spéciales, certains gaz chauffés, voire le chlore, la vapeur d'iode, l'acide iodhydrique gazeux, les vapeurs de sodium et de potassium, gaz que la chaleur rend sensiblement conducteurs.

Maxwell fut conduit à poser les équations dont je viens de parler pour interpréter les lois du cheminement des vibrations lumineuses à travers les corps imparfaitement isolants et expliquer par le fait, l'absorption de la lumière par ces corps, la conductibilité coïncidant jusqu'à un certain point avec l'opacité. On sait qu'aux yeux de Maxwell, la vibration lumineuse est une vibration électromagnétique.

Il est clair que si les relations en question régissaient réellement la propagation des vibrations électromagnétiques dans un diélectrique imparfait tel, par exemple, que ceux que je viens de citer, elles s'appliqueraient par le fait même à la transmission dans le même diélectrique des oscillations d'un excitateur de Hertz.

Laissons le côté expérimental de la question et disons de suite que c'est l'étude des équations posées par Maxwell et de l'interprétation physique qu'il en tire, puis surtout l'étude d'équations plus simples, cas particuliers des premières, intégrées et discutées d'une manière beaucoup plus approfondie par M. H. Poincaré, puis par M. Boussinesq, qui m'ont porté à présenter aussi quelques considérations sur ce sujet.

Écrivons d'abord les équations de Maxwell (*)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &u\left(4\pi c + k\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dx}\right) - \Delta_2 F + \frac{dJ}{dx} = 0\\ &u\left(4\pi c + k\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dt} + \frac{d\Psi}{dy}\right) - \Delta_2 G + \frac{dJ}{dy} = 0\\ &u\left(4\pi c + k\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dt} + \frac{d\Psi}{dz}\right) - \Delta_2 H + \frac{dJ}{dz} = 0\end{aligned}\right.$$

(*) Δ_2 désigne ici le paramètre différentiel du second ordre $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$. Maxwell est amené à désigner la même expression par $-\nabla_2 F$ à cause de l'emploi qu'il fait des quaternions.

Ces équations régissent la propagation des composantes F, G, H de la quantité que Maxwell appelle “ quantité de mouvement électrocinétique (*) „

Ψ y représente le potentiel électrostatique,

J est l'expression $\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$,

k le pouvoir inducteur spécifique du milieu.

Ces relations se simplifient. Et d'abord, Maxwell suppose en général dans ses théories électromagnétiques que J est nul. Mais, de toute manière, il n'y a lieu de tenir compte ni de J ni de Ψ, si on suppose les perturbations périodiques. On le voit aisément en développant un peu divers raisonnements de Maxwell.

Dérivons, comme le fait Maxwell, les équations (1) respectivement par rapport à x, à y et à z, puis additionnons-les, nous obtiendrons

$$u\left(4\pi c + k\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dJ}{dt} + \Delta_2\Psi\right) = 0. \tag{2}$$

Ψ étant le potentiel électrostatique, $\Delta_2\Psi$ est égal en chaque point, au facteur -4π près, à la densité de l'électricité statique libre en ce point. Or, il ne peut y avoir d'électricité libre permanente en un point d'un milieu même faiblement conducteur, donc

$$\Delta_2\Psi = 0.$$

On négligera aussi dans les équations (1) les composantes $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dy}$, $\frac{d\Psi}{dz}$ de la force électrique qui sera nulle dans notre milieu conducteur.

La relation (2) devient d'après ce qui précède

$$u\left(4\pi c + k\frac{d}{dt}\right)\frac{dJ}{dt} = 0,$$

(*) Voir Maxwell, traduction française du *Traité d'électricité*, t. II, p. 267.

d'où on tire par intégration, M et N étant des constantes

$$J = Me^{-\frac{4\pi c}{k}t} + N.$$

J doit donc être nécessairement en tout point du milieu, ou une fonction du temps s'écartant indéfiniment de sa valeur initiale

$$Me^{-\frac{4\pi c}{k}t} + N,$$

ou une constante N ou 0.

Mais le mouvement est supposé périodique en chaque point, J doit donc y reprendre périodiquement la même valeur. S'il est nul à l'instant initial, il doit donc rester constamment nul.

Nous ne tiendrons compte par conséquent, ni de J ni de Ψ et les équations (1) s'écriront

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} k\mu \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu c \frac{dF}{dt} &= \Delta_2 F. \\ k\mu \frac{d^2G}{dt^2} + 4\pi\mu c \frac{dG}{dt} &= \Delta_2 G \\ k\mu \frac{d^2H}{dt^2} + 4\pi\mu c \frac{dH}{dt} &= \Delta_2 H \end{aligned} \right.$$

Le vecteur F, G, H qui figure dans ces équations est alors précisément le même *que le potentiel vecteur* également défini dans Maxwell (*).

Les trois équations aux dérivées partielles que nous venons d'écrire sont identiques et par conséquent ne font qu'une même relation qui se retrouve d'ailleurs dans d'autres questions que celle de la propagation de l'électricité.

Cette relation régit encore, en effet, la propagation dans un milieu élastique à trois dimensions d'un ébranlement produit en divers points de ce milieu, lorsque les portions du milieu qui reçoivent l'ébranlement éprouvent pour se déplacer, en sus des

---

(*) Maxwell, *Traité d'électricité*, t. II, pp. 32 et 291.

résistances ordinaires dues aux déformations élastiques, une résistance supplémentaire proportionnelle à la vitesse.

Si l'on suppose que l'élongation de l'ébranlement qui se propage a la même valeur, à chaque instant, en tous points d'un plan normal à la direction de propagation, si, autrement dit, on considère le cas correspondant à celui des ondes planes des milieux élastiques ordinaires, l'étude des équations (3) se ramène a celle de l'équation

$$k\mu \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu c \frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2}. \tag{4}$$

C'est de l'intégration des équations (3) *et* (4) *et plus spécialement de l'équation* (4) *que je désire m'occuper ici* (*). Et d'abord, en choisissant dans l'équation (4) l'unité de longueur ou de temps de manière que $\mu k = 1$, cette relation peut s'écrire, λ étant une constante connue

$$\frac{d^2F}{dt^2} + 4\lambda \frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2}. \tag{5}$$

La quantité μk est précisément égale à l'inverse du carré de la vitesse de propagation V qu'auraient les ondes dans notre milieu diélectrique, si ce milieu, conservant la même valeur pour le produit μk, devenait diélectrique parfait, c'est-à-dire de conductibilité nulle.

Faire $\mu k = \frac{1}{V^2} = 1$, c'est donc faire $V = 1$ ou prendre V comme unité de vitesse.

Le lecteur sait sans doute que l'équation (5) a fait l'objet, il y a quelques années, de plusieurs notes remarquables, présentées à l'Académie des sciences de Paris par plusieurs membres de cette Académie.

M. H. Poincaré (**) d'abord, a donné l'intégrale générale de

(*) Rappelons que l'équation (4) régit le mouvement d'une corde vibrante qui, au lieu d'être libre dans l'air, se mouvrait dans un milieu résistant.

(**) H. Poincaré, Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. CXVII, p. 1097. Pour plus de détails, voir H. Poincaré, *Les oscillations électriques* et *Théorie analytique de la propagation de la chaleur.*

l'équation (5) à propos de la résolution d'un problème où il nomme cette relation " équation des télégraphistes „. Mais le savant professeur ne se place pas dans son mémoire au point de vue qui doit nous occuper ici.

J'essayerai dans ce qui va suivre, de me rendre compte des lois de la propagation d'une vibration lorsque cette propagation est régie par l'équation (5). Pour cela, je me donnerai dans (5) la quantité F en fonction du temps en un point déterminé de la direction de propagation, l'origine par exemple, l'équation (5) intégrée devra me donner F en fonction de x, quelque valeur que prenne le temps.

M. Poincaré supposait une perturbation produite à un instant donné le long d'une portion de la droite de propagation, et il cherchait comment cette perturbation allait se transmettre aux moments successifs à droite et à gauche de la région ébranlée. Autrement dit, il se donnait F en fonction de x à l'instant initial dans la région ébranlée, l'équation (5) intégrée lui donnait F en fonction de t.

M. Boussinesq, après M. Poincaré, a intégré l'équation (5) par une méthode curieuse et élégante (*), puis par une sorte d'extension de cette même méthode à un cas beaucoup plus compliqué, il a donné l'intégrale générale de l'une quelconque des équations (3) relatives à la propagation du mouvement en tous sens autour des points ébranlés. Malheureusement, l'intégration des équations (3), effectuée par M. Boussinesq n'est pas applicable à la résolution du problème de la propagation des perturbations périodiques, qu'envisage Maxwell.

Dans le problème tel que le traite M. Boussinesq, on ne se donne pas, en effet, F en fonction du temps, F est supposé connu aux divers points du milieu simplement à l'instant initial. L'auteur se place en un mot au point de vue auquel s'était placé M. Poincaré dans la résolution du problème des ondes planes régies par l'équation (5).

---

*) Boussinesq, Comptes rendus de l'académie des sciences, t. CXVIII, pp. 162 et 163. M. Picard a présenté aussi, de suite après M. Poincaré un travail très intéressant sur l'équation (5). Voir Comptes rendus et Bulletin de la société mathématique de France.

Ce n'est pas, avons-nous dit, de cette façon d'envisager la question que nous désirons nous occuper ici. Toutefois, comme le travail de M. Boussinesq présente l'intégrale générale des équations les plus générales posées par Maxwell, je ne crois pas sortir de mon sujet en rappelant en quelques mots la belle méthode d'intégration de M. Boussinesq et en y ajoutant quelques considérations sur les intégrales obtenues par ce savant professeur. C'est par là que je terminerai ce travail.

CHAPITRE II

Étude de la propagation des perturbations périodiques régies par l'équation

$$\mu k \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu c \frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2}$$

A. — Ainsi que je l'ai dit plus haut, c'est surtout sur cette étude que je désire insister ici. Maxwell avait intégré l'équation en question à l'aide de solutions particulières. Mais, outre que ces solutions ne peuvent rendre compte que de la propagation des mouvements sinusoïdaux, *je vais démontrer* qu'il ne faut pas, même dans le cas de ces mouvements sinusoïdaux, avoir trop de confiance dans ce qu'elles indiquent.

Dans tout ce qui va suivre, pour la simplicité du langage, nous considérerons la quantité F comme représentant une élongation produite en certains points et se propageant dans le milieu considéré. Ceci ne correspond pas exactement à la définition du vecteur F, G, H (potentiel vecteur) qui n'est pas une grandeur physique (*), mais notre supposition, commode pour l'exposé du

---

(*) Il faut remarquer toutefois que de la connaissance de F, G, H en chaque point, on déduit simplement les quantités physiques qui entrent en variation par le passage de la perturbation. Les composantes α, β, γ, de la force magnétique et celles u, v, w, de la vitesse de l'électricité sont les premières des fonctions linéaires des dérivées premières, les secondes des fonctions linéaires des dérivées secondes de F, G, H en x, y, z.

sujet, ne change en rien les résultats mathématiques que nous allons obtenir.

Ceci posé, mettons la relation écrite ci-dessus sous la forme (5) du chapitre précédent

$$\frac{d^2F}{dt^2} + 4\lambda \frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2}. \tag{1}$$

Maxwell donne de cette équation une solution particulière, il pose pour cela

$$F = e^{-px} \cos (nt - qx)$$

quitte à déterminer, par substitution dans l'équation aux dérivées partielles, les constantes p et q.

Nous poserons, en modifiant très peu la forme précédente

$$F = e^{-px} \cos n\,(Vt - x) \tag{a}$$

expression qui satisfera à l'équation (1) pourvu que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 - n^2 = - V^2 n^2 \\ p = 2\lambda V. \end{array} \right. \tag{b}$$

De ce que l'expression (a) est une intégrale particulière de notre équation aux dérivées partielles, Maxwell conclut qu'une vibration pendulaire se transmet dans le cas qui nous occupe, avec la vitesse V, en conservant ses caractères et sa période, mais que l'amplitude, à la distance 1 du centre d'ébranlement est réduite dans le rapport de 1 à $e^{-2\lambda V}$.

Il faut remarquer, si l'on adopte cette interprétation, que la connaissance de la vitesse V avec laquelle la vibration pendulaire va se propager ne laisse plus arbitraires les caractères de la vibration elle-même. Autrement dit, une vibration de période quelconque ne peut se transmettre avec la vitesse V.

Si, en effet, on se donne V dans les équations de condition (b), p et n sont déterminés. Il n'y a donc qu'une seule vibration de période bien déterminée qui corresponde à la vitesse V.

Rappelons à ce sujet que la vitesse de propagation qu'auraient les ondes dans notre diélectrique si nous supposions que sa conductibilité devînt nulle, serait égale à l'unité. Nous avons admis expressément cette condition pour écrire l'équation (1) sous sa forme simplifiée (*).

Demandons-nous alors quelle serait dans le milieu que nous considérons restant imparfaitement isolant, c'est-à-dire conservant pour λ une valeur différente de zéro, la période d'une vibration qui se propagerait avec une vitesse $V = 1$.

On obtient en faisant $V = 1$ dans les relations (b)

$$p = 2\lambda$$

d'où

$$4\lambda^2 - n^2 = - n^2$$

cette dernière exige que $n = \infty$. Seule, l'oscillation pendulaire de période infinie se propagera avec la vitesse ordinaire qu'auraient les ondes dans le diélectrique parfait.

Ce résultat me semble par lui-même bizarre.

Si maintenant, nous considérions des mouvements vibratoires de périodes plus courtes : puis de plus en plus courtes, il est facile de voir que les équations de condition (b) exigeraient que ces mouvements se propageassent avec des vitesses de plus en plus faibles.

Tout ceci paraît encore très peu vraisemblable.

De plus, nous prouverons plus loin que quand un mouvement périodique quelconque, sinusoïdal ou non, naît à un moment donné $t = 0$ en un point de la droite de propagation, à l'origine par exemple; si d'ailleurs la propagation est régie par l'équation (1), il se forme dès le début du mouvement vibratoire, une onde dont la tête se propage nettement avec la vitesse même qu'ont les ondes dans les diélectriques parfaits. Comment concilier ce fait avec les précédents.

Je pense que l'emploi que fait Maxwell de ses solutions particulières n'est pas légitime; car les vibrations réelles commencent à un moment donné, pour $t = 0$ par exemple, et la solution particulière de Maxwell qui se réduit pour $x = 0$ à

$$F = \cos nVt,$$

(*) Voir ci-dessus chapitre I^{er}, p. 5.

représente nécessairement une vibration qui s'effectue depuis $t = -\infty$.

Il n'y a pas besoin de faire remarquer que si mon observation est exacte, les calculs fondés sur l'emploi des solutions particulières et faits par Maxwell en vue de déduire la transparence des diélectriques de la connaissance de leur conductibilité, n'ont plus leur raison d'être. Il n'y a rien d'étonnant à ce que ces calculs aient conduit l'auteur à des résultats que n'a pas confirmés l'expérience (*).

B. — Essayons maintenant de déterminer l'intégrale générale de l'équation (1).

Posons

$$F = ue^{-2\lambda t},$$

u devra satisfaire à la relation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + 4\lambda^2 u. \tag{2}$$

C'est cette équation même que M. Boussinesq, dont j'ai conservé autant que possible les notations, intègre dans la première partie du mémoire mentionné ci-dessus.

Il obtient la solution générale

$$u = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} f(x+\tau)\, J_0\left(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2}\right) d\tau + \int_{-t}^{t} f_1(x+\tau)\, J_0\left(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2}\right) d\tau \tag{3}$$

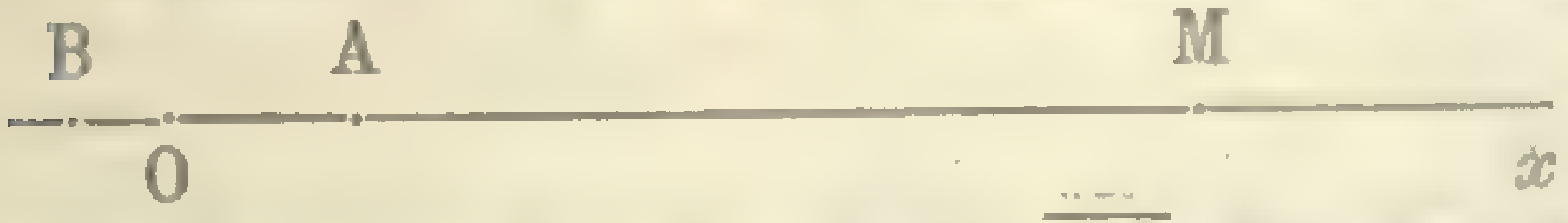
J_0 étant la fonction de Bessel définie par la série

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{1^2.\,2^2} + \frac{z^4}{2^2.\,4^2} - \frac{z^6}{2^2.\,4^2.\,6^2} + \cdots$$

(*) A la vérité Maxwell n'insiste pas beaucoup dans son traité sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles que nous étudions. La manière dont il obtient cette équation y est pourtant mise en évidence et à plusieurs reprises.

La valeur (3) de u se réduit pour $t = 0$ à $f(x)$ et sa dérivée en t, $\left(\frac{du}{dt}\right)$ se réduit, elle, dans les mêmes circonstances à $f_1(x)$. Il est donc facile de tenir compte des circonstances initiales.

Dans son mémoire sur " l'équation des télégraphistes „ ci-dessus mentionné, M. Poincaré s'est attaché à la discussion de l'intégrale (3) (*). Pour cela, soit Ox la droite le long de laquelle le mouvement va se propager; l'auteur suppose données dans la région $\overline{\mathrm{BA}}$ de cette droite les valeurs initiales de u et de sa dérivée en t, puis il détermine comment vont se propager ces ébranlements initiaux.



Pour résoudre le problème que nous étudions, propagation d'une perturbation périodique ou plus généralement, d'une perturbation produite d'une manière continue en un seul point de la droite Ox, nous ne pouvons pas nous servir de l'intégrale de (2) mise sous la forme (3).

Il faudrait, avons-nous dit plus haut, que nous puissions nous donner u ou plus exactement F en fonction du temps, à l'origine par exemple, de manière à en déduire cette même quantité F aux époques successives et aux diverses distances de l'origine.

C'est le résultat que je me suis proposé d'obtenir et voici comment j'y suis arrivé grâce à une remarque simple.

La méthode de M. Boussinesq permet d'intégrer tout aussi bien l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} - 4\lambda^2 u \tag{4}$$

que l'équation (2) qui n'en diffère que par le signe du dernier terme.

Pour passer de l'intégrale de (2) à celle de (4), il suffit de

---

(*) Cette discussion est exposée très détaillée dans les leçons de M. Poincaré sur la chaleur. L'intégrale qu'emploie M. Poincaré dans cette discussion n'est pas exactement mise sous la forme (3) mais on passe d'une forme à l'autre à l'aide d'un très simple changement de variables. Les deux formes conviennent d'ailleurs également bien à la discussion.

J'ai conservé les notations de M. Boussinesq puisque je compte discuter un peu plus loin l'intégrale des équations (3) du chapitre 1^er^ donnée par ce savant.

remplacer dans (3) $J_0\,(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2})$ par $J_0\,(2\lambda\sqrt{t^2 - \tau^2})$. Les développements en série de ces deux fonctions ne diffèrent que par les signes des termes de degré impair en $(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2})^2$ qui sont — pour la première et + pour la seconde (*).

Or, changeons t en x et x en t dans (4) et effectuons le même changement dans l'intégrale de (4).

La relation (4) deviendra

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - 4\lambda^2 u \tag{5}$$

relation identique à (2) et dont l'intégrale sera

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t+\tau)\,J_0\,(2\lambda\sqrt{x^2-\tau^2})\,d\tau \\ & + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f_1(t+\tau)\,J_0\,(2\lambda\sqrt{x^2-\tau^2})\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Telle est la solution générale de (5) ou de (2). u y est exprimé de manière que l'on puisse se donner u et $\frac{du}{dx}$ pour $x = 0$ quel que soit t.

Toutefois, ce n'est pas u, mais F qu'il nous est nécessaire de connaître. D'ailleurs $F = ue^{-2\lambda t}$, donc

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{e^{-2\lambda t}}{2}\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t+\tau)\,J_0\,(2\lambda\sqrt{x^2-\tau^2})\,d\tau \\ & + \frac{e^{-2\lambda t}}{2}\int_{-x}^{x} f_1(t+\tau)\,J_0\,(2\lambda\sqrt{x^2-\tau^2})\,d\tau \end{aligned} \tag{7}$$

Cette solution générale de l'équation (1) et sa dérivée première en x se réduisent pour $x = 0$ à

$$F = e^{-2\lambda t} f(t)$$

(*) La valeur asymptotique de la première fonction, τ restant fini et t devenant très grand, est la même que celle de $J_0\,(2\lambda t\sqrt{-1})$, elle tend vers ∞, la valeur asymptotique de la seconde est la même que celle de $J_0\,(2\lambda t)$, elle tend vers 0.

et

$$\frac{dF}{dx} = e^{-2\lambda t} f_1(t).$$

Nous nous donnerons pour $x = 0$, F et $\frac{dF}{dx}$ sous la forme

$$F_{x=0} = \varphi(t) \qquad \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=0} = \varphi_1(t)$$

il suffira d'attribuer aux fonctions arbitraires $f(t)$ et $f_1(t)$ qui figurent dans (7) les valeurs $\varphi(t)\, e^{2\lambda t}$ et $\varphi_1(t)\, e^{2\lambda t}$ pour satisfaire à ces conditions aux limites.

Remplaçant alors, pour simplifier l'écriture, $J_0(2\lambda\sqrt{x^2 - \tau^2})$ par J_0, nous aurons pour F la formule finale.

$$F = \frac{e^{-2\lambda t}}{2} \frac{d}{dx} \int_{-x}^{x} \varphi(t+\tau)\, e^{2\lambda(t+\tau)}\, J_0\, d\tau$$
$$+ \frac{e^{-2\lambda t}}{2} \int_{-x}^{x} \varphi_1(t+\tau)\, e^{2\lambda(t+\tau)}\, J_0\, d\tau$$

et après simplification

$$(8) \qquad F = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{-x}^{x} \varphi(t+\tau)\, e^{2\lambda\tau}\, J_0\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} \varphi_1(t+\tau)\, e^{2\lambda\tau}\, J_0\, d\tau.$$

A l'aide du changement de variables $\tau = -\tau'$, puis du remplacement subséquent de τ' par τ une fois les calculs effectués, on met encore aisément cette intégrale sous la forme

$$(9) \qquad F = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \left[\varphi(t+\tau)\, e^{2\lambda\tau} + \varphi(t-\tau)\, e^{-2\lambda\tau}\right] J_0\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{0}^{x} \left[\varphi_1(t+\tau)\, e^{2\lambda\tau} + \varphi(t-\tau)\, e^{-2\lambda\tau}\right] J_0\, d\tau.$$

L'une ou l'autre des deux formes (8) et (9) constitue bien la solution générale de notre équation. Chacune de ces expressions (8) et (9) contient en effet deux fonctions arbitraires ; elles se réduisent toutes deux pour $x = 0$ à $F_{x=0} = \varphi(t)$ et leurs dérivées en x relatives à $x = 0$, se réduisent à $\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=0} = \varphi_1(t)$; ce qui nous permet de nous donner quel que soit t, F et $\frac{dF}{dx}$ relatifs à l'origine, et ce qui détermine en même temps les deux fonctions arbitraires φ et φ_1.

Le problème posé au commencement du chapitre semblerait donc complètement résolu, et pourtant, il n'est possible de tirer aucune conclusion physique admissible de l'intégrale (8) ou de l'intégrale (9) (*).

Il faudrait, pour interpréter ces solutions, pouvoir faire un raisonnement analogue à celui qui permet d'interpréter l'intégrale de l'équation ordinaire du son, dans le cas où l'on se donne à l'origine la vibration en fonction du temps.

Cette équation

$$(c) \qquad \frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2}$$

a pour intégrale générale

$$(d) \qquad F = \Phi(t - x) + \Psi(t + x)$$

Or, si l'on s'y donnait F et $\frac{dF}{dx}$ à l'origine en fonction de t, il est clair qu'on déterminerait les fonctions Φ et Ψ, mais l'expression à laquelle on arriverait n'aurait pas plus de sens au point de vue physique que nos intégrales (8) et (9).

On interprète au contraire aisément l'intégrale (*d*) pour les

---

(*) Bien que n'ayant pas pu tirer de cette intégrale la loi physique de la propagation, j'ai cru intéressant de citer les calculs qui précèdent, ne serait-ce que pour montrer, qu'en physique, il ne suffit pas toujours d'obtenir, dans un problème, l'intégrale générale, même si celle-ci peut se plier commodément aux conditions initiales ou aux conditions aux limites.

points d'abscisses positives par exemple, à l'aide la manière de raisonner suivante :

Supposons que le mouvement vibratoire qui doit se propager, commence à l'origine pour $t = 0$. Il en résulte que quand t était compris de $-\infty$ à 0, F était constamment nul. Mais cela devait avoir lieu quel que soit x, c'est-à-dire x variant de 0 à $+\infty$. Ces conditions obligent la fonction Φ à être nulle pour les valeurs négatives de sa variable seulement, et la fonction Ψ à être identiquement nulle pour toutes les valeurs de sa variable. La seule fonction arbitraire restante Φ se détermine alors très simplement et l'interprétation physique est immédiate.

J'ai cherché à étendre cette façon de raisonner à la solution générale (9) qui me semblait convenir mieux que (8). Je pensais, en exprimant des conditions de même sorte que celles que je viens de dire, pouvoir établir une relation entre φ et φ_1. La seule fonction arbitraire restante aurait été déterminée en se donnant F à l'origine depuis $t = 0$ jusque $t = \infty$. J'avoue que mes efforts furent absolument inutiles, et j'en concluais qu'il serait bien difficile sans doute d'obtenir quelque résultat intéressant dans le problème qui nous occupe.

Fort heureusement M. Boussinesq à qui j'avais parlé du travail que j'avais fait au sujet de l'équation (1), travail qui fait l'objet des précédentes pages, me dit que cette équation (1) (équation des cordes vibrantes dans un milieu résistant), avait été intégrée complètement par Poisson en 1818, et qu'avant cela elle l'avait été une première fois par Laplace en 1779 ; mais que le travail de ce grand géomètre était resté inachevé.

C'est dans un mémoire intitulé " Mémoire sur les suites " inséré aux recueils des travaux de l'ancienne académie " Histoire et Mémoires de l'Académie des sciences " que l'on trouvera le travail de Laplace.

Or, si l'intégration de Laplace n'est qu'à l'état d'ébauche, la solution qu'il donne est d'une forme qui s'applique bien mieux au cas que nous étudions que notre propre intégrale. Elle nous donne au moins une première conclusion importante au point de vue du but que nous poursuivons. Je terminerai ce chapitre par un rapide exposé des quelques résultats que nous pouvons déduire de l'intégrale de Laplace.

C. — Laplace met l'intégrale de l'équation

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2F}{dt^2} + 4\lambda \frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2}$$

sous la forme

$$\text{(II)} \qquad F = e^{-2\lambda t} \left[\int_0^{t-x} dz\, J\Big(\lambda^2 (t+x)(t-x-z)\Big)\, \varphi(z) \right.$$
$$\left. + \int_0^{t+x} dz\, J\Big(\lambda^2 (t-x)(t+x-z)\Big)\, \psi(z) \right]$$

où φ et ψ représentent des fonctions arbitraires et J une fonction telle que si l'on appelle θ sa variable (*), cette fonction satisfasse à l'équation différentielle

$$\theta \frac{d^2J}{d\theta^2} + \frac{dJ}{d\theta} - J = 0.$$

On voit aisément qu'une solution particulière de cette équation se développe sous la forme

$$J = 1 + \frac{\theta}{1^2} + \frac{\theta^2}{1^2 . 2^2} + \frac{\theta_3}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \cdots$$

c'est-à-dire que J est la fonction de Bessel J_0 citée plus haut de la variable $2\sqrt{-1}\;\sqrt{\theta}$.

On peut prouver très simplement par dérivation que l'expression (II) est bien la solution de l'équation (I).

Pour le faire le plus rapidement possible, rappelons que si dans l'équation (I) on pose

$$F = ue^{-2\lambda t}$$

(*) $\theta = \lambda^2 (t + x)(t - x - z)$ dans la 1^{re} intégrale et $\theta = \lambda^2 (t - x)(t + x - z)$ dans la seconde.

u satisfait à

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + 4\lambda^2 u.$$

Posons encore

$$s_1 = t + x$$
$$s = t - x$$

nous obtiendrons

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{ds_1^2} + \frac{2d^2u}{ds\,ds_1} + \frac{d^2u}{ds^2}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{ds_1^2} - \frac{2d^2u}{ds\,ds_1} + \frac{d^2u}{ds^2}$$

et l'équation (III) deviendra

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d^2u}{ds\,ds_1} - \lambda^2 u = 0.$$

Nous devons démontrer que l'intégrale de cette équation est égale à l'expression (II) divisée par $e^{-2\lambda t}$. Or, cette expression (II) divisée par $e^{-2\lambda t}$ s'écrit en tenant compte du changement de variable qui introduit s *et* s_1 à la place de t et x

$$\text{(V)} \quad u = \int_0^s dz\, \mathrm{J}\Big(\lambda^2 s_1 (s - z)\Big)\, \varphi(z) + \int_0^{s_1} dz\, \mathrm{J}\Big(\lambda^2 s (s_1 - z)\Big)\, \psi(z).$$

Reste à vérifier que (V) est bien l'intégrale générale de (IV).

Or chacun des termes de (V) est une intégrale de (IV), en effet prenons-en le premier terme et dérivons-le en s puis en s_1.

$$\frac{du}{ds} = \int_0^s dz\, \frac{d\mathrm{J}}{d\theta}\, \lambda^2 s_1\, \varphi(z) + \varphi(s)$$

$$\text{(VI)} \quad \frac{d^2u}{ds\,ds_1} = \int_0^s dz \left[\frac{d^2\mathrm{J}}{d\theta^2}\, \lambda^4 s_1 (s - z)\, \varphi(z) + \frac{d\mathrm{J}}{d\theta}\, \lambda^2\, \varphi(z)\right] + 0;$$

expression qui substituée dans (IV) donne, si l'on se rappelle que

$$\theta = \lambda^2 s_1 (s - z),$$

$$\text{(VII)} \qquad \int_0^s \lambda^2 \, dz \left(\theta \frac{d^2 J}{d\theta^2} + \frac{dJ}{d\theta} - J \right) \varphi(z) = 0.$$

Or, cette relation sera toujours satisfaite si la parenthèse est nulle, c'est-à-dire si J obéit à l'équation différentielle

$$\theta \frac{d^2 J}{d\theta^2} + \frac{dJ}{d\theta} - \theta = 0$$

ce qu'on admet par hypothèse.

On démontrerait de même que le second terme de (V) est une solution de (IV), c'est d'ailleurs évident à cause de la symétrie que présentent les deux termes par rapport à s et à s_1.

L'expression (V) étant l'intégrale de (IV), il suffit de remplacer dans cette expression s_1 par $t + x$ et s par $t - x$ pour avoir l'intégrale de (III) ce qui montre que l'expression (II)

$$\text{(VIII)} \qquad F = e^{-2\lambda t} \left[\int_0^{t-x} dz \, J\Big(\lambda^2 (t + x)(t - x - z)\Big) \varphi(z) \right.$$
$$\left. + \int_0^{t+x} dz \, J\Big(\lambda^2 (t - x)(t + x - z)\Big) \psi(z) \right].$$

est bien l'intégrale générale de l'équation (I) du problème (*).

Nous allons interpréter cette solution pour les abscisses positives bien entendu. Supposons F constamment nul quand t est plus petit que 0. Plus exactement, pour toutes les valeurs de t comprises de $-\infty$ à 0, x variant d'ailleurs de 0 à $+\infty$, on a par hypothèse

$$F = 0.$$

Les intégrales, figurant dans (VIII) devront donc être nulles pour toutes les valeurs négatives de leurs limites, quels que soient

---

(*) Le travail de M. Picard sur l'équation des télégraphistes aurait peut-être pu conduire aussi à cette intégrale et aux résultats que nous allons obtenir.

d'ailleurs t et x. Cette condition oblige les fonctions φ et ψ à être nulles pour toutes les valeurs négatives de leurs variables.

De plus, F devant être nul pour toutes les valeurs négatives du temps, x variant d'ailleurs de 0 à $+\infty$, l'intégrale contenant la fonction ψ est identiquement nulle. Ce qui entraîne la nullité de ψ quelle que soit sa variable.

La solution générale se réduit alors au premier terme de (VIII)

$$\text{(IX)} \qquad F = e^{-2\lambda t} \int_0^{t-x} dz\, J\Big(\lambda^2 (t+x)(t-x-z)\Big)\, \varphi(z).$$

Resterait à déterminer la fonction arbitraire φ à l'aide de l'équation à la limite $x = 0$.

Quand le temps t deviendra plus grand que 0, la valeur de F à l'origine sera donnée à chaque instant, ce sera une fonction déterminée de t, $A(t)$ différente de 0 d'une manière générale pour toutes les valeurs positives de t (*).

L'expression ci-dessus de F se réduit pour $x = 0$ à

$$\text{(X)} \qquad F = A(t) = e^{-2\lambda t} \int_0^{t} dz\, J\Big(\lambda^2 (t^2 - tz)\Big)\, \varphi(z).$$

Cette dernière relation ne permet pas de déduire simplement la forme de la fonction arbitraire φ de celle de la fonction connue $A(t)$. Cette fonction φ devra être déterminée dans chaque cas particulier (et probablement non sans labeur). La relation (X) indique cependant d'une manière générale que, dès que $A(t)$ diffère de 0, c'est-à-dire à partir de $t = 0$, il en est de même de φ ; que de plus, la fonction $A(t)$ restant constamment différente de 0 pour les valeurs successives du temps, il en sera certainement de même de φ pour les valeurs successives de sa variable.

Qu'en résulte-t-il pour l'expression générale de F relative à une abscisse quelconque ?

L'équation (IX) qui nous donne aux diverses époques les valeurs

---

(*) Nous avons supposé qu'il s'agissait ici de la propagation de mouvements périodiques, nous devons considérer par conséquent $A(t)$ comme périodique. Ceci ne change en rien d'ailleurs les quelques conclusions que nous donnons.

de F relatives à toutes les valeurs que peut prendre x, indique que tant que $t < x$, l'intégrale $\int_0^{t-x}$ est nulle car la fonction sous le signe somme $\varphi(z)$ est constamment nulle car sa limite supérieure est négative. F prend une certaine valeur dès que $t = x$ et continue ensuite à différer de 0 quelque grand que devienne t.

Donc, au moment où le mouvement commence à l'origine, il naît une onde en ce point, et la tête de cette onde se propage avec la même vitesse égale à l'unité que dans le diélectrique parfait.

Ce fait, comme je l'ai dit au commencement du chapitre, prouve que les solutions particulières dont Maxwell se sert pour intégrer l'équation (1) ne doivent pas être d'un emploi légitime.

Ajoutons qu'il semble résulter encore de l'équation (IX) que la vibration qui se propage de proche en proche ne conserve aux différents points où elle passe aucun de ses caractères. Contrairement à ce que dit Maxwell, sa périodicité notamment pourrait bien ne plus exister.

Enfin, si l'origine cessait, son mouvement au bout d'un certain temps t_1, $A(t)$ redeviendrait nul pour $t \geqslant t_1$. Rien ne prouve d'ailleurs, si l'on se reporte à l'équation (X) qui lie la fonction φ à la fonction A, rien ne prouve, dis-je, que, en ce cas, φ redeviendrait nulle aussi pour des valeurs de sa variable égales ou supérieures à t_1.

Au surplus, même si $\varphi(z)$ redevenait nulle pour $t \geqslant t_1$, l'intégrale (IX) conserverait une certaine valeur pour toutes les valeurs positives de t, donc il n'y aurait pas de queue d'onde nette comme quand un mouvement se propage par ondes planes dans un milieu diélectrique parfait.

Remarque. — On verrait aisément que la solution (IX) que nous avons employée tend vers 0 quand x tend vers l'infini pour une valeur finie du temps.

En effet, dans le développement de J donné plus haut

$$\theta = \lambda^2 \left(t^2 - x^2 - z\,(t + x)\right)$$

est nécessairement négatif. Il en est de même de tous les termes de degré impair de la série en θ et la valeur asymptotique de J relative à $x = +\infty$, est nulle.

CHAPITRE III

Propagation en tous sens autour de la région ébranlée

Ainsi que nous l'avons annoncé au chapitre 1er, nous terminerons cette note en examinant les circonstances de la propagation dans un milieu indéfini en tous sens d'un ébranlement communiqué à un instant donné (instant initial), aux divers points de toute une région de ce milieu. Les lois de cette propagation nous seront données par l'étude détaillée de l'intégrale d'une quelconque des équations (3) du chapitre 1er, due à M. Boussinesq. Rappelons en passant (*) que la relation en question régit une propagation d'ondes dans un milieu élastique présentant à l'ébranlement des résistances spéciales proportionnelles à la vitesse.

M. Boussinesq a lui-même donné les conclusions les plus importantes de son intégration, mais peut-être y a-t-il lieu d'y ajouter quelques remarques.

La première des équations dont il s'agit s'écrit

$$k\mu \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu c \frac{dF}{dt} = \Delta_2 F \tag{1}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{d^2F}{dt^2} + 4\lambda \frac{dF}{dt} = \Delta_2 F \tag{2}$$

en choisissant convenablement les unités.

En fait, la relation aux dérivées partielles dont M. Boussinesq donne la solution générale est plus compliquée que (2). Elle contient, en sus des termes du second ordre, d'autres termes linéaires en F et en ses dérivées partielles premières par rapport à x, y, z et t, termes ayant leurs coefficients constants.

Il est vrai qu'une telle équation en F se ramène à une autre en u

---

(*) Voir page 4.

ne contenant plus aucune des dérivées premières de u par le changement de variable

$$F = u\, e^{ht + lx + my + nz}$$

quitte à déterminer convenablement h, l, m, n.

Ici notamment, en posant

$$F = u\, e^{-2\lambda t}$$

l'équation (2), se ramène à

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Delta_2 u + 4\lambda^2 u. \tag{3}$$

Pour intégrer cette relation, M. Boussinesq se sert de l'intégrale déjà connue de l'équation du son (*)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Delta_2 u.$$

mise par Poisson sous la forme

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\,(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t} \tag{4}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \varphi_1\,(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t}.$$

φ et φ_1 y sont des fonctions arbitraires qui se déterminent d'après l'état initial. φ doit représenter les valeurs initiales de u en chaque point et φ_1, celles de $\frac{du}{dt}$.

La relation (4) signifie d'ailleurs que pour connaître u aux époques successives *en un certain point* M, il suffit d'imaginer à chaque instant une sphère de centre M et de rayon croissant de manière à égaler constamment le temps. Les intégrales figurant dans (4) $\int_\sigma \varphi \frac{d\sigma}{t}$ et $\int_\sigma \varphi_1 \frac{d\sigma}{t}$ devront être prises tout le long

---

(*) Boussinesq, Comptes rendus, mémoire cité plus haut.

de cette sphère, φ et φ_1 représentant bien entendu les valeurs initiales indiquées ci-dessus aux divers points de la sphère. M. Boussinesq appelle ces intégrales des potentiels sphériques (*).

Pour trouver la solution générale de (3), M. Boussinesq considère une fonction de quatre variables x, y, z et r qui soit en même temps fonction du temps. Les potentiels sphériques dont nous venons de parler peuvent être considérés comme fonctions des trois coordonnées du point M, et du rayon r d'une sphère ayant ce point pour centre (**). Ils servent de point de départ à la méthode employée.

Le savant auteur de cette méthode parvient à déterminer avec une extrême élégance malgré la complexité du problème, la fonction u des cinq variables x, y, z, r et t, dont nous venons de parler pour que, tout en satisfaisant à la relation

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2},$$

cette fonction satisfasse à l'autre relation

$$(6) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + 4\lambda^2 u$$

quels que soient r et t, et cela en tous les points de l'espace.

Il est clair que u satisfera aussi à l'équation obtenue en remplaçant dans (6) $\frac{d^2u}{dr^2}$ par la valeur (5); c'est-à-dire à la relation (3).

Mais la solution trouvée par cette méthode contiendra la variable r en sus des quatre autres, x, y, z, t. Cette solution sera d'ailleurs valable quel que soit r. On y fera $r = 0$, et après des simplifications qui s'introduisent très heuseusement dans les

---

(*) M. Boussinesq justifie cette dénomination. Voir Boussinesq, *Application des potentiels, etc.*, p. 319. Paris, Gauthier-Villars.

(**) La définition même des potentiels sphériques qui les fait fonctions de x, y, z et r en donne une représentation géométrique commode. Des représentations géométriques analogues s'emploient en Thermodynamique pour figurer dans un plan une fonction de trois variables, pression p, volume v et température t. La fonction y est représentée par une circonférence ayant pour centre le point de coordonnées p et v, et pour rayon, la température t.

calculs, *u* se présentera sous la forme de l'intégrale définie suivante où figure une variable auxiliaire *t*.

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t J_0\left(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2}\right) d\tau \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi\,(x+\tau\cos\alpha,\ y+\tau\cos\beta,\ z+\tau\cos\gamma)\frac{d\sigma}{\tau}$$

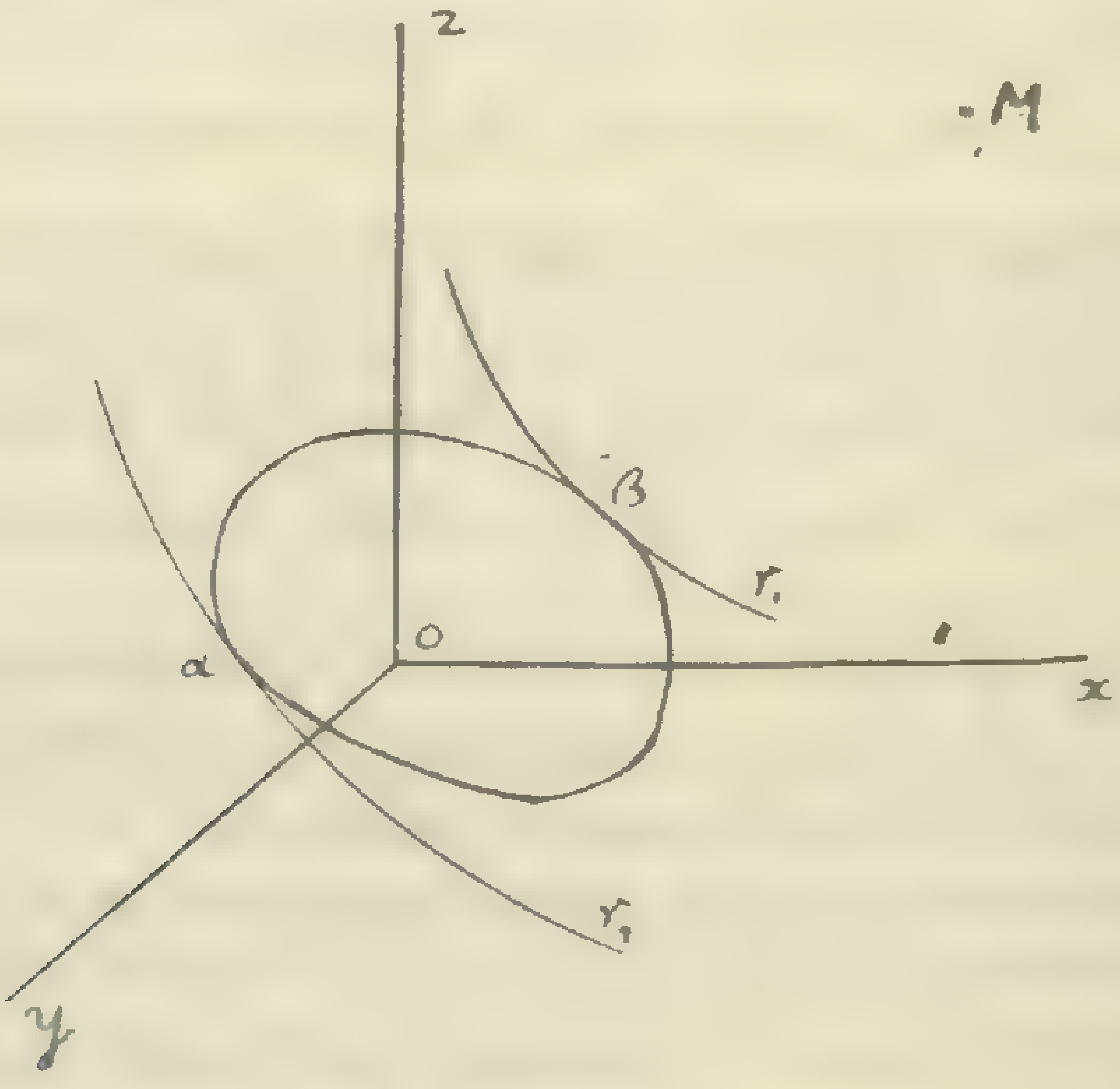
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^t J_0\left(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2}\right) d\tau \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi_1(x+\tau\cos\alpha,\ y+\tau\cos\beta,\ z+\tau\cos\gamma)\frac{d\sigma}{\tau}$$

Les intégrales placées sous les premiers signes $\int$ représentent des potentiels sphériques. On peut donc interpréter aisément chacun des termes de *u*.

Le second terme par exemple, de même forme à peu près que l'autre, légèrement plus simple à cause de l'absence de dérivation en *t*, représente au facteur $\frac{1}{4\pi}$ près, la somme d'un nombre infini de potentiels sphériques relatifs à des valeurs $\tau < t$, potentiels tous dérivés en τ et multipliés par l'expression

$$J_0\left(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2}\right) d\tau\,.$$

La valeur de *u* au temps *t* en un certain point M dépend donc, non seulement des valeurs initiales de *u* relatives aux points situés



sur la sphère de centre M et de rayon égal à *t*, mais encore des valeurs initiales de *u* pour tous les points intérieurs à une telle sphère.

Ceci posé, donnons-nous dans l'espace une région d'ébranlement à l'instant initial, la région $\alpha\beta$ par exemple, et cherchons l'élongation F communiquée aux divers points du milieu à une époque déterminée t.

Nous ne nous occuperons pour plus de simplicité que des points situés hors de la région d'ébranlement. Prenons par exemple le point M, et cherchons quel va être le déplacement communiqué en ce point.

Du point M comme centre, décrivons deux sphères de rayons r_1 et r_2 tangentes, l'une intérieurement, l'autre extérieurement à la région d'ébranlement.

Divisons la discussion en deux parties :

A. — On suppose qu'à l'instant initial, on communique simplement des vitesses aux divers points de la région ébranlée, l'élongation y restant nulle.

Alors, pour $t = 0$

φ est nul dans tout l'espace

φ_1 » » » sauf dans la région $\alpha\beta$.

Le premier terme de u est donc identiquement nul et l'on a

si $r_1 > t$ $\quad u = 0$ l'ébranlement est nul en M.

$$r_2 > t > r_1 \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_{r_1}^{t} \mathrm{J}_0\, d\tau \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi_1\,(x + \tau\cos\alpha, \ldots\ldots)\,\frac{d\sigma}{t}$$

$$t > r_2 \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{J}_0\, d\tau \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi_1\,(x + \tau\cos\alpha, \ldots\ldots)\,\frac{d\sigma}{\tau}\cdot$$

Donc, dès que t devient égal puis supérieur à r_1, l'élongation cesse d'être nulle au point M ; quand $t > r_2$, l'élongation y conserve une certaine valeur, contrairement à ce qui a lieu pour la propagation des ébranlements dans les milieux élastiques dont les éléments n'éprouvent pas pour se déplacer la résistance spéciale que nous avons supposée, autrement dit, l'onde laisse un résidu derrière elle (*).

B. — A l'instant initial, dans toute la région d'ébranlement, on communique à tous les points des élongations, les vitesses y restant nulles.

Pour $t = 0$

φ nul partout sauf dans la région $\alpha\beta$

φ_1 nul dans tout l'espace.

Le second terme de u est identiquement nul et l'on a

$$r_1 > t \qquad u = 0$$

$$r_2 > t > r_1 \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_{r_1}^{t} \frac{dJ_0}{dt}\, d\tau\, \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi\,(\ldots\ldots)\,\frac{d\sigma}{\tau} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\,(\ldots\ldots$$

$$t > r_2 \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dJ_0}{dt}\, d\tau\, \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi\,(\ldots\ldots)\,\frac{d\sigma}{\tau}.$$

Mêmes conclusions que pour la partie (A) de la discussion. Mais on voit de plus que si t est compris entre r_1 et r_2, il y a dans l'expression de u, indépendamment du premier terme qu'on peut appeler résiduel puisqu'il correspond à une portion de l'élongation qui ne s'annule que pour $t = \infty$, il y a, dis-je, un second terme tout intégré

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\,(x + t\cos\alpha, \ldots\ldots)\,\frac{d\sigma}{t}$$

terme identique à ce que serait la valeur de u si les ondes cheminaient dans un milieu élastique ordinaire et étaient régies par l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Delta_2 u.$$

(*) Pour plus de détails, voir le mémoire de M. Boussinesq, *loc. cit.*

Quand la région d'ébranlement est très petite, le terme résiduel est négligeable, le champ d'intégration en τ devenant très petit.

Remarquons enfin que le terme résiduel qui contient sous le signe $\int$ la fonction $J_0(2\lambda\sqrt{\tau^2 - t^2})$ tend vers l'infini quand t devient très grand et pour des valeurs finies de r_1 et r_2, donc de τ.

Malgré cela, F n'est pas infini en ce cas, il tend au contraire vers 0 à cause du facteur $e^{-2\lambda t}$, on sait en effet que

$$F = u e^{-2\lambda t}.$$

En résumé, comme l'avait indiqué M. Boussinesq, le front de l'onde est net, mais l'onde laisse derrière elle une trace en tous les points où elle a passé. C'est l'élongation représentée par le terme résiduel. Il n'y a d'ailleurs de nettement caractérisé que la tête de l'onde.

On pourrait peut-être ajouter à ces conclusions, conformément à la partie B de notre discussion que quand on suppose F et non $\frac{dF}{dx}$ différent de 0 à l'instant initial dans la région d'ébranlement, le mouvement propagé se divise en quelque sorte en deux :

1° Une véritable onde qui chemine en tête de la propagation conservant à cela près de l'amplitude communiquée, les caractères qu'elle aurait si elle se propageait en tous sens dans un milieu élastique ordinaire ;

2° Il y aurait en plus une transmission de mouvement représentée par le terme résiduel et n'ayant de net que son avant, confondu d'ailleurs avec l'avant de l'onde nette.

Le terme résiduel deviendrait extrêmement faible par rapport à celui qui représente l'onde nette si la région d'ébranlement était très petite en tous sens. Le mouvement serait transmis nettement à la distance r suivant les lois régissant ordinairement la propagation dans un milieu à trois dimensions, mais il y aurait en sus un coefficient d'affaiblissement égal à $e^{-2\lambda r}$.

DESCRIPTION

DE

QUELQUES DIPTÈRES DE L'AMBRE

PAR

Fernand MEUNIER

En examinant, lors de mon voyage à Koenigsberg (*), plus de 6000 inclusions de diptères de la collection royale de l'ambre, placé sous l'habile et savante direction du Prof. Dr. Klebs, un heureux hasard m'a permis d'observer les curieux et rares fossiles qui font l'objet de ce travail.

1. Xylophagidae

I. BOLBOMYIA Loew (**)

Ce diptère, dont le type est conservé au Musée paléontologique de l'Université de Berlin, a été sommairement décrit et non figuré par cet auteur.

B. Loewi nov. sp..(N° 429)

♀. Tête sphérique, aplatie, plus large que le thorax. Trois ocelles en triangle sur le vertex, cet organe large. Pipette charnue, lenticulaire et ciliée au bord externe. Palpes paraissant composées

---

(*) Pour mes études antérieures sur les diptères fossiles voir : BULL. DE LA SOC. ENT. DE FRANCE, 1899, n° 17, pp. 334-335 et 3 fig.; n° 18, pp. 358-359 et 3 fig.; n° 19, pp. 392-393 et 3 fig.; 1900, n° 4, pp. 111-112 et 2 fig.

(**) Ueber den Bernstein und die Bernsteinfauna, S. 39, Meseritz, 1850.

de deux articles : le premier plus court que le deuxième article qui est plus gros et distinctement cilié de chaque côté. Cils du vertex de plus fort diamètre que ceux émergeant à la partie inférieure de la tête et le long des yeux. Antennes composées de trois articles (fig. 1) : le premier court, cylindrique et évasé à l'apex; le deuxième plus long, conique, arrondi, plus large que le premier article et cilié de chaque côté; le troisième article allongé et pourvu de cinq divisions : la première longuement ovoïde, dilatée, les deuxième et troisième d'égales largeurs, la quatrième plus petite que les divisions précédentes, la cinquième conique, arrondie à l'apex et presqu'aussi longue que les divisions 2-4 réunies. Les trois articles antennaires garnis à leur base de quelques cils bien appréciables. (Il existe donc en réalité sept articles aux antennes.)

Thorax gibbeux, cilié. Scutellum petit, bombé, semi-lunaire et orné de macrochètes bien distincts.

Abdomen allongé, composé de huit segments diminuant de largeur de la base à l'apex. Poilure des bords latéraux et celle de la partie postérieure des segments très appréciable. Oviducte finement poilu. Chez l'individu observé, il est composé de quatre lamelles dont deux latérales, qui sont coniques, et deux médianes disciformes et échancrées postérieurement.

Pattes longues. Hanches antérieures plus allongées que les médianes et les postérieures. Trochanters égaux. Fémurs antérieurs plus dilatés que ceux des autres paires. Tibias plus distinctement ciliés que les fémurs, les antérieurs plus courts que les médians et les postérieurs. Les deux épines de l'extrémité de ces organes bien visibles. Tarses de cinq articles : métatarse presqu'aussi long que les quatre articles suivants pris ensemble, le deuxième légèrement plus long que le troisième article, le quatrième le plus petit de tous, le cinquième article terminé par deux ongles unidentés (137 d.) et deux ventouses (pulvilli). Hanches ciliées extérieurement, fémurs et articles tarsaux des deux côtés.

Ailes présentant la morphologie générale des *Xylophagidae* (fig. 2). Bord marginal et nervure sous-marginale ciliés; cette dernière n'atteint pas le milieu du bord antérieur. Deuxième nervure longitudinale s'anastomosant avec la première nervure (ce caractère est altéré par la fossilisation). Troisième longitudinale fourchue et réunie à la deuxième nervure en deçà du point où aboutit la sous-marginale, les quatrième, cinquième et sixième nervures simples, les septième et huitième anastomosées au bord postérieur de l'aile. Nervures transversales, basale antérieure et postérieure bien distinctes. Une cellule marginale, deux sous-marginales (antérieure et postérieure), une discoïdale formant quatre cellules axilaires ouvertes et une cellule anale.

Long. du corps 4^{mm}, long. alaire 3^{mm}, larg. alaire 1^{mm}.

♂ Inconnu.

Observation : Par la forme de ses antennes le *B. Loewi* semble se rapprocher de *Selasoma tibialis* du Brésil (Macquart, *Diptères exotiques nouveaux ou peu connus,* t. I, 2e partie, pp. 187-189, pl. 14, fig. 7*a*, Paris, 1838).

La morphologie antennaire des *Tabanidae* du genre *Silvius* Meig. paraît avoir quelque affinité avec celle de *Bolbomyia.* La découverte de nouveaux fossiles permettra peut-être d'établir certains rapprochements parmi les *Tabanidae* et les *Xylophagidae* des genres *Subula, Xylophagus* et *Pachystomus* étant vraisemblablement les derniers survivants d'un groupe de diptères plus riches en espèces pendant les temps tertiaires.

2. Empidae

II. PALAEOPARAMESIA gen. nov.

Clinocera Meig. et Schiner (in part.)

La difficulté qu'on éprouve à classer plusieurs *Empidae* fossiles résulte de notre connaissance encore trop imparfaite des espèces des diverses régions entomologiques et de la pauvreté de nos archives paléodiptérologiques. En triant une petite collection de *Hemerodrominae,* j'ai trouvé un insecte de cette sous-famille me permettant de faire quelques observations relatives au genre *Clinocera* Meig. C'est en se basant sur les variations que peuvent présenter les nervures alaires et la morphologie antennaire de ces petits êtres que Haliday (*), Macquart (**), Zetterstedt (***) et

---

(*) *Heleodromia.*

(**) *Paramesia* et *Hydrodromia* (in part.).

(***) *Wiedemannia.*

quelques autres systématistes les ont démembrés en plusieurs genres. En rapprochant ce fossile des *Clinocera* Meig., je tiens à laisser entrevoir qu'il peut être considéré comme un des chaînons intermédiaires reliant les *Hemerodrominae* de l'ambre à ceux de notre faune.

Dans l'état actuel de la science, on ne peut dresser le tableau des formes tertiaires du groupe des *Clinocera* (*). Il paraît très probable que les *Empidae*, à l'exception du genre *Hilarimorpha* (**), étaient encore en pleine évolution à l'aurore des temps éocènes.

P. Proosti, nov. sp. (Nº 2118)

♂. Tête globuleuse. Vertex large, longuement cilié, sa partie antérieure légèrement proéminente. Ocelles peu distincts, placés sur une protubérance et garnis de deux longs cils. Pipette forte, finement ciliée. Palpes paraissant n'avoir qu'un long et vigoureux article orné de cils très appréciables. Yeux sphériques, saillants. Occiput distinctement poilu. Antennes composées de trois articles : (fig. 3), le premier long, cylindrique et pourvu de quelques cils ; le deuxième rond, du quart de la longueur du premier article et muni de quelques poils ; le troisième article conique, peu élevé, densément cilié. Chète apical plus long que les trois articles antennaires pris ensemble et finement poilu (137 d.).

Thorax gibbeux avec les macrochètes émergeant près du scutellum plus longs que ceux de la base. Scutellum paraissant ovoïde et orné de quatre macrochètes dont deux latéraux longs et deux médians courts.

Abdomen robuste, cilié, aussi large que le thorax et semblant être composé de dix segments. Organes copulateurs dilatés (kolbig) : lacinia longs et tronqués à l'apex, sagitta de même longueur que les lacinia (***).

(*) *Loew. H. Ueber d. Gattung Clinocera.* Wien. Ent. Monatschr., 1858.

(**) Osten-Sacken. C. R. *Hilarimorpha is a Leptid.* Berl. Ent. Zeitschr. Bd. XXXV. Heft II. SS. 303-304.

(***) D'après ce seul individu, on ne peut décrire rigoureusement la disposition des macrochètes de l'abdomen. On remarque cependant que la partie postérieure des tergites et des sternites est garnie de " bristles " bien distincts.

Pattes ciliées : hanches antérieures et postérieures plus longues que les médianes. Tibias de la troisième paire plus longs que les antérieurs et les médians. Métatarse de longueur moindre que celle des articles deux à cinq réunis, le deuxième article presque aussi long que les trois derniers, le troisième de même longueur que les articles quatre et cinq pris ensemble, le quatrième le plus petit de tous, le cinquième plus court que le troisième article. Ongles tarsaux unidentés, pulvilli lamelliformes (137 d.). Bord costal alaire orné de cils courts et couchés. Vena mediastinalis bien distincte et réunie au bord antérieur de l'aile. Les première et deuxième nervures longitudinales s'anastomosant respectivement au milieu et aux trois quarts du bord antérieur de l'aile, troisième nervure longuement fourchue et septième nervure atteignant le bord postérieur de cet organe. Deux cellules sous-marginales. La cellule discoïdale envoie trois nervures au bord apical de l'aile. Nervure transversale basale antérieure et postérieure bien distincte (fig. 4).

Long. du corps 3^{mm}, long. alaire 2 1/2^{mm}, larg. alaire 3/4^{mm}.

Morphologie comparée.

Par la forme du premier article des antennes le *P. Proosti* se rapproche des *Trichopeza* mais s'en éloigne par les articles deux et trois. La nervation générale de l'aile sépare ce fossile des *Trichopeza* qui semblent être plus proches parents des *Empinae* que des *Hemerodrominae*. Comme nervation alaire basale apicale cette forme du succin est voisine des *Thamnodromia* Mik, des *Paramesia* Macquart et des *Clinocera* Meigen. (in part.). Par le troisième article des antennes, qui est conique, ce fossile ressemble aux *Clinocera* Meig., mais se sépare de ces insectes par le chète qui est visiblement plus allongé. L'étude des *Empidae fossiles* nous autorise à dire que ces minuscules arthropodes, encore en plein épanouissement lors de la formation de la célèbre île d'ambre, se sont probablement éteints pendant la durée des temps miocènes et pliocènes (*).

(*) Dans la monographie des *Empidae* du succin, je donnerai le tableau de l'évolution probable des diptères de cette famille.

III. PALAEOEDALEA gen. nov.

Par ses antennes de deux articles et les fémurs non dilatés, *Oustaletmyia* (*) *succinorum mihi*, s'éloigne des *Oedalea* Meig. et des *Xiphidicera* Macq. Ce fossile et les *Palaeoedalea* seront peut-être groupés par la suite comme sous-genres des *Oedalea* Meig.

P. Samlandica nov. sp. (N° 1332)

♂. Tête globuleuse. Yeux réunis sur le vertex qui est garni de trois ocelles placés en triangle, sommet de cet organe et occiput ciliés. Pipette presque aussi longue que la tête (elle est peu distincte chez les *Microphorus*). Dernier article des palpes (on ne peut compter le nombre d'articles de ces organes) peu visible (**), mais paraissant arrondi, cilié, et pourvu d'un long macrochète. Antennes de trois articles : (fig. 5) le premier cylindrique, le deuxième arrondi (ces deux articles avec quelques cils), le troisième très allongé et diminuant de diamètre vers l'apex ; chète court, biarticulé, à premier article ayant moins de la moitié de la longueur du deuxième.

Thorax gibbeux et garni de macrochètes bien distincts. Sa morphologie est la même que celle des *Oedalea* Meig. et des *Xiphidicera* Macq. Scutellum ne présentant rien de particulier.

Abdomen altéré par la fossilisation mais plus robuste que chez les *Oedalea*.

Hanches antérieures ciliées extérieurement, celles des deux autres paires ciliées des deux côtés. Fémurs des trois paires de pattes de même longueur, non dilatés, ciliés et non épineux comme chez les *Oedalea* actuels. Tibias non courbés aussi longs que les fémurs. Métatarse de longueur égale à celle des quatre articles suivants pris ensemble. Ongles (Krallen) unidentés, bien distincts. Pulvilli invisibles (***).

(*) *Sur quelques diptères fossiles de l'ambre tertiaire*, BULL. SOC. ENT. DE FRANCE. Paris, 1893, t. LXII, pp. CCCXXXII-CCCXXXIII. C'est par erreur, que dans cette notice, le genre *Oustaletmyia* est nommé **Oustaletimyia**.

(**) La morphologie détaillée des palpes de ces pygmées ne sera bien connue qu'après le *visu* de plusieurs spécimens.

(***) On sait que chez certaines espèces actuelles de ce genre la deuxième nervure de la cellule discoïdale existe seulement comme appendice. J'ai observé ce caractère chez un *Leptopeza* du succin. Il sera décrit dans la monographie des diptères de cette famille.

Nervures alaires voisines de celles de certains *Oedalea* et des *Microphorus.* Les deux premières nervures de la cellule discoïdale assez rapprochées l'une de l'autre, la troisième nervure éloignée : septième nervure longitudinale altérée mais paraissant ne pas atteindre le bord alaire. Nervation basale postérieure de cet organe comme chez les *Microphorus* Macq. (Suites à Buffon, *Diptères* t. I, p. 345, pl. 8, fig. 7.) Cet auteur a étudié très minutieusement les caractères de la cellule anale de ces *Empidae.* C'est à tort que l'éminent diptériste autrichien Schiner (*Fauna Austriaca,* t. I, p. 80), dit que les ailes des *Microphorus* et des *Oedalea* sont construites sur le même plan morphologique.

Long. du corps 2^{mm}, long. et larg. alaires peu visibles.

Morphologie comparée

Par la pipette et la forme des articles des antennes ce diptère est voisin des *Ocydrominae* du genre *Oedalea* Meig. (in part.). Il est probable cependant qu'il n'est pas le représentant tertiaire direct des *Oedalea* de la faune holarctique actuelle. Si on examine les pattes de ce fossile, on constate qu'il se rapproche plus des *Microphorus* que des *Oedalea.* La topographie alaire générale est peu critère pour l'étude phylogénique de ces articulés. Par leurs antennes de deux articles, les *Xiphidicera* se séparent des *Microphorus* et des *Oedalea* avec lesquels ils paraissent être assez proches parents.

3. Syrphidae

Dans deux notices antérieures, j'ai décrit les genres *Palaeoascia* (*) *Palaeosphegina* et *Spheginascia* (**). Je viens d'observer un nouveau *Syrphidae* présentant les plus grands rapports morphologiques avec les *Pipiza Fallen.*

(*) *Sur les Syrphidae fossiles de l'ambre tertiaire,* Ann. Soc. Ent. de France. Paris, 1893, t. LXII, pp. ccxlix-ccl., fig. *a* et *b.* — *a'* et *b'.*

(**) *Ueber die Syrphiden des Bernsteins,* Allg. Zeitschr. f. Entomologie. Bd. VI, nº 5. SS. 70-72 ; Neudamm, 1901. (Je donnerai prochainement les diagnoses des **Cyclorapha** de ce groupe.)

Observation : Je n'ai pu retrouver dans le succin les genres *Volucella* (s. largo.), *Chilosia* (s. l.). et *Xylota* (s. l.) signalés par feu le professeur Dr. H. Lœw. (*Ueber den Bernstein und die Bernsteinfanna,* SS. 42-43, Meseritz, 1850.)

IV. Palaeopipiza Xenos (*) nov. sp. (N° 492)

♀. Facies général de la tête, du thorax et de l'abdomen comme chez les espèces de *Pipizes*. Premier article des antennes petit, le deuxième évasé à l'apex et orné, de chaque côté, de quelques cils; le troisième article arrondi et finement poilu. Chète triarticulé : (fig. 6) la première division plus courte que la suivante, la troisième allongée, finement ciliée et diminuant de diamètre vers l'apex. (137d.)

Yeux densément poilus. Vertex large, cilié et garni de trois ocelles disposés en triangle. La partie inférieure de la tête (Wangen) et les joues (Backen) sont respectivement ornés de poils longs et courts.

Thorax fortement ponctué, sa poilure dense, courte et serrée (**).

Scutellum large, finement poilu paraissant rayé longitudinalement (137d.) et orné de quatre cils dont deux courts et deux longs (***).

Abdomen brillant métallique comme chez les *Pipizella Rondani*.

Avant le visu d'autres inclusions de ce genre, il serait prématuré d'indiquer quelles sont les relations phylogéniques des *Palaeopipiza*, des *Pipiza* et des *Pipizella*.

Morphologie générale des pattes semblable à celle des *Pipizes*, métatarse non dilaté et aussi long que les quatre derniers articles pris ensemble. Fémurs, tibias et articles tarsaux ornés de cils courts. Ongles tarsaux unidentés. Pulvilli bien distincts.

Nervation alaire comme chez les *Pipiza Fallen*.

Long. du corps 5^{mm}, long. alaire 4^{mm}, larg. alaire environ 1^{mm}.

Observation : Le *Pipiza ? venilia* v. Heyden (IV) a été rencontré dans les lignites de l'Aquitanien de Rott. Le dessin de cet auteur ne permet pas de reconnaître rigoureusement quel genre de *Syrphidae* il a eu sous les yeux.

(*) Du grec ξένος = étranger.

(**) Les autres caractères sont trop peu visibles pour être décrits rigoureusement.

(***) Ce fossile n'a que deux macrochètes à l'un des côtés de cet organe. A 137d, on ne peut voir, de l'autre côté, les points d'où ont dû émerger les " bristles ".

(IV) *Fossile Dipteren aus d. Braunkohle von Rott i. Siebengebirge*. Paleontographica, Bd. XVII, Cassel, 1870, SS. 24-25. fig. 28 (insecte et aile.)

Conclusions

1° Comme morphologie des antennes le *Bolbomyia* Lœwi paraît avoir un certain degré de parenté avec les *Selasoma* Macquart et une affinité plus éloignée avec les *Silvius* Meigen.

Les *Xylophagidae* de nos faunes actuelles ne sont probablement que les derniers rejetons d'un rameau de Diptères qui semble être dérivé de la souche primitive des *Tabanidae.*

2° Le *Palaeoparamesia* (*Clinocera* Meig. et Schiner in part.) *Proosti* n'est vraisemblablement qu'une des formes éocènes du groupe des *Clinocères* (S. largo.)

3° Les *Palaeoedalea elegans, Oustaletmyia succinorum, Oedalea* et *Xiphidicera* ne nous donnent qu'une idée bien imparfaite de l'évolution probable des *Ocydrominae.*

L'étude minutieuse des pygmées de ce groupe fera encore pendant longtemps le désespoir des systématistes.

4° Le *Palaeopipiza xenos* se distingue des espèces actuelles par son chète articulé et les macrochètes du scutellum.

A en juger d'après ses autres caractères morphologiques, on est enclin à croire que ce genre de *Syrphidae* a peu évolué depuis les temps tertiaires (*).

Figures (**)

1. Antenne de *Bolbomyia Loewi,* nov. sp. ♀.
2. Aile " " " "
3. Antenne de *Palaeoparamesia Proosti,* nov. sp. ♂.
4. Aile " " " " "
5. Antenne de *Palaeoedalea elegans,* nov. sp. ♂.
6. Antenne de *Palaeopipiza xenos,* nov. sp. ♀.

(*) Pour établir les relations phylogéniques probables des fossiles décrits dans ce travail, je me suis uniquement basé sur l'étude de la morphologie comparée de leurs principaux organes.

(**) Tous les dessins ont été faits à la chambre claire d'Abbe.

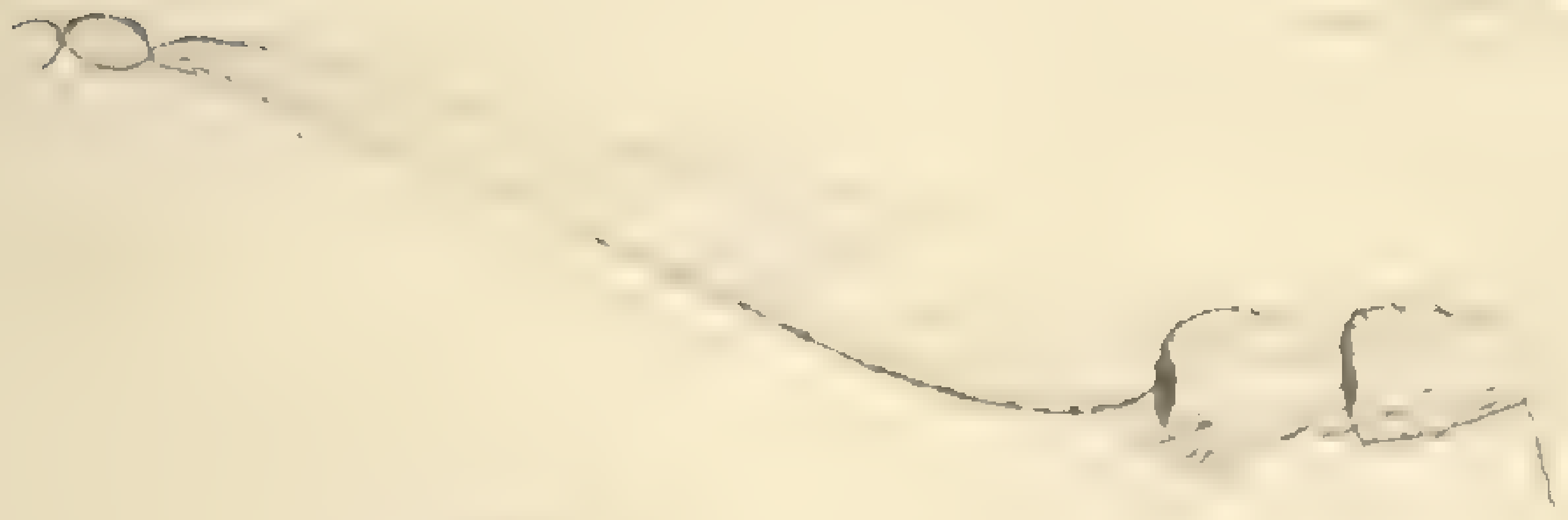


Fig. 5

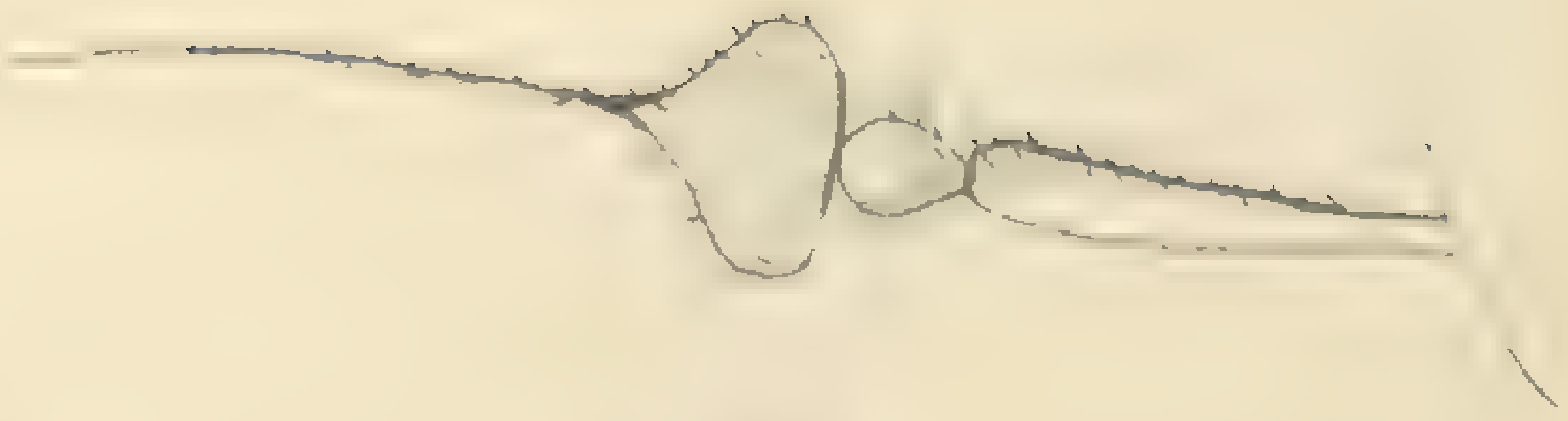


Fig. 3

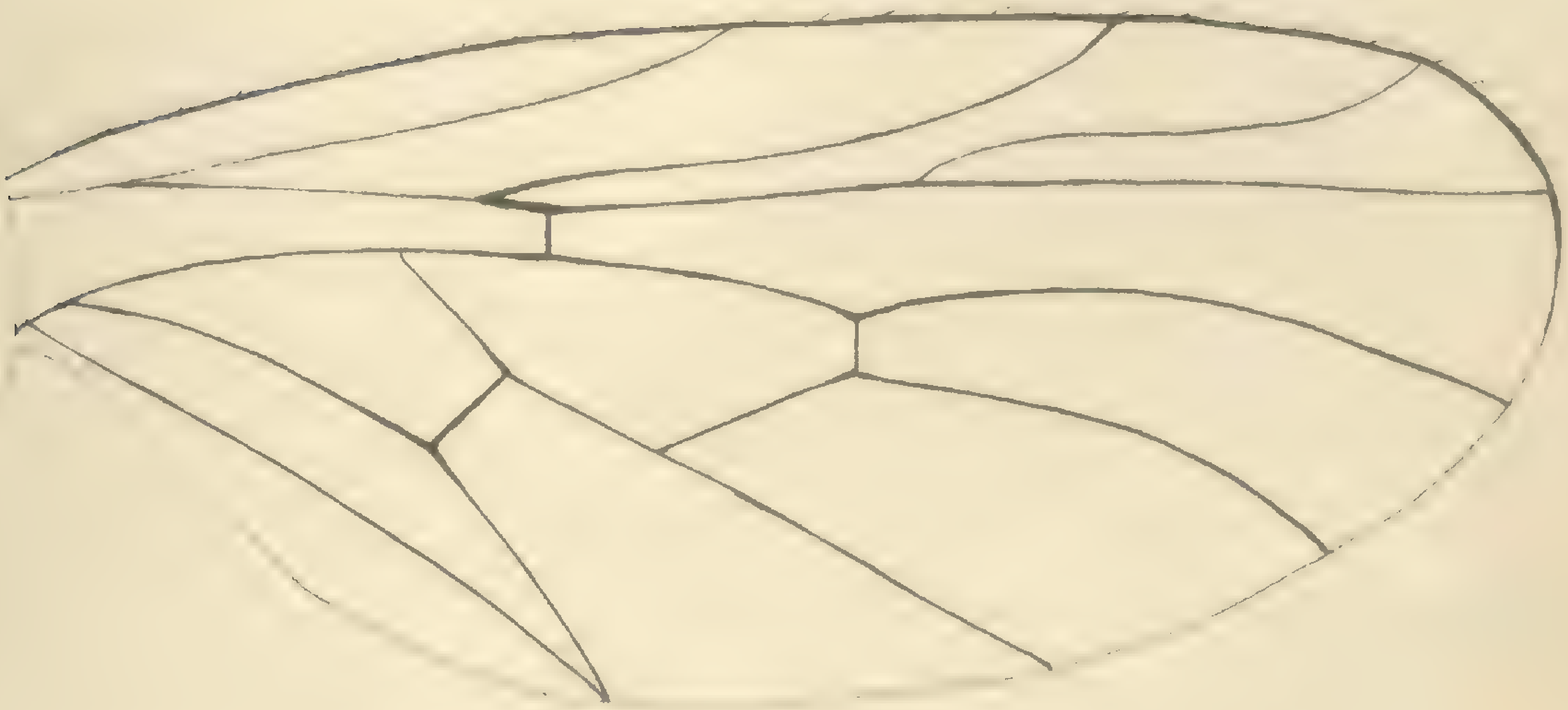


Fig. 2

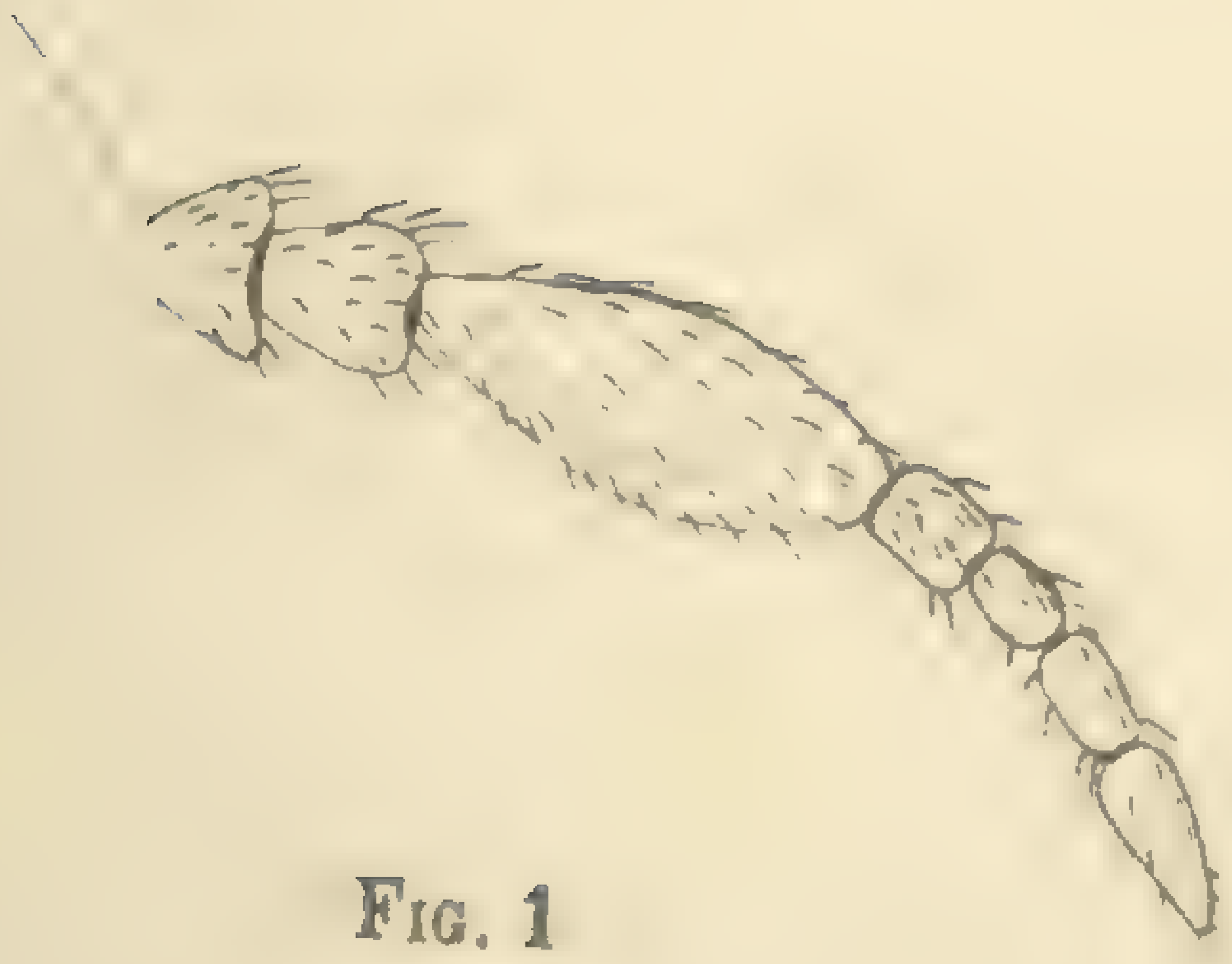


Fig. 1

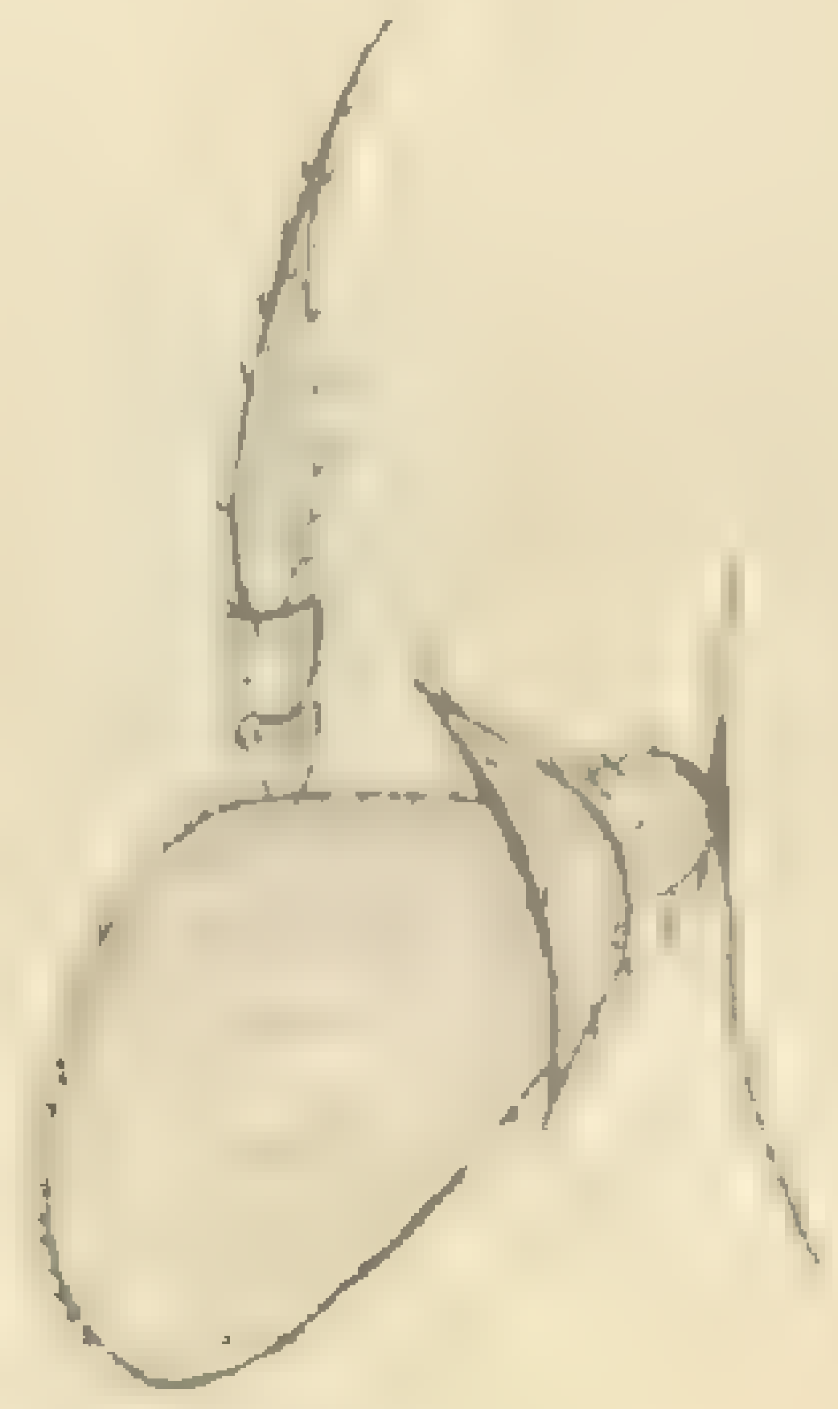


Fig. 6

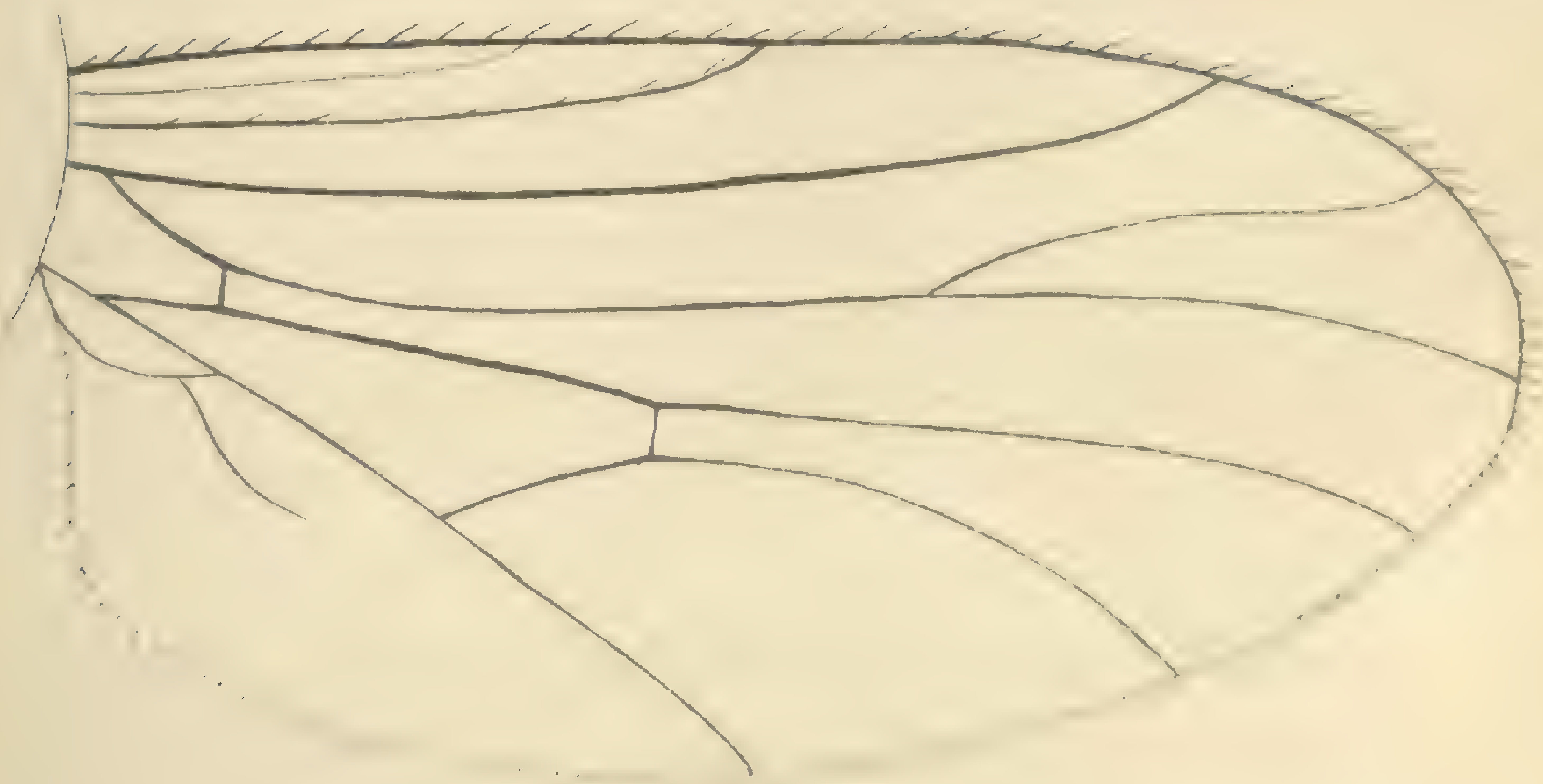


Fig. 4

Louise Meunier del.

ANALYSE DES TERRES

ET

LEUR REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

PAR

P. NYSSENS

Les méthodes que nous appliquons au laboratoire d'analyses de l'État à Gand ne sont point nouvelles, elles ont été publiées à diverses reprises et figurent dans la plupart des traités d'analyses chimiques; mais tandis qu'en Allemagne elles sont généralement suivies, elles le sont fort peu en Belgique où les méthodes ont été simplifiées au point qu'il est quasi impossible de définir sous quelles formes les éléments essentiels de fertilité se trouvent combinés dans nos sols.

Au moment où il est question de dresser la carte agronomique du pays, travail réclamé du reste depuis longtemps, il ne sera pas sans utilité d'insister sur la nécessité d'effectuer, tout au moins en vue de la publication de cet important document, des analyses aussi détaillées et aussi complètes que possible.

Les sols en général ont une composition très complexe et pour la mettre en relief il est indispensable d'employer des réactifs dissolvants appropriés aux divers éléments dont ils se composent.

Pendant de nombreuses années et jusqu'en 1887 on s'est contenté d'examiner au point de vue de la composition minérale de nos terres, les quantités d'éléments solubles à froid dans l'acide chlorhydrique concentré, et l'on considérait comme sans utilité immédiate pour les plantes les éléments minéraux insolubles dans cet acide; mais l'expérience culturale vint fréquemment contredire les conclusions tirées d'une analyse aussi sommaire.

Tandis que l'analyse chimique ainsi conduite n'accusait parfois que des traces insuffisantes de potasse, l'expérience culturale montrait les hauts rendements obtenus sans addition de cet engrais, par la culture de la pomme de terre si exigeante cependant sous ce rapport. C'est que le sol contenait sous une forme plus ou moins assimilable des quantités importantes de cet élément, insoluble cependant dans l'acide chlorhydrique (*).

A la suite de ces constatations les agronomes crurent pouvoir affirmer que l'analyse chimique était incapable de renseigner utilement sur la richesse des sols en éléments fertilisants et que seule l'analyse physiologique du sol par les plantes pouvait fournir des indications certaines.

C'est alors que les chimistes se décidèrent à effectuer des analyses plus complètes et à attaquer les terres par un réactif plus puissant. La décomposition des sols sous l'influence de l'acide fluorhydrique, fit découvrir que fréquemment nos terres possèdent de riches réserves d'éléments de fertilité et notamment des quantités importantes de potasse. Comme il est à remarquer d'autre part que cet acide dissout aussi bien les argiles que les feldspaths il était encore impossible de spécifier à quelle catégorie de ces silicates appartenaient les éléments dont la présence était constatée.

C'est cette dernière considération qui nous a engagé dès 1889 à compléter nos analyses par l'attaque successive à l'aide d'acide nitrique et d'acide sulfurique.

L'acide nitrique permet le dosage de la totalité de l'acide phosphorique, et de la potasse des silicates facilement solubles.

D'autre part, le traitement des terres par l'acide sulfurique concentré et bouillant permet de séparer les éléments constitutifs de l'argile.

L'emploi successif des quatre réactifs (HCl, HNO^3, H^2SO^4, HFl)

(*) Proost, Revue des Questions scientifiques, t. XXII, p. 179 et Bulletin de l'Agriculture de Belgique, t. II, supplément, p. 258.

nous permet de connaître la composition des divers silicates et de grouper les résultats obtenus.

Comme premier groupe nous distinguons les éléments solubles dans l'acide chlorhydrique, ce sont les carbonates, les bases retenues par le pouvoir absorbant, les phosphates, l'oxyde de fer et l'alumine.

Le second groupe comprend les corps solubles dans l'acide nitrique bouillant, tels que l'acide phosphorique combiné à la matière organique, et ceux facilement solubles des silicates hydratés.

Le troisième groupe (solution dans H^2SO^4) se rapporte aux silicates hydratés : l'argile colloïdale, dont les propriétés physiques sont très importantes, l'argile cristalline et la glauconie.

Le quatrième groupe comprend les feldspaths; le pourcentage ne peut s'en établir que par le calcul, quand on en a déterminé la potasse, la soude, la chaux, la magnésie, qui en sont les éléments caractéristiques.

Le cinquième groupe comprend l'acide silicique libre mais hydraté et le quartz.

Quant aux méthodes employées, elles ne présentent guère de difficultés très sérieuses, mais elles sont longues. Nous avons fréquemment dosé la silice hydratée dans le résidu du traitement par les divers acides, en faisant usage de petites cornues en argent pur, le col en est démontable et on peut facilement le mettre en rapport avec un réfrigérant ascendant de manière à poursuivre la dissolution à chaud de la silice hydratée, pendant plusieurs heures, sans faire varier le degré de concentration du dissolvant.

⁂

Comme application de cette méthode nous donnons l'analyse de deux terres de composition chimique très différente; les résultats consignés en chiffres dans ces tableaux sont rendus plus démonstratifs lorsqu'on les condense sous la forme de tableaux graphiques ainsi que nous venons de l'imaginer.

Dans un carré de 100 millimètres de côté tracé sur du papier millimétrique nous indiquons par des surfaces diversement coloriées les résultats des analyses. Un carré de 1 millimètre de côté représente un dix-millième, les tracés graphiques sont donc très nets et très sensibles.

Les divers groupes sont placés d'une manière aussi rationnelle et intuitive que possible; les matières organiques, l'azote, les éléments solubles dans l'acide chlorhydrique sont placés au haut du carré ; l'argile et ses éléments constitutifs occupent la partie médiane, tandis que les feldspaths sont réunis à la base comme étant des éléments de réserve. Toutes les surfaces sont noyées dans celle représentant l'acide silicique libre (quartz) et qui s'étend à toutes les parties du carré qui restent disponibles.

Ces tableaux graphiques permettent de rendre sous une forme saisissante à première vue les résultats consignés en chiffres dont la lecture est souvent difficile. On peut y ajouter un graphique concernant les propriétés physiques du sol telles que les diverses finesses du grain, leur couleur, comme aussi le pouvoir absorbant pour l'eau; et si l'on y inscrit de la même manière les résultats fournis par les analyses physiologiques du sol par les plantes, on aura réuni sous une forme élégante les indications nécessaires à la monographie du sol étudié.

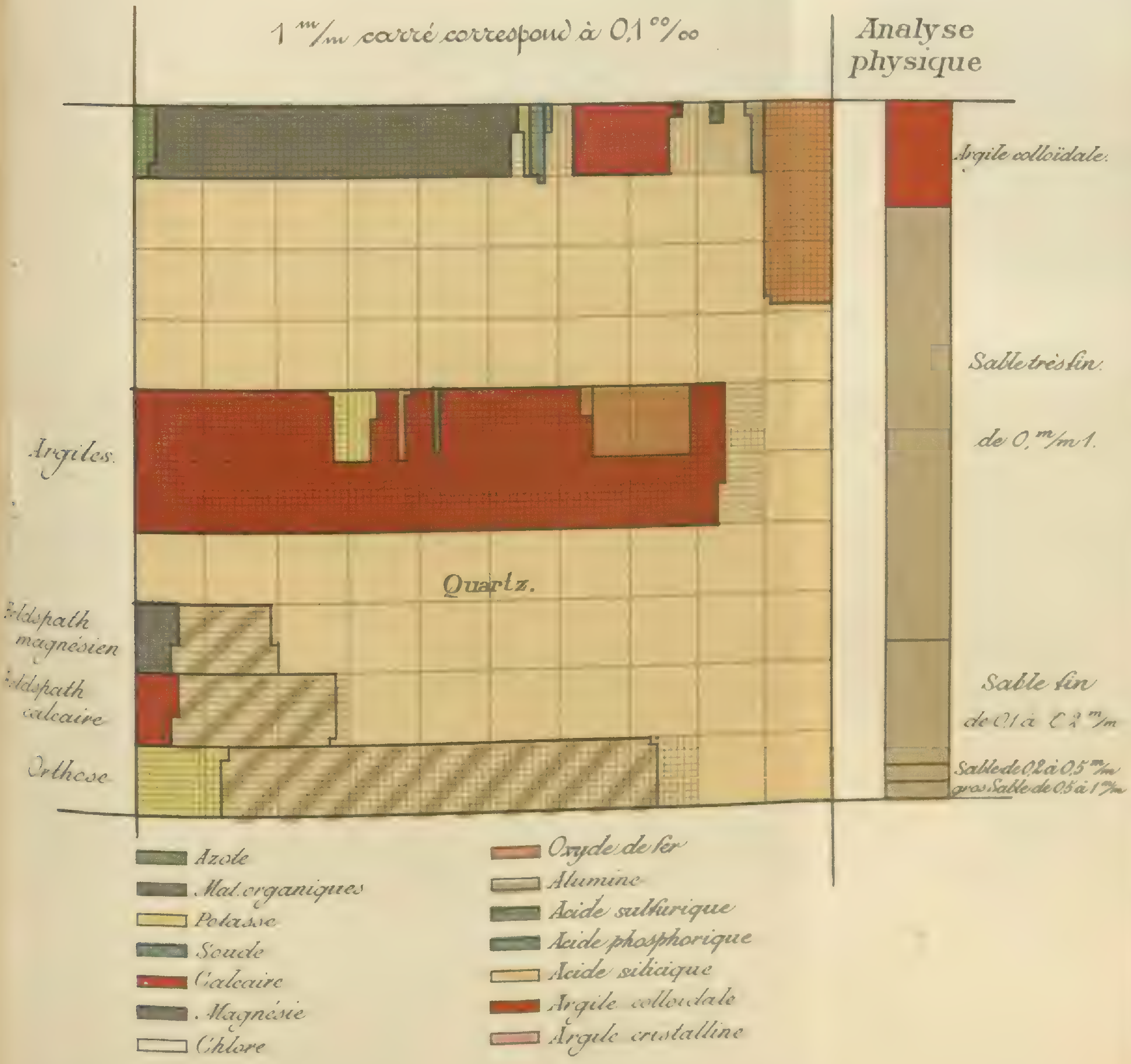
Ce mode de représentation graphique pourrait, nous semble-t-il, être utilisé dans la publication des cartes agronomiques.

No 182.

COMMUNE DE HOUTTAVE

Prairie de toute 1re qualité

Analyse Chimique (1898)



P. Nyssens.

COMPLICATIONS CUTANÉES GRAVES DE LA ROUGEOLE

PAR

le Docteur Alexandre **FAIDHERBE** (*)

De toutes les complications qu'on peut observer au cours ou au déclin de la rougeole, les moins fréquentes — aujourd'hui tout au moins — sont à coup sûr les complications du côté de la peau et du tissu cellulaire sous-cutané. Autant il est habituel d'observer des accidents laryngés, pulmonaires ou intestinaux graves, surtout dans les régions humides et froides; autant il est fréquent de constater des lésions des yeux ou des oreilles, par suite tout à la fois de l'acuité de l'infection, de la malpropreté fréquente des classes inférieures et du manque général de connaissances hygiéniques dans nos grandes villes industrielles; autant au contraire, il est rare de rencontrer vers la peau ou le tissu cellulaire sous-cutané des déterminations, atteignant un degré manifeste de gravité, et pouvant entraîner un danger sérieux.

I

La plupart des auteurs classiques n'en font même plus mention; tout au plus leur accordent-ils quelques lignes, contenant de vagues indications.

(*) Mémoire récompensé par l'Académie de Médecine de Paris. — Service des Épidémies; rappel de Médaille d'Argent, 1901.

D'Espine et Picot (*) ne parlent guère que de la gangrène “ surtout celle de la bouche, plus rarement celle de la vulve et des poumons „. Comby (**) signale des éruptions ecthymateuses ou furonculeuses, des abcès, des placards eczémateux et des cas de vulvite aphtheuse, constatée par Parrot, qui précéderaient souvent la gangrène de la vulve. L'article qu'il a consacré à la rougeole dans le *Traité des Maladies de l'Enfance* (***), n'est guère plus explicite : tout en signalant les mêmes accidents, il ajoute pourtant que “ dans quelques cas on voit se produire de petits foyers multiples de gangrène, avec aspect noirâtre et sécheresse des parties, puis les escarres se détachent et laissent des cavités cratériformes sans tendance à la réparation „. D'après lui ces accidents peuvent amener de grands dangers parce que “ de ces infections cutanées peuvent partir des complications viscérales, des septicémies généralisées qui emportent les malades „. Vogel et Biedert (IV) se contentent de dire que les lésions diphthéritiques des muqueuses peuvent aller jusqu'à la gangrène qui chez les filles se manifeste le plus souvent du côté de la vulve, et que chez les enfants dyscrasiques mal nourris, on observe parfois le noma.

Les pédiâtres des époques précédentes ne semblent pas avoir attaché beaucoup plus d'importance à cette complication de la rougeole, car Rilliet et Barthez écrivent : “ La gangrène rubéolique, ne survenant jamais dans les premiers jours de la maladie, n'offre aucune indication que nous n'ayons déjà posée ailleurs (V) „. Ils renvoyent pourtant à leur article sur le *noma*, où ils remarquent que cette affection spéciale a été sous la dépendance de la rougeole dans 41 cas sur 98, mais ils ne disent rien des accidents gangréneux de la peau (VI).

(*) *Manuel pratique des Maladies de l'Enfance*, 5e édition, p. 65. Paris, Alph. 1894.

(**) *Traité des Maladies de l'Enfance*, p. 104. Paris, 1892.

(***) *Traité des Maladies de l'Enfance*, publié sous la direction de MM. Grancher, Comby et Marfan, t. I, p. 190. Paris, 1897.

(IV) *Lehrbuch der Kinderkrankeiten*, 10e Auflage, seite 496. Stuttgart, 1890.

(V) *Traité clinique et pratique des Maladies des Enfants*, 2e édition, t. III, p. 307. Paris, 1854.

(VI) *Op. cit.*, t. II, p. 384.

Si nous passons aux traités généraux de pathologie, nous ne trouverons guère plus de détails. M. le professeur Jaccoud (*) signale seulement que “ des gangrènes circonscrites surviennent, principalement à la joue, ou à la vulve chez les petites filles „. Strumpell (**) indique tout au plus le noma “ comme complication inhérente, paraît-il, à la rougeole, mais très insolite „. Le Dr Baumel, dans le *Traité Pratique de Médecine* (***) ne dit rien des accidents cutanés.

Le Dr Gasser, dans le *Nouveau Manuel* (IV), est moins concis que les autres auteurs et donne des détails plus complets. La gangrène morbilleuse aurait, d'après lui, été *aussi fréquente autrefois que rare aujourd'hui* et M. le professeur Brouardel aurait pu en rencontrer dans *43 pour cent* des cas de rougeole : le noma serait aussi d'origine rubéolique dans un tiers des cas.

“ Elle (la gangrène) occupe de préférence la bouche, d'où elle s'étend au pharynx, au larynx, les organes génitaux externes, le poumon, le nez, les paupières, le pavillon de l'oreille, la peau de l'abdomen, la peau des bras. Son début est insidieux, sa marche foudroyante parfois, sa guérison exceptionnelle, avec des pertes de substance énormes et des cicatrices hideuses... La gangrène semble spéciale aux jeunes enfants.

„ . . . . .

„ Sur la peau la gangrène affecte la forme de plaques qui intéressent l'épiderme, le derme et le tissu cellulaire souscutané. „

M. le professeur Dieulafoy (V) n'en dit guère plus dans son *Manuel* que la plupart des auteurs et se contente de signaler la

---

(*) *Traité de Pathologie Interne*, 3e édition, t. II, p. 712. Paris, 1873.

(**) *Traité de Pathologie spéciale et de Thérapeutique des Maladies internes*, traduit par Schramme, t. I, p. 73. Paris, 1888.

(***) *Traité pratique de Médecine clinique et thérapeutique*, publié sous la direction de MM. Bernheim et Laurent, t. I, pp. 62 et suiv. Paris, 1895.

(IV) *Manuel de médecine*, publié sous la direction de MM. Debove et Achard, t. VIII, p. 181. Paris, 1897.

(V) Dieulafoy, *Manuel de Pathologie interne*, 10e édition, t. II, p. 83. Paris, 1897.

possibilité de la gangrène après la rougeole, surtout celle de la bouche et de la vulve (*).

Le professeur Eichhorst, dans son TRAITÉ DE PATHOLOGIE INTERNE parle brièvement aussi des accidents cutanés de la rougeole, mais il note cependant toutes les formes qu'ils peuvent revêtir.

“ Sur la peau, nous signalerons l'érythème qui apparaît aussi bien dans la période d'invasion qu'au moment de l'éruption, l'urticaire, plus rarement le pemphigus, quelquefois l'*herpès facialis.*

„ Lorsque l'éruption est très confluente, il peut survenir de la gangrène de la peau, des abcès multiples, des furoncles (**). „

Nous trouvons des renseignements plus détaillés dans les articles des grands dictionnaires, consacrés à la rougeole. D'Espine, dans le DICTIONNAIRE de Jaccoud (***), dit que “ la *gangrène morbilleuse,* une des complications les plus redoutables, est heureusement devenue fort rare de nos jours, depuis les progrès de l'hygiène privée et hospitalière. On ne peut nier que la rougeole soit une prédisposition puissante pour la production de la gangrène, mais elle ne suffit pas par elle-même à la produire. La malpropreté, la misère, une constitution débilitée, l'encombrement, une habitation froide et humide; telles sont les conditions qui favorisent son apparition dans la convalescence de la fièvre éruptive. C'est une maladie d'hôpital ..... Rilliet n'a vu en ville qu'un seul cas de gangrène sur plus de 4000 malades atteints de rougeole dans les épidémies de Genève de 1847 et de 1852.

„ La gangrène est une complication tardive, elle ne survient guère que du 13e au 20e jour de la maladie, quelquefois même plus tard. C'est la bouche qui est atteinte le plus souvent, puis la vulve

---

(*) Les gangrènes, dit-il, et notamment les gangrènes du poumon, de la vulve et de la bouche (noma) sont des accidents qui surviennent à la suite de la rougeole surtout dans les hôpitaux d'enfants. Il faut dire que ces accidents sont beaucoup plus rares aujourd'hui depuis que les règles de l'antisepsie sont rigoureusement observées.

(**) H. Eichhorst, *Traité de Pathologie interne et de Thérapeutique,* traduction Vissier, Vaquez, etc., t. IV, p. 214. Paris, 1889.

(***) NOUVEAU DICTIONNAIRE DE MÉDECINE ET DE CHIRURGIE PRATIQUES, publié sous la direction du professeur Jaccoud, t. XXXII, article Rougeole, p. 17. Paris, 1882.

et la peau.... Le Dr Moynier (ARCHIVES MÉDICALES DE LA MOSELLE) sur 15 observations, compte 6 noma, 4 gangrènes vulvaires et 5 gangrènes sur les différents points de l'enveloppe cutanée. Le Dr Hecquet (d'Abbeville), sur 10 cas de gangrène, dit en avoir vu 7 à la bouche et 3 à la peau. Sostrat a publié un cas de gangrène de la vulve et 3 cas de noma (*). „

Cet article de d'Espine est surtout intéressant en ce qu'il montre combien la gangrène cutanée est une complication rare de la rougeole.

Sanné, dans le DICTIONNAIRE de Dechambre (**) est beaucoup moins explicite et moins complet. Il signale cependant que " la diphtérie cutanée n'est pas rare dans les endroits où le tégument est mince : pavillon de l'oreille, scrotum, vulve. Chez les sujets qui meurent à une époque un peu plus éloignée du début, on voit des gangrènes cutanées siégeant à la vulve, au scrotum, aux fesses „. Il note aussi la production accidentelle d'abcès sous-cutanés, disséminés en différentes parties du corps et analogues à ceux qui accompagnent la fièvre typhoïde, la variole et la scarlatine : leur marche est tantôt rapide, tantôt lente, mais il est rare qu'ils soient une cause de danger pour l'existence.

D'après lui, la leucorrhée " n'est pas très rare pendant la rougeole, principalement chez les sujets strumeux. L'inflammation catarrhale qui la cause se transforme facilement en gangrène (***).

„ . . . . .

„ D'autres complications occasionnent, pendant leur état aigu, des délabrements assez graves pour laisser des traces indélébiles: cécité, surdité, *cicatrices vicieuses laissées par la gangrène* (IV). „

Enfin Trousseau (V) s'étend plus longuement que les autres auteurs sur les gangrènes de la bouche et de la vulve et donne des détails importants sur le mode de production et sur la marche

---

(*) Sostrat, *Étude sur la gangrène morbilleuse chez les enfants.* Thèse de Paris, 1852.

(**) DICTIONNAIRE ENCYCLOPÉDIQUE DES SCIENCES MÉDICALES, publié sous la direction de A. Dechambre, 3e série, t. V, p. 377. Paris, 1877.

(***) IBIDEM, p. 404.

(IV) IBIDEM, p. 408.

(V) CLINIQUE MÉDICALE DE L'HÔTEL-DIEU, 7e édition, t. I, pp. 213 et suiv. Paris, 1885.

des accidents de cette dernière région, mais sans donner grande attention aux accidents cutanés. Il signale pourtant un travail du Dr Chairon (de Rueil) relatant une épidémie de rougeole grave qui sévit dans cette localité en 1862 et au cours de laquelle on observa, entre autres accidents fort sérieux, des abcès multiples au visage et au cou.

Si les auteurs classiques sont muets ou à peu près sur la question de la gangrène cutanée dans la rougeole, si même au temps où cette complication se rencontrait assez fréquemment, ils ne lui ont prêté qu'une attention distraite, certains observateurs ont traité plus en détail les accidents gangreneux : Lafaye, Thomas et Sostrat leur ont consacré leur thèse (*) et les Drs Hiriart (**) et Lardier (***) ont publié quelques observations intéressantes, si nous en croyons la bibliographie de l'article *Rougeole,* donnée par Sanné dans le Dictionnaire de Dechambre, mais nous n'avons pu prendre connaissance, des travaux des deux derniers auteurs, car les références de Sanné sont inexactes, en ce qui les concerne. Quant aux observations des thèses ci-dessus indiquées, elles portent particulièrement sur des cas de noma et de gangrène de la vulve.

Au reste, la littérature médicale de ces dernières années n'est guère plus riche en détails relativement à ces manifestations particulières. Ni M. Fiessinger (d'Oyonnax) (iv), ni MM. Audéond et Jaccard (v), dans les descriptions des épidémies de rougeole qu'ils ont observées au cours de leur pratique, ne parlent de ces accidents parmi les diverses complications qu'ils décrivent.

(*) Lafaye, *De la gangrène dans la rougeole.* Thèse de Paris, 1868.

Thomas, *De la gangrène morbilleuse.* Thèse de Paris, 1869.

Sostrat, *Étude sur la gangrène morbilleuse chez les enfants.* Thèse de Paris, 1872.

(**) Hiriart, *Ulcères gangreneux de la vulve d'aspect syphilitique développés à la suite de la rougeole,* in Bull. thérap., n° 10, 1867.

(***) Lardier, *Rougeole hémorragique, strabisme vermineux, gangrène de la vulve, rétention d'urine, guérison,* in Gazette des Hôpitaux, p. 361, 1875.

(iv) *Anomalies et complications de la rougeole,* in Gazette médicale de Paris. n. 19, 1894.

(v) *Sur certaines complications de la rougeole,* in Revue médicale de la Suisse romande, n° 1, 1894.

Nous avons cependant trouvé l'indication de quelques cas de complications gangreneuses de la rougeole, autres que le noma et la gangrène de la vulve.

Le Dr Mensi a eu l'occasion d'observer en 1893 trois cas de gangrène de la peau, suite de rougeole, qu'il a décrits dans un mémoire, publié dans la GAZZETTA MEDICA DI TORINO, 1894, n° 19 (*). Plus récemment K. Wunder a rapporté dans le MÜNCHENER MEDICINISCHE WOCHENSCHRIFT (année 1897, n° 20, p. 536) un cas de gangrène des parties molles du thorax à la suite de la rougeole (**).

II

Parmi les cas déjà nombreux de rougeole que nous avons eu l'occasion d'observer, soit au cours de nos études, soit dans notre clientèle, nous n'avions rencontré jusqu'à ces derniers temps que trois cas où des complications gangreneuses s'étaient produites : encore s'agissait-il deux fois de complications ordinairement signalées.

Le premier sujet était un adolescent de quinze ans que nous vîmes en 1886 à l'Hôpital de la Charité à Lille : très grand, malingre, anémié par les privations, l'insalubrité du logement et le travail prématuré, il fut très affaibli par une rougeole grave et atteint au décours de sa maladie d'un noma qui perfora rapidement la joue gauche et l'emporta en trois jours de temps, malgré une intervention, tentée par M. le professeur Duret.

Le second sujet était une fillette de six ans que nous observâmes en 1892 à l'Hôpital des Enfants Malades à Paris, dans le service de notre regretté maître, le Dr Jules Simon. Elle fut atteinte dans la période de desquamation de sa rougeole d'une gangrène de la vulve qui, après avoir débuté à la face interne de la grande lèvre gauche, gagna la partie libre de l'organe et poussa ses ravages jusque dans le pli périnéocrural : elle guérit cependant, grâce aux pansements antiseptiques.

(*) GAZZETTA DEGLI OSPEDALI, pagina 684, 29 maggio 1894.

(**) Analysé in REVUE DES MALADIES DE L'ENFANCE, t. XVI, p. 100, 1898.

Le troisième cas que nous avons déjà signalé dans un travail antérieur (*) est beaucoup plus intéressant à cause de son mécanisme de production. Pendant l'hiver de 1890-91, nous eûmes l'occasion de soigner à Conchil-le-Temple (Pas-de-Calais) un enfant de cinq ans, atteint de bronchopneumonie : après douze à quinze jours de maladie, les phénomènes pulmonaires s'apaisèrent, sauf à la base du poumon droit où persista un foyer d'hépatisation assez étendu : la température étant redevenue presque normale et les signes sthétoscopiques ne se modifiant pas, nous fîmes appliquer en cet endroit un vésicatoire de cinq centimètres de côté qui détermina la production d'un large phlyctène.

Sur ces entrefaites, une sœur plus âgée, placée au dehors, revint chez elle en pleine évolution de rougeole et contamina de suite toute la famille, composée de six autres enfants. La guérison du vésicatoire s'arrêta net et, au bout de quelques jours, en même temps que l'éruption se produisait normalement chez notre petit malade, la plaie se recouvrait d'une enduit grisâtre : les lavages au sublimé au $^1/_{1000}$, l'application de vaseline salolée, les attouchements au nitrate d'argent, ne purent enrayer le mal ; une suppuration abondante se produisit et en quelques jours toute la surface cutanée voisine se sphacéla sur une étendue d'environ vingt à vingt-cinq centimètres en tous sens. L'enfant, déjà fort affaibli par sa bronchopneumonie antérieure, peut-être aussi par un foyer de gangrène pulmonaire qui succéda au foyer d'hépatisation constaté antérieurement — nous le supposons parce que l'enfant eut pendant les derniers jours une haleine nauséabonde, des vomissements et une diarrhée fétides — ne put résister au mal et succomba le seizième jour de l'éruption.

Cet exemple fâcheux nous a rendu depuis fort prudent dans l'emploi du vésicatoire chez l'enfant et, si nous ne croyons pas qu'il faille y renoncer d'une manière absolue, nous ne le prescrivons plus que dans des cas tout particuliers et avec les plus grandes précautions.

(*) *Note sur l'existence des Maladies infectieuses au bord de la Mer*, in MOUVEMENT HYGIÉNIQUE DE BRUXELLES, t. XI, p. 535. 1895.

III

L'épidémie sérieuse de rougeole qui a sévi à Roubaix, au début de l'année 1900 (*), nous a fourni l'occasion d'observer deux cas nouveaux de cette grave complication, mais nous avons eu le bonheur, malgré la violence toute particulière de l'un de ces cas et malgré l'état précaire dans lequel se trouvait notre malade, de voir guérir les deux enfants qui ont été les sujets de nos observations.

Observation I. — Marthe P..., âgée de 4 ans, est souffrante depuis deux ou trois jours quand nous la voyons le 17 février 1900 : elle a de la fièvre, est fort abattue et tousse un peu. L'enfant présente le facies d'un enfant au début de la rougeole; les yeux sont fortement injectés et contiennent un peu de pus dans l'angle interne; le nez coule abondamment et quelques légères taches morbilieuses existent déjà sur les tempes et derrière les oreilles. T. 39°,8.

Nous prescrivons le repos au lit, des frictions excitantes et des boissons chaudes pour favoriser l'éruption, de la quinine contre la fièvre.

L'éruption se fait normalement; la température tombe complètement le 19.

Le 22, nous trouvons l'enfant très souffrante, énervée et brû-

---

(*) En 1897, au cours d'une épidémie aussi sérieuse de rougeole, nous avons constaté un cas de rougeole, compliqué d'accidents cutanés, mais nous ne le rangeons point avec les autres, car dans ce nouveau cas les accidents furent purement suppuratifs et ne présentèrent point l'aspect gangréneux.

Il s'agissait d'un enfant de trois ans qui fut atteint au neuvième jour de la rougeole d'une bronchopneumonie assez sérieuse, en même temps que de conjonctivite et d'otite purulentes ; les accidents pulmonaires paraissaient vouloir céder quand il se déclara une diarrhée fétide qu'aucun moyen thérapeutique ne put enrayer et qui affaiblit rapidement l'enfant. Des abcès se formèrent en de nombreux points du tissu cellulaire sous-cutané; malgré l'ouverture hâtive et des pansements antiseptiques rigoureux, ils se reproduisirent jusqu'à la mort, survenue le vingt-troisième jour de la maladie.

lante. Les parents nous disent qu'elle a commencé à se plaindre la veille au soir de la fesse droite, qu'elle a été prise en même temps de fièvre, d'agitation et même de délire et que, depuis la nuit, elle ne veut plus rester couchée ou assise, mais se tient constamment allongée sur le ventre.

En découvrant l'enfant, nous voyons en effet à la partie la plus saillante de la fesse droite une phlyctène bleu-noirâtre, de la grosseur d'une bonne cerise, entourée d'une zone rouge et saillante d'environ trois à quatre centimètres de rayon. L'enfant craint le moindre contact, résiste à l'examen et pousse des cris dès qu'on touche la zone malade. T. : 40°.

Sans la saillie considérable de la phlyctène, nous penserions volontiers à la pustule maligne, d'autant plus que l'enfant a l'habitude de s'asseoir, pour jouer, sur une peau de mouton non travaillée. Mais les parents nous apprennent au cours de notre interrogatoire que, le 20, l'enfant a voulu se lever dans l'après-midi et qu'elle est tombée assise sur l'angle d'une caisse de jouets.

Après antisepsie de la région, nous fendons la phlyctène d'un coup de bistouri ; il ne s'écoule que quelques gouttes de sérosité roussâtre : au-dessous se trouve une excavation de 3 à 4 millimètres, tapissée d'une sorte de membrane noirâtre que nous ne pouvons détacher en frottant vigoureusement avec une pince, garnie de ouate. Nous désinfectons le mieux possible la cavité que nous remplissons de salol, et nous faisons appliquer des compresses boriquées chaudes, recouvertes de taffetas. T.S. : 39°.2.

Le 23, l'enfant n'a guère dormi, mais souffre pourtant moins que la veille. T.M. : 38°.6. La phlyctène s'est flétrie, mais la cavité semble s'être creusée davantage en même temps qu'elle s'élargissait, tout en conservant sa couleur noirâtre. La zone rouge circonvoisine est encore fort accentuée. Continuation des pansements ; quinine, potion au bromure pour la nuit. T.S. : 39°.

Le 24, l'état général s'améliore et l'enfant qui a mieux dormi, malgré sa position incommode, demande à manger. T.M. : 37°.8. Même état de la fesse que la veille, sauf un suintement abondant et une diminution dans le diamètre de la zone érythémateuse. T.S. : 38°.7.

Le 25, T.M. : 37.°6 ; T.S. : 38°.7. La cavité se creuse de plus en plus, mais il se fait un liseré de séparation le long du bord entre la partie sphacélée et la peau simplement érythémateuse.

Les jours suivants, le travail d'élimination se poursuit tandis que la fièvre cesse complètement. La plaque sphacélée qui garnit l'intérieur de la cavité, se détache en allant de la périphérie vers le centre, en même temps qu'elle se rétracte et prend la forme d'un champignon.

Le 3 mars, nous pouvons, en passant un ciseau courbe, détacher cette espèce de champignon à sa base : nous avons alors une excavation à parois gris pâle, non bourgeonnantes, mesurant environ un centimètre et demi à deux centimètres de profondeur sur un centimètre de largeur, garnie d'un rebord légèrement surélevé. La zone d'aspect érysipélateux a disparu presque complètement et il se fait une légère desquamation épidermique à ce niveau.

A partir de ce moment, la cicatrisation par comblement de la cavité se fait d'une manière régulière, mais très lente, malgré les attouchements à la teinture d'iode et les pansements iodoformés que nous prescrivons et c'est seulement le 27 mars que la cavité est complètement guérie : encore persiste-t-il — maintenant même au bout d'un an — une dépression ombiliquée des plus visibles et qui, à un examen sommaire, ne peut manquer d'attirer l'attention.

Pour le reste, l'état de l'enfant, dès la cessation de la période fébrile, n'a cessé d'être excellent; sa rougeole guérit sans autre complication et, dès le 6 mars, il n'a plus été possible de la tenir au lit et de l'empêcher de marcher.

Toute différente et bien autrement sérieuse est l'histoire de notre second malade : autant la rougeole avait été bénigne chez le premier, autant elle fut grave chez le second; autant elle avait été simple là, autant elle fut compliquée ici. Autant la gangrène était inattendue et fut limitée dans le premier cas, autant elle fut étendue dans le second.

Observation II. — Arsène H..., âgé de dix-sept mois, nourri au sein, bien portant jusque-là, devient malade dans la seconde quinzaine de janvier. Le 22 de ce mois, nous constatons de l'enchifrènement, du larmoiement, une toux répétée et quinteuse, de l'inappétence, un état saburral de la langue, une vive agitation; T.S. : 39°.8. Nous posons le diagnostic de rougeole probable; dès le lendemain, l'éruption est complète et la toux a beaucoup augmenté en même temps que la voix s'est éteinte notablement. Rougeur catarrhale intense de la gorge et œdème léger de la glotte.

Même état le 24, T.M. : 37°.6; T.S. : 38°.2.

Le 26, l'éruption est en voie de disparition; la rougeur pharyngienne et l'œdème glottique diminuent; quelques râles muqueux dans la poitrine.

L'amélioration s'accentue peu à peu et l'enfant semble remis de sa rougeole quand le 8 février, par conséquent le seizième jour après le début de l'éruption, il est repris de fièvre avec oppression légère. L'examen cependant ne montre rien de particulier à l'auscultation.

Le lendemain 9, la température monte à 38°,9 le matin et 40°,1 le soir : l'oppression est très accentuée, la toux fréquente et pénible, les traits sont tirés, la langue fort chargée et l'enfant semble très agité. A la percussion, pas de différence appréciable dans la tonalité, mais à l'auscultation, râles sibilants et muqueux disséminés par places dans toute l'étendue des deux poumons en avant et en arrière.

En raison des accidents nerveux menaçants nous prescrivons des enveloppements tièdes à température graduellement descendante de 30° à 20°, renouvelés d'heure en heure tant que la température atteint 40°, de deux en deux heures quand elle oscille entre 39° et 40°. Nous donnons également une potion au benzoate d'ammoniaque et au sirop diacode et du calomel à doses réfractées.

Le 10, foyers de souffle bronchopneumonique épars dans les deux poumons en avant et en arrière; état général et température stationnaires. L'enfant prend en faible quantité du lait, du bouillon et du jaune d'œuf, battu avec du vin blanc.

La situation reste à peu près la même jusqu'au 16, les foyers de bronchopneumonie s'accentuant et se reliant de manière à envahir la plus grande partie du poumon, mais l'état général se maintenant tant bien que mal, malgré la défectuosité de l'alimentation.

Le 18 février, amélioration légère : la fièvre diminue et tombe à

37°,8 le matin et 38°,6 le soir; les bouffées de râles sont moins intenses et tendent à s'isoler. Révulsion.

L'amélioration persiste en s'accentuant jusqu'au 22, mais ce jour l'enfant a une nouvelle poussée de fièvre accompagnée d'agitation, de cris et de la manifestation de vives souffrances, fait d'autant plus étonnant que la toux et l'oppression ont disparu brusquement. T. à 4 heures du soir : 39°,9. A l'auscultation, les signes de bronchopneumonie sont totalement supprimés et il ne reste que quelques gros râles muqueux le long du sternun et au niveau des omoplates; ni souffle, ni râles sous-crépitants, ni râles bulleux en aucun point du thorax. Sonorité complète dans toute l'étendue des deux poumons, mais la percussion détermine une vive douleur à la région présternale où nous constatons une légère rougeur des téguments. Rien du côté de la tête, ni du côté de l'intestin.

Un examen attentif ne nous ayant point donné l'explication suffisante de la fièvre et de la douleur, nous nous contentons de faire reprendre les enveloppements, tout en surveillant le point douloureux.

Le 23, la plaque érythémateuse pectorale s'est étendue et soulevée; on sent nettement par la palpation un épaississement des parties molles de la région qui donnent à la main une consistance presque cartilagineuse. T.M. : 38°,8 ; T.S. : 39°,9. Nous faisons faire des applications de compresses boriquées chaudes et de pommade iodurée. Quinine contre la fièvre.

Le 24, même situation à la région sternale, mais apparition de zones erythémateuses à la pointe de l'omoplate gauche et aux deux régions iliaques, surtout à droite.

Le 25, même situation, la plaque sternale commence à se ramollir et l'empâtement garde longuement l'empreinte des doigts. Râles muqueux à l'auscultation.

Le 26, on sent une fluctuation fort nette au niveau de l'appendice xiphoïde entre ce point et la ligne mammaire droite. Nous proposons de débrider largement, mais les parents refusent toute intervention active, se basant sur la grande faiblesse de l'enfant.

Le 27, la fluctuation s'accentue. Les râles de bronchopneumonie commencent à réapparaître.

Le 28, la peau de la région sternale qui s'est progressivement amincie, s'ulcère en trois points, au niveau de l'appendice xiphoïde, à un centimètre au-dessus et à un centimètre et demi au-dessous et en dedans du mamelon droit; par ces ulcérations s'écoule un pus verdâtre, mal lié, à odeur forte et désagréable, mais non fétide, puis une sérosité jaunâtre. Crépitation gazeuse à la partie supérieure de la plaque abcédée, due sans doute à l'aspiration de l'air entre la peau décollée et le plan profond dans les mouvements respiratoires.

Le 1er mars, la plaque iliaque droite s'ouvre à son tour par deux orifices. L'état de la poitrine est presque comparable à ce qu'il était huit jours avant le début des accidents cutanés : on entend des bouffées de râles et quelques points soufflants dans la plus grande partie des deux poumons.

Le 2 mars, la plaque scapulaire gauche s'ouvre aussi vers l'angle inférieur de l'omoplate et donne une forte quantité de pus. L'enfant est mieux, comme état général, car la fièvre, l'agitation et la douleur semblent tombées complètement, mais il refuse de s'alimenter, prend à grand' peine un peu de lait, coupé d'eau de Vals, et un peu de vin coupé, additionné de quelques gouttes de teinture de kola. La faiblesse est très grande.

Du 3 au 5, état stationnaire; les ulcérations de la peau suppurent abondamment et laissent voir entre leurs bords fortement amincis des lambeaux de tissu conjonctif sous-cutané sphacélés et en voie d'élimination. De nouveaux orifices se sont percés, de sorte que le nombre total en est de dix-sept, dont huit pour la poitrine, quatre pour la région iliaque droite, deux pour la région iliaque gauche et trois pour la région scapulaire gauche.

Le 9, plusieurs lambeaux importants de tissu conjonctif se sont détachés et ont fait issue par les ulcérations, mais il reste encore plusieurs morceaux de tissu sphacelés qu'on voit nettement par les orifices et la suppuration est toujours abondante. Les parents, voyant l'inefficacité des pansements et des injections de permanganate à amener le tarissement de la suppuration et la guérison des parties malades, se décident à nous laisser détacher avec des pinces les lambeaux sphacélés et sectionner les ponts de peau amincie et privée de vitalité qui séparent les trois principales ulcérations pectorales, de manière à les réunir et à créer une large plaie ouverte qu'on puisse panser à plat.

Lavages à l'eau naphtolée saturée, attouchements légers à la teinture d'iode, pansement humide salolé.

Le 13, nous ouvrons un vaste abcès qui s'est formé depuis trois jours dans le tissu cellulaire à la région sous-rotulienne droite ; le pus en est recueilli aussi aseptiquement que possible pour être soumis à l'analyse. L'état pulmonaire tend à s'améliorer.

Le 17, nous ouvrons un abcès moins important développé dans le tissu cellulaire sous-palpébral gauche.

Le 22, troisième abcès volumineux à la partie moyenne interne du bras droit ; un petit à l'auriculaire droit.

Le 24, petit abcès au mollet droit.

Le 27, six abcès assez gros à la partie inférieure interne du bras gauche.

Le 30, rien de particulier : les plaies de la poitrine et de la région iliaque suintent encore un peu, mais l'élimination du tissu conjonctif sphacélé semble complète et on aperçoit dans la plaie les muscles rosés et tout à fait sains en apparence. L'état pulmonaire est très satisfaisant : on n'entend plus que quelques râles disséminés.

Le 3 avril, les abcès du genou, de la paupière et du mollet sont presque complètement cicatrisés. Les plaies de la poitrine, de l'épaule et des régions iliaques tendent à se refermer.

Le 7, les abcès des bras sont aussi presque guéris, mais il en est revenu deux petits à la nuque et sur l'épaule droite que nous ouvrons comme les précédents.

Le 12, les divers abcès sont guéris.

Le 19, la cicatrisation de toutes les plaies est complète. L'enfant qui pesait 10 kgr., 850 à un an, ne pèse plus que 9 kgr., 200 à vingt mois ; son amaigrissement semble d'autant plus effrayant qu'il a certainement grandi pendant sa longue maladie.

Il commence à manger un peu et digère assez bien : lait, œufs, bouillon, soupes au gruau d'avoine et au tapioca. Nous lui prescrivons du sirop de quinquina et du glycérophosphate de chaux comme reconstituants et toniques : lotions chaudes et froides chaque jour ; sorties régulières et exposition prolongée au soleil quand le temps le permet.

Nous revoyons l'enfant jusqu'au 6 mai ; rien de spécial, sauf un rhume léger. Il reprend rapidement, redevient gai et cherche à faire quelques pas.

Depuis cette époque, l'enfant n'a plus été malade ; il a repris un embonpoint normal et un excellent appétit, mais son teint est resté pâle et même un peu blafard. En définitive, malgré les deux graves complications auxquelles sa rougeole a donné lieu, il n'a gardé aucune trace de sa maladie. La guérison de la poitrine est complète et il vient de passer l'hiver de 1900-1901, sans même contracter de rhume ; son cœur et ses reins paraissent être restés absolument indemnes de toute lésion permanente, comme nous l'ont prouvé l'auscultation et l'examen des urines (*) ; son système ganglionnaire est net de toute inflammation chronique. Rien du côté des organes des sens.

Du côté du système nerveux, nous avons une remarque à faire : l'enfant a présenté en mars et en mai de cette année 1901, deux crises auxquelles nous n'avons point assisté, mais qui, d'après les récits de la mère, semblent avoir été des crises d'épilepsie; le père, au dire de ses frères, était sujet aux mêmes accidents dans sa jeunesse. Depuis, ces crises se sont répétées; le caractère épileptique étant indéniable, nous avons soumis l'enfant à la médication bromurée (février 1902).

IV

Mettant de côté le cas de noma et le cas de gangrène vulvaire dont nous avons parlé en premier lieu et qui ne présentent rien de spécial, nous nous contenterons d'étudier et de rapprocher nos deux observations récentes et le cas de mort par gangrène d'une plaie de vésicatoire : ces trois cas nous semblent présenter seuls un intérêt suffisant pour que nous nous y arrêtions.

Il y a cependant une grande différence entre ces trois complications, identiques en apparence, de la rougeole, différence qui

---

(*) A aucun moment de la maladie, il ne s'est produit d'albuminurie ; les urines étaient seulement très chargées par moment d'acide urique et de phosphates.

réside bien moins dans leur inégale gravité que dans le mécanisme de leur production et la cause occasionnelle de leur apparition.

Dans le cas mortel, les accidents gangreneux ont été localisés en effet par l'existence antérieure de la plaie du vésicatoire : il y avait en effet en cet endroit du fait même de cette plaie non guérie un point de moindre résistance où les tissus avaient perdu de leur vitalité et où les microorganismes devaient trouver un terrain de pullulation d'autant plus favorable que l'exanthème rubéolique venait congestionner le derme à nouveau et donner un coup de fouet à la suppuration. Sur un terrain de culture aussi bien préparé, il était facile aux microbes habituels de la rougeole de développer leurs propriétés suppuratives et nécrosantes et de provoquer ainsi la formation d'une vaste plaque de sphacèle.

Dans le cas de la petite Marthe P..., nous croyons que le mécanisme de la production d'un point de sphacèle est tout aussi apparent : la chute, faite par cette enfant, a été en effet l'occasion de l'apparition de cette complication. La contusion des parties molles, peut-être même la formation d'une légère suffusion sanguine au point touché, ont permis aux germes de se localiser et de pulluler en cet endroit et par suite de déterminer la nécrobiose des parties molles par l'exacerbation de leur action infectieuse. Les douleurs violentes, la fièvre, les phénomènes généraux graves, l'existence d'une plaque érythémateuse étendue prouvent bien qu'il y a eu là un processus microbien très sérieux, ce qui se comprend d'autant mieux, malgré la bénignité de la rougeole, que l'éruption était à peine terminée et que l'enfant était encore sous le coup du premier assaut de la maladie.

Dans le troisième cas, la cause occasionnelle des accidents gangreneux semble moins apparente au premier abord, mais en y réfléchissant et en nous reportant à ce qui s'était passé, nous croyons pouvoir expliquer la raison particulière de la localisation du sphacèle et de la suppuration dans la plupart des points touchés. Il semble en effet que ces accidents se sont produits surtout aux endroits du corps qui ont été le siège de pressions pendant la longue maladie que l'enfant a subie : c'est le cas pour la nuque, les épaules et les régions iliaques, mais on peut se demander s'il en est de même pour le thorax, les bras et le genou.

Nous croyons que, dans ces dernières régions, on peut accepter la même explication des complications décrites : en effet, malgré nos observations, les parents, en faisant les enveloppements, laissaient constamment l'enfant dans le décubitus dorsal, employaient un drap très épais et recouvraient avec des couvertures assez lourdes ; de plus l'enfant croisait habituellement les bras sur la poitrine et ployait fortement les genoux. Le poids des couvertures tendait donc à exercer une pression marquée sur le thorax, les mains et les genoux, en même temps qu'il appliquait fortement contre le tronc la partie interne des bras.

C'est exclusivement — à part l'œil gauche — dans les points ainsi comprimés que se sont développés les accidents que nous avons observés et il nous semble légitime d'admettre cette explication. Il est en effet naturel que chez un enfant, débilité par une affection aussi grave qu'une bronchopneumonie, la faiblesse générale et la dénutrition aient diminué la vitalité des téguments par suite des troubles de l'oxygénation et de l'innervation, et que les points, soumis à des pressions assez marquées, aient offert ainsi aux germes nécrosants de la rougeole un réceptacle plus particulièrement favorable à leur développement.

Ces divers exemples montrent aussi que le défaut d'antisepsie n'est pas la vraie cause de ces complications cutanées de la rougeole : nous ne les avons rencontrées en effet que trois fois sur plusieurs centaines de cas que nous avons observés à Roubaix ; or, si le défaut de propreté extérieure du corps était la cause principale de ces accidents, ils devraient être bien plus fréquents dans les milieux ouvriers de cette ville où les conditions les plus élémentaires de l'hygiène corporelle et de l'hygiène de l'habitation sont sans cesse oubliées, où il est la plupart du temps difficile, sinon impossible, d'obtenir que les rougeoleux soient lavés et changés régulièrement de linge.

Sans doute, dans nombre de cas, le manque de propreté extérieure du corps a été l'occasion de ces complications cutanées comme de complications ganglionnaires, mais la cause d'une fréquence plus grande autrefois qu'aujourd'hui de ces sortes d'accidents consiste surtout dans les autres conditions hygiéniques et diététiques qui favorisaient singulièrement l'apparition de ces phénomènes de nécrose en préparant le terrain, concurremment avec l'infection morbilleuse. Nous nous souvenons encore du temps où, sous prétexte d'empêcher le refroidissement, on calfeutrait tous les orifices d'aération des chambres, en collant même du papier sur les joints des fenêtres, en appliquant des bandes de drap sur les joints des portes; où on condamnait les malades à la réclusion la plus stricte dans une chambre jamais aérée; où, sous prétexte d'éviter l'inflammation, on les soumettait au régime le plus débilitant possible. Dans de semblables conditions, la nutrition générale se trouvait gravement troublée et le malade était exposé d'une manière plus fréquente et plus intense à toutes les complications que favorisent l'atonie des tissus et la dépression nerveuse.

Sans insister longuement sur la partie bactériologique de la question, nous devons pourtant en dire quelques mots : l'analyse microscopique du pus que nous avons recueilli, y a décelé la présence du *streptocoque* et du *staphylocoque doré* qu'on découvre dans la plupart des complications des fièvres éruptives, ce qui prouve qu'il y a eu infection secondaire, car l'existence du streptocoque dans ce cas semble en contradiction avec les résultats obtenus dans d'autres observations.

Le Dr Mensi, en effet, dans le travail que nous avons cité plus haut, note que ses recherches bactériologiques lui ont permis de trouver à la limite des ulcérations :

1° Des colonies de staphylocoque doré qui, injecté dans la conjonctive du lapin, a amené de la suppuration.

2° Des colonies d'un bacille que tous ses caractères morphologiques et son genre de culture rapprochent absolument du *proteus vulgaris* et qui, injecté sous la peau du lapin à la dose de deux centimètres cubes de culture, n'a donné aucun effet.

3° Des colonies d'un bacille qui a beaucoup d'analogie avec le bacille de Loëffler, mais qui, injecté aux cobayes, n'a produit aucun résultat.

Dans des coupes des bords de l'ulcération, colorées au bleu de méthylène de Loëffler et décolorées par l'huile d'aniline, Mensi a remarqué de rares coccus et de nombreux bacilles courts et subtils.

En injectant sous la peau d'un lapin deux centimètres cubes de culture du bacille, ressemblant au *proteus vulgaris,* additionnés d'un centimètre cube de culture du staphylocoque, on observa, au bout de 24 heures, une vive rougeur avec œdème de la peau, et 48 heures après, une ulcération qui, partant du centre du territoire œdématié, s'étendit rapidement à toute sa surface.

De l'ulcération sortait une sécrétion grisâtre en tout semblable à celle de la gangrène morbilleuse.

Nous avons tenu à rapporter en entier le résultat des recherches du Dr Mensi parce qu'elles prouvent que c'est bien le staphylocoque doré qui est l'auteur responsable des complications gangreneuses de la rougeole quand toutefois il rencontre des circonstances favorables à son développement. L'adjonction du streptocoque quand le staphylocoque doré a presque terminé sa période d'activité, détermine peut-être la production d'abcès, tels que ceux que nous avons vu survenir après le stade gangreneux.

Un point intéressant à relever dans nos observations est le rapport qui a existé entre la gangrène cutanée et les manifestations pulmonaires chez notre dernier sujet. Que chez l'enfant, mort à la suite de ses accidents morbilleux, il se soit produit de la gangrène pulmonaire probable, la chose n'est pas extraordinaire : la gangrène du poumon a été signalée par plusieurs auteurs et, dans le cas dont il s'agit, la bronchopneumonie dont l'enfant avait souffert avant d'être atteint de rougeole, le mettait en état de réceptivité morbide toute spéciale au point de vue de cet organe.

Chez notre dernier sujet au contraire, l'éclosion des accidents cutanés a paru arrêter la bronchopneumonie dont les signes physiques ont disparu pendant leur développement, de même que les manifestations de la tuberculose pulmonaire rétrocèdent pendant l'évolution d'une méningite intercurrente ; par contre dès que les accidents cutanés furent bien établis et arrivés au stade d'état, les signes pulmonaires reparurent et la bronchopneumonie s'améliora parallèlement à la guérison de la gangrène cutanée. Est-il possible d'alléguer une action nerveuse spéciale pour expliquer ce fait ? il est bien difficile de se prononcer d'après une seule observation.

Nous devons faire remarquer aussi que, contrairement à ce qui s'est passé dans la plupart des cas cités par divers auteurs, nos sujets ne présentaient pas de tare antérieure qui justifiât une action plus nocive des germes morbilleux(*). Chez les trois malades du D^r Mensi, l'une était rachitique, la seconde tuberculeuse et le troisième relevait d'une varicelle dont l'une des vésicules s'ulcéra et donna lieu à la plaque de gangrène. Le D^r K. Wunder attribue au contraire le cas qu'il a observé à l'habitude qu'avait sa malade de se coucher sur le côté droit : d'après lui, cette compression aurait amené une thrombose de l'artère thoracique longue et par suite une gangrène des tissus de la partie latérale droite du thorax, affaiblis déjà par la maladie. L'explication est plausible.

Le mode de production des accidents gangreneux chez la plupart de ces malades prouve, nous l'avons déjà dit, que le défaut d'antisepsie ne peut toujours être incriminé pour expliquer les complications cutanées : sans doute il est indispensable de prendre les mesures de propreté les plus rigoureuses chez tous les rougeoleux, mais il faut aussi veiller dans les cas graves et compliqués à la position de l'enfant.

Nous avons peu de choses à dire du traitement, car l'antisepsie suffira à amener la guérison des petites ulcérations, guérison qui du reste exige toujours un long espace de temps — de vingt jours à deux mois suivant la gravité des cas. — Mais il semble que dans les cas sérieux, il y a intérêt à intervenir dès que la fluctuation indique que l'agent nécrosant a fait son œuvre et que la suppuration existe, et nous regrettons de n'avoir pu agir ainsi chez le dernier de nos sujets. Le débridement large de la zone œdématiée, suivi d'un grattage des parties molles sphacélées, réduirait de beaucoup la période d'élimination et de suppuration et permettrait une réparation plus rapide, fait fort important chez des malades, déjà affaiblis par une affection grave : cette technique aurait aussi l'avantage d'éviter souvent les cicatrices difformes qui persistent après la guérison des parties gangrenées.

Nous nous sommes même demandé si, pour les vastes plaques œdémateuses, se produisant tout à coup comme chez notre dernier sujet, il n'y aurait pas possibilité d'enrayer dès le début les accidents et d'instituer un traitement abortif. Il ne peut être

---

(*) A moins que l'on n'admette l'influence chez notre dernier malade de cette épilepsie latente qui s'est développée depuis ?

question de sérothérapie puisque le sérum antistaphylococcique n'existe pas, mais nous nous demandons si les injections souscutanées de sérum artificiel ne relèveraient par la vitalité d'une part et si d'autre part l'emploi du thermocautère, servant à faire de nombreuses et profondes mouchetures à la périphérie de la plaque œdémateuse, ne limiterait pas l'action désorganisatrice des germes, en amenant une révulsion immédiate et en provoquant une détente. Il nous semble qu'il serait rationnel d'essayer.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (**Émile**), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

—— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in 8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries a termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (**J.**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.

TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique,** réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par **CH.-ED. GUILLAUME** et **L. POINCARÉ**, 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.

TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr

TOME III : *Electro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.

TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (**Jules**). Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. (*Technologie et Chimie*). Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*

TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*

TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (**E.**), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (**En préparation.**)

GUILLAUME (**Ch.-Ed.**), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (**H.**), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTE DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Electrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.

TOME II : *(Sous presse.)*

TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (**C.**), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris**, *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SIXIÈME ANNÉE. 1901-1902

TROISIÈME FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1902

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PAGES

Session des 8, 9 et 10 avril 1902 . . . . **144**
Première Section . . . . *Ibid.*
Deuxième — **147**
Troisième — **165**
Cinquième — **181**
Assemblée générale du 8 avril 1902 . . . . *Ibid.*
Rapport de M. Mansion. *Ibid.*
Rapport de M. Goedseels . . . . **188** et **195**
Conférence de M. le commandant J. Henry sur *La Conquête du Haut Nil* . . . . *Ibid.*
Assemblée générale du 9 avril 1902 . . . . **192**
Rapport sur la Société bibliographique de Paris . . . *Ibid.* et **200**
Conférence du R. P. G. Hahn, S. J., sur *Les multiples organes de locomotion chez les vertébrés* . . . . *Ibid.*
Assemblée générale du 10 avril 1902 . . . . **194**
Conférence de M. F. Meunier sur *Les travailleurs de la mort* . . **195**
Membres du Conseil pour l'année 1902-1903 . . . . **199**
Liste des ouvrages reçus par la *Société scientifique de Bruxelles* du 1^er^ mai 1901 au 1^er^ mai 1902 . . . . **204**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur le mouvement du pendule conique dans le cas des petites oscillations, par M. le comte de Sparre 133
Sur l'application de la méthode de Cauchy aux moindres carrés, par M. Éd. Goedseels 148
Sur les dépôts ferrugineux de Franche-Comté, par M. Bourgeat. . . 157
Nouvelle contribution à l'étude du Glaciaire dans le Jura méridional, par M. Bourgeat 165
Localisations nucléaires de la moelle épinière, par M. le D^r^ D. De Buck. 171

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

Adresse du secrétaire : **M. Paul Mansion**, *6, quai des Dominicains. Gand.*

SUR LE

MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE

DANS LE CAS DES PETITES OSCILLATIONS

PAR

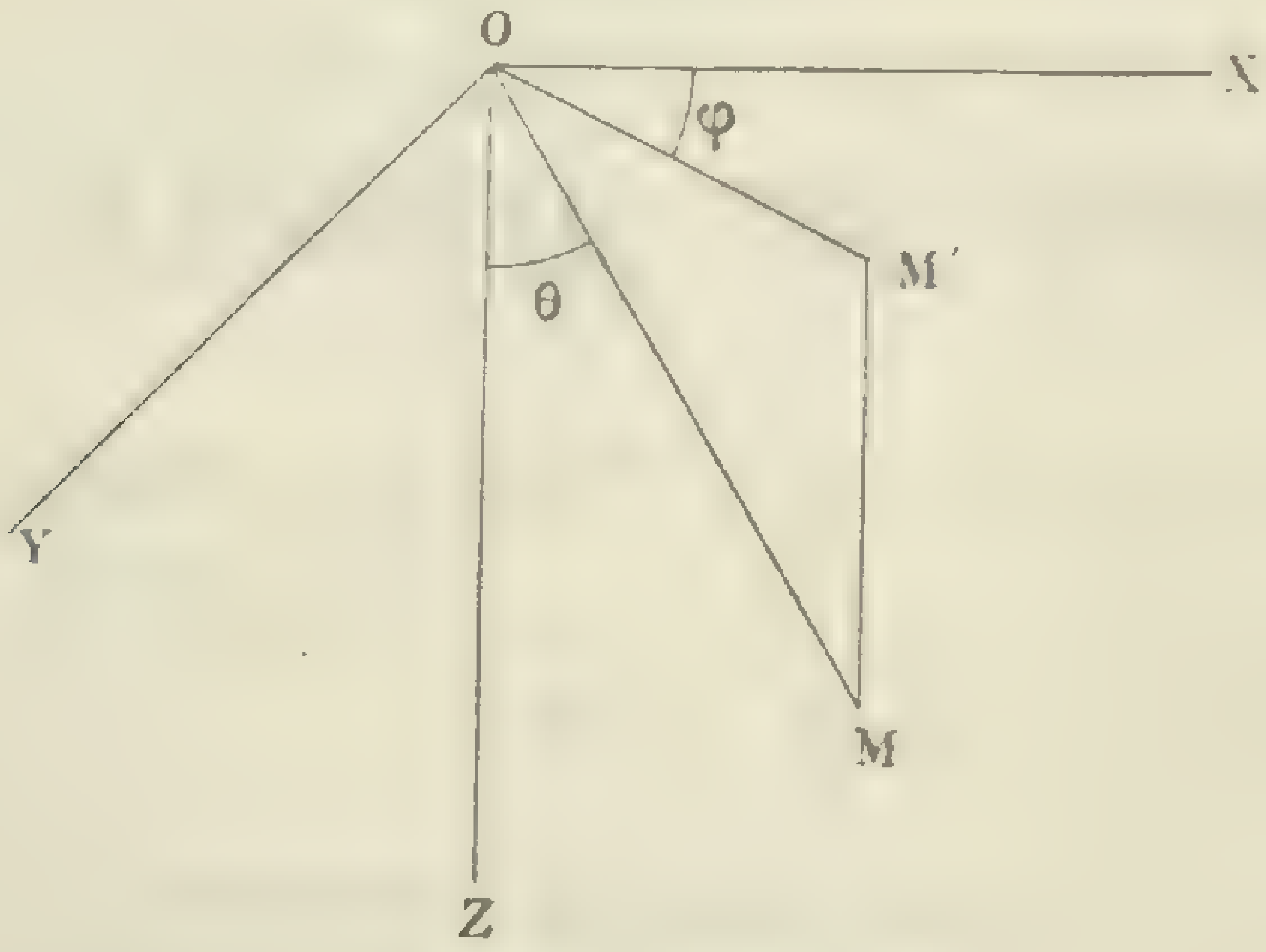
M. le Comte de SPARRE
Professeur aux Facultés catholiques de Lyon

La question du pendule conique a été l'objet de travaux assez nombreux. Parmi les solutions de cette question par les fonctions elliptiques qu'il me suffise de rappeler celle donnée par M. Hermite, celle que j'ai donnée moi-même dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, et plus récemment celle qui se trouve dans les feuilles du cours de M. Humbert à l'École Polytechnique. Pour la solution de la même question par les développements de série, je me bornerai à citer celle de M. Resal et celle que j'ai donnée en 1892 dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE.

Aujourd'hui je veux me borner au cas des petites oscillations et établir par une méthode simple et élémentaire le fait connu que, dans ce cas, la projection horizontale du pendule décrit une ellipse dont les axes tournent d'un mouvement uniforme dans le sens du mouvement.

Je donne ensuite la solution du problème du mouvement du pendule à la surface de la terre, lorsqu'on néglige les termes en $\omega\theta^3$, ω désignant la vitesse angulaire de la rotation de la terre.

Soit OM le pendule, M′ sa projection sur le plan horizontal xOy, θ son angle d'écart, φ son azimut, φ_0 et θ_0 les valeurs initiales de φ et θ, v_0 la vitesse initiale, φ_0' la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$.



Nous remarquerons d'abord que l'on a

$$v^2 = l^2 \left[\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2}\right] \tag{1}$$

et par suite à l'instant initial

$$\frac{v_0^2}{l^2} = \theta_0'^2 + \sin^2\theta_0\, \varphi_0'^2 \text{ (*)} \tag{2}$$

Les équations des forces vives et des aires nous donnent alors en les divisant par l^2

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{3}$$

$$\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = \sin^2\theta_0\, \varphi_0'. \tag{4}$$

(*) θ_0' désignant la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$.

Si on tire de (4) la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ et si on la porte dans (2) on aura

$$(5)\qquad \sin^2\theta\,\frac{d\theta^2}{dt^2} = \left[\frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)\right]\sin^2\theta - \sin^4\theta_0\,\varphi_0'^2.$$

On voit de suite en vertu de la relation (2) que le second membre est positif pour $\theta = \theta_0$, il est, au lieu de cela, négatif pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On en conclut que θ varie d'un maximum à un minimum, on peut donc, sans nuire à la généralité, supposer θ_0' nul et prendre pour instant initial celui où θ est maximum. θ varira alors d'un maximum θ_0 à un minimum θ_1 et on aura

$$(6)\qquad \frac{v_0^2}{l^2} = \sin^2\theta_0\,\varphi_0'^2.$$

Posons maintenant

$$z = \sin^2\frac{\theta}{2},\qquad a = \sin^2\frac{\theta_1}{2}.$$

On tire de la première de ces relations

$$\frac{dz}{dt} = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

L'équation (5) deviendra alors en tenant compte de (6) et posant pour simplifier l'écriture

$$B = a(1-a)\,\varphi_0'^2\,\frac{l}{g}$$

$$(7)\qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{4g}{l}(z-a)\left[z^2 - (1+B)z + (1-a)B\right].$$

L'équation (4) donne par la même substitution

$$(8)\qquad d\varphi = \frac{a(1-a)}{z(1-z)}\,\varphi_0'\,dt$$

Si on égale à 0 la quantité entre crochets dans le second nombre de (7), l'équation

$$z^2 - (1 + \mathrm{B})\,z + (1 - a)\,\mathrm{B} = 0 \tag{9}$$

a une racine b entre 0 et 1 et une c entre 1 et $+\infty$; il suffit pour le voir de substituer 0 et 1 dans le premier membre et de remarquer que $a < 1$.

De plus, puisque nous avons supposé que θ_0 *est le maximum de* θ on a $a > b$. On a donc en définitive

$$c > 1 > a > b > 0 \quad (*) \tag{10}$$

De plus

$$b = \sin^2 \frac{\theta_1}{2}. \tag{11}$$

L'équation (7) pourra alors s'écrire

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{4g}{l}\,(c - z)\,(a - z)\,(z - b). \tag{12}$$

On déduit d'ailleurs des relations entre les coefficients et les racines de (9)

$$b + c = 1 + \mathrm{B} \qquad bc = \mathrm{B}\,(1 - a)$$

d'où

$$c = \frac{(1 - b)\,(1 - a)}{1 - a - b} = 1 + \frac{ab}{1 - a - b} \tag{13}$$

$$\mathrm{B} = b + \frac{ab}{1 - a - b} = \frac{b\,(1 - b)}{1 - a - b}. \tag{14}$$

(*) La condition $a > b$ exige $\mathrm{B}\,(1 - 2a) < a\,(1 - a)$ c'est-à-dire en remplaçant B et a par leurs valeurs $\frac{l}{g} \cos \theta_0\, \varphi_0'^2 < 1$.

Avant d'aller plus loin, remarquons que

$$b < 1 - a.$$

Si en effet on substitue $1 - a$ dans le premier membre de (9) on a un résultat négatif et par suite on en conclut

$$1 - a > b$$

ou

$$\sin^2 \frac{\theta_1}{2} < 1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = \cos^2 \frac{\theta_0}{2} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right).$$

C'est-à-dire, puisque $\frac{\theta_1}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}$ sont tous deux plus petits que $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\theta_1}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}$$

ou

$$\theta_1 < \pi - \theta_0$$

Donc si $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et, si le point de départ du pendule est dans l'hémisphère supérieur, le pendule passe toujours dans l'hémisphère inférieur; de plus, le pendule se rapproche plus, dans ce cas, de la verticale dans l'hémisphère inférieur que dans l'hémisphère supérieur; on retrouve ainsi une propriété bien connue du mouvement.

On tire ensuite de (12), en remarquant que l'on part d'un maximum a de z.

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dz}{\sqrt{(c-z)(a-z)(z-b)}}. \tag{15}$$

Posons maintenant

$$z = a\sin^2 u + b\cos^2 u = b + (a-b)\sin^2 u. \tag{16}$$

D'où en faisant croître u avec t

$$\frac{-\,dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}} = 2\,du$$

et par suite

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{du}{\sqrt{c-b-(a-b)\sin^2 u}}$$

ou en posant de plus

$$k^2 = \frac{a-b}{c-b}$$

(17) $$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{c-b}}\,\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

k^2 étant compris entre 0 et 1 en vertu des relations (10).

Cette équation (17) fait voir que la valeur de t pour le pendule conique se déduit de suite de celle relative à un pendule circulaire dont l'angle d'écart α serait donné par la relation

(18) $$\sin\frac{\alpha}{2} = k.$$

Si en particulier T est la durée de l'oscillation complète, aller et retour, pour ce dernier pendule, on aura pour la durée T de l'oscillation complète du pendule conique

(19) $$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{T}_1}{\sqrt{c-b}}.$$

Si on veut avoir la durée de l'oscillation complète du pendule conique aux termes en θ^4 près, on aura avec cette approximation (*)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{c-b}} = \left(1 - \frac{\theta_1^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\theta_1^2}{8}.$$

D'ailleurs avec la même approximation

$$k^2 = \frac{a-b}{c-b} = \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{4}.$$

Donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{16}\right)\left(1 + \frac{\theta_1^2}{8}\right).$$

Donc toujours avec la même approximation

$$(20) \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{16}\right).$$

La formule (8) donne si on y remplace dt par sa valeur (15)

$$(21) \quad d\varphi = -\frac{a\,(1-a)}{2z\,(1-z)}\,\varphi_0' \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dz}{\sqrt{(c-z)\,(a-z)\,(z-b)}}.$$

D'ailleurs ces deux relations

$$bc = B\,(1-a), \qquad B = a\,(1-a)\,\varphi_0'^2 \frac{l}{g},$$

on déduit

$$abc = a\,(1-a)\,B = a^2\,(1-a)^2\,\varphi_0'^2 \frac{l}{g}$$

---

*) En tenant compte des valeurs de a et b et de la formule (13).

de sorte que l'équation (21) peut s'écrire

$$(22)\qquad d\varphi = -\frac{1}{2}(1-z)^{-1}\left(1-\frac{z}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dz}{z\sqrt{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{b}-1\right)}}.$$

Supposons maintenant que nous nous bornions au cas des petites oscillations et que nous convenions de négliger les termes qui sont effectivement de l'ordre de θ^4, on déduira d'abord de la formule (13)

$$c = 1 + \frac{ab}{1-a-b} = 1,$$

et avec la même approximation de la formule (22)

$$d\varphi = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}z\right)\frac{dz}{z\sqrt{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{b}-1\right)}}$$

ce que nous écrirons

$$(23)\qquad d\varphi + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{ab}\,dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}} = \frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{z}\right)}}.$$

Mais on a, aux termes en θ^2 près, en vertu de l'équation (17)

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}}$$

de sorte que l'on a, aux termes en θ^4 près,

$$\frac{\sqrt{ab}\,dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{ab}\,dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\theta_1\theta_0\,dt.$$

L'équation (23) s'écrira donc

$$(24)\qquad d\varphi - \frac{3}{8}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\theta_1\theta_0\,dt = \frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{z}\right)}}.$$

Si on pose alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a}\sin^2\psi + \frac{1}{b}\cos^2\psi \tag{25}$$

d'où en faisant croître ψ avec le temps

$$\frac{d\,\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{z}\right)}} = 2\,d\psi$$

on aura en prenant pour $t = 0$, $\varphi = \psi = 0$

$$\varphi - \frac{3}{8}\theta_1\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \psi. \tag{26}$$

Mais si ρ est le rayon vecteur de la projection horizontale du pendule, on a

$$\rho^2 = 4l^2 z\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Donc en négligeant les termes en θ^4 dans ρ^2 et par suite ceux en θ^3 dans ρ

$$\rho^2 = 4l^2 z.$$

Par suite, si ρ_0 et ρ_1 désignent le maximum et le minimum de ρ

$$\rho_0^2 = 4l^2 a \qquad\qquad \rho_1^2 = 4l^2 b$$

et l'équation (25) pourra s'écrire

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2}\sin^2\psi + \frac{1}{\rho_1^2}\cos^2\psi. \tag{27}$$

La projection horizontale du pendule décrit donc avec l'approximation convenue, une ellipse par rapport à des axes qui tournent dans le sens du mouvement avec une vitesse angulaire égale à

$$\frac{3}{8}\theta_0\theta_1\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{28}$$

Mais aux termes en θ^2 près, en vertu de la formule (20)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On peut donc écrire la valeur (28) de la vitesse angulaire de rotation des axes de l'ellipse

$$\frac{3\pi\,\theta_0\,\theta_1}{4T}$$

Si on veut l'angle Φ dont a tourné le grand axe de l'ellipse au bout d'une oscillation complète, dont la durée est T, on aura

(29) $$\Phi = \frac{3\pi\,\theta_1\,\theta_0}{4}.$$

Cet arc est mesuré en longueur d'arc, si on le veut exprimer en degré, il faut multiplier sa valeur par $\frac{180}{\pi}$ et on aura

(30) $$\Phi^0 = 135\,\theta_1\,\theta_0.$$

D'ailleurs aux termes en θ^3 près

$$\theta_1 = \frac{\rho_1}{l}, \qquad \theta_0 = \frac{\rho_0}{l},$$

de sorte que l'on a en fin de compte

(31) $$\Phi^0 = 135\,\frac{\rho_1\,\rho_0}{l^2}$$

où ρ_1 et ρ_0 sont mesurés avec la même unité que l. Le temps τ mis par les axes pour faire une révolution complète est donné par la formule

$$\tau = \frac{8}{3}\,\frac{T}{\theta_1\,\theta_0} = \frac{8}{3}\,\frac{l^2T}{\rho_1\,\rho_0}.$$

Mouvement du pendule conique à la surface de la terre. Nous supposerons que l'on regarde la pesanteur, résultant de l'attraction de la terre et de la force centrifuge, comme constante dans les diverses positions du pendule, de plus, ω désignant la vitesse angulaire de la rotation de la terre, nous négligerons les termes en $\omega\theta^3$ devant ceux en $\omega\theta^2$.

Par suite de la première hypothèse, l'équation des forces-vives subsiste sans changement, et il n'y a qu'à remplacer l'équation des aires en projection horizontale par celle des moments des quantités de mouvement par rapport à la verticale, qui donne

$$\text{(32)} \qquad \left(l^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}\right)_0^t = \int_0^t \mathrm{M}_z\mathrm{F}\, dt \text{ (*)}.$$

Mais si on prend l'axe des x dans le plan du méridien et dirigé vers l'est, on a en se supposant dans l'hémisphère boréal

$$\mathrm{M}_z\mathrm{F} = \mathrm{Y}'x - \mathrm{X}'y$$

avec

$$\mathrm{X}' = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\mathrm{Y}' = 2\omega \cos\lambda \frac{dz}{dt} - 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt}$$

λ désignant la latitude

On aura par suite :

$$\mathrm{M}_z\mathrm{F} = 2\omega \left[\cos\lambda \frac{xdz}{dt} - \sin\lambda \frac{xdx + ydy}{dt}\right]$$

d'où

$$\int_0^t \mathrm{M}_z\mathrm{F}\, dt = \omega \sin\lambda \,(x_0^2 + y_0^2 - x^2 - y^2) + 2\omega \cos\lambda \int_0^t x dz$$

(*) Je désigne ici l'azimut du pendule par ψ au lieu de φ, pour éviter une confusion dans ce qui va suivre.

ou en passant aux coordonnées polaires

$$(33)\qquad \int_0^t \mathrm{M}_z\mathrm{F}\,dt = \omega l^2 \sin\lambda\,(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta) - 2\omega l^2 \cos\lambda \int_{\theta_0}^{\theta} \sin^2\theta \cos\psi\,d\theta.$$

Mais la dernière intégrale est, avec l'approximation admise, négligeable devant le premier terme du second membre, car ce premier terme est de l'ordre $\omega\theta^2$, tandis que l'on a, θ étant supposé positif,

$$\left| \int_0^{\theta} \sin^2\theta \cos\psi\,d\theta \right| < \int_0^{\theta} \theta^2\,d\theta = \frac{\theta^3}{3}$$

le dernier terme du second membre de (33) est donc de l'ordre de $\omega\theta^3$, et nous le négligerons devant le premier qui est de l'ordre de $\omega\theta^2$.

Mais cela revient à négliger la composante de la rotation de la terre suivant $0x$, et à ne tenir compte que de la composante de cette rotation suivant $0z$. On se trouve alors dans le même cas que si le pendule était placé au pôle, et le problème peut être traité comme un mouvement absolu, il suffit pour cela de considérer les axes qui ne participent pas à la rotation d'entraînement autour de $0z$. Seulement, par rapport à ces axes, ne participant pas à la rotation suivant $0z$, la vitesse initiale que nous supposons toujours horizontale ne sera plus v_0 mais

$$v_1 = v_0 + l\omega \sin\lambda \sin\theta_0,$$

v_0 étant ici considéré comme positif de gauche à droite et comme négatif dans le cas contraire (*). Sous une autre forme si φ est l'azimut du pendule par rapport aux axes qui ne participent pas au mouvement d'entraînement suivant $0z$, on a

$$(34)\qquad \varphi'_0 = \psi'_0 + \omega \sin\lambda.$$

Ceci posé tous les résultats obtenus pour le pendule conique

(*) Pour l'observateur placé suivant $0z$ les pieds en 0, la tête en z

s'appliquent. avec les approximations admises, lorsqu'on tient compte de la rotation de la terre.

La projection horizontale du pendule décrira donc, par rapport aux axes ne participant pas à la rotation suivant Oz, une ellipse dont les axes tourneront dans le sens du mouvement avec une vitesse égale à

$$\frac{3\pi\,\theta_1\,\theta_0}{4T} = \frac{3}{8}\,\theta_1\,\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

D'ailleurs, comme nous avons remarqué que, si on néglige les termes en θ^4 on doit prendre

$$c = 1$$

la formule

$$b + c = 1 + B$$

nous donnera en tenant compte des valeurs de b et B

$$b = \sin^2\frac{\theta_1}{2} = B = a\,(1 - a)\,\varphi_0'^2\,\frac{l}{g}$$

d'où en se bornant à la partie principale

$$\theta_1^2 = \theta_0^2\,\varphi_0'^2\,\frac{l}{g},$$

ou

$$\theta_1 = \varphi_0'\theta_0\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

C'est-à-dire en remplaçant φ_0' par sa valeur (34)

$$\theta_1 = \theta_0\sqrt{\frac{l}{g}}\,(\psi_0' + \omega\sin\lambda). \tag{35}$$

Donc, a la surface de la terre, et par rapport à des axes ne participant pas au mouvement d'entraînement autour de Oz, la projection horizontale du pendule décrit une ellipse dont les axes tournent dans le sens du mouvement avec une vitesse égale à

$$\frac{3}{8}\,\theta_0^2\,(\psi_0' + \omega \sin\lambda).$$

Par rapport à des axes fixes par rapport à la terre la vitesse de rotation sera par suite

$$(36) \qquad \frac{3}{8}\,\theta_0^2\,\psi_0' - \omega \sin\lambda \left(1 - \frac{3}{8}\,\theta_0^2\right).$$

Donc en particulier, si on suppose que la vitesse relative initiale soit nulle, *cas du pendule de Foucault*, on aura pour la vitesse de rotation des axes, par rapport à la terre

$$(37) \qquad - \omega \sin\lambda \left(1 - \frac{3}{8}\,\theta_0^2\right)$$

et pour l'angle d'écart minimum du pendule

$$(38) \qquad \theta_1 = \omega \sin\lambda\, \theta_0 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dans la première formule θ_0 est exprimé en longueur d'arc, quant à la seconde, comme elle est homogène par rapport à θ_1 et θ_0, ces deux quantités seront exprimées au moyen de la même unité, quelconque d'ailleurs (par exemple en secondes).

La formule (38) peut se mettre sous une forme, un peu différente, si T est le temps de l'oscillation complète, aller et retour, on a aux termes en θ^2 près

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

et la formule (38) peut s'écrire

$$(39) \qquad \theta_1 = \frac{\omega\, \theta_0\, T \sin\lambda}{2\pi}.$$

Dans l'expérience de Foucault au Panthéon on avait

$$T = 16^s \qquad \frac{\omega \sin\lambda}{2\pi} = \frac{\sin\lambda}{86\,164}$$

puisque

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$$

et comme $\lambda = 48^\circ 50' 14''$ on aura en supposant $\theta_0 = 2^0 = 7200''$

$$\theta_1 = \frac{7200 \times 16}{114\,450} = 1'',007$$

$$\frac{3}{8}\theta_0^2 = 0{,}0004569.$$

Soit τ la durée d'une révolution complète du pendule on aura aux termes en θ_0^4 près

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda}\,\frac{1}{1 - \frac{3}{8}\theta_0^2} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda}\left(1 + \frac{3}{8}\theta_0^2\right)$$

$$= 31^h 47^m 30^s + 52^s = 31^h 48^m 22^s.$$

On voit que le terme en θ_0^2 produit sur la durée de la rotation une augmentation de 52^s complètement négligeable.

SUR
L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE CAUCHY
AUX MOINDRES CARRÉS

PAR

Éd. GOEDSEELS
Administrateur-Inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique
Professeur à l'Université catholique de Louvain

---

1. *Problème à résoudre.* On rencontre fréquemment, dans les sciences d'observation, des séries d'équations de condition linéaires :

$$\begin{array}{l}
0 = m_{11} + a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + d_{11}u + f_{11}t + \cdots \\
0 = m_{12} + a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z + d_{12}u + f_{12}t + \cdots \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
0 = m_{1s} + a_{1s}x + b_{1s}y + c_{1s}z + d_{1s}u + f_{1s}t + \cdots \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
0 = m_{1n} + a_{1n}x + b_{1n}y + c_{1n}z + d_{1n}u + f_{1n}t + \cdots
\end{array}$$

dont les seconds membres sont ou bien des séries indéfinies ou bien des séries limitées, mais contenant un assez grand nombre de termes.

Par suite de l'existence des erreurs d'observation, la détermination des inconnues comporte une certaine tolérance, dont on profite pour annuler le plus grand nombre possible des inconnues, et pour déterminer les autres de manière que tous les seconds membres des équations soient contenus dans un intervalle $(-\epsilon, +\epsilon)$ donné d'avance, eu égard au degré de précision auquel on vise.

C'est ce problème qu'a eu en vue Cauchy.

Il est à peine besoin de remarquer que, dans le cas où tous les termes m_{1s} sont contenus dans l'intervalle $(-\epsilon, +\epsilon)$ le problème peut être résolu immédiatement en annulant toutes les inconnues. Nous ne nous occuperons donc pas de ce cas particulier.

2. *Marche suivie avant Cauchy.* Avant Cauchy on commençait, dans chaque cas concret, par annuler toutes les inconnues sauf x. Puis on résolvait les équations de condition

$$0 = m_{1s} + a_{1s}x,$$

par la méthode de Tobie Mayer, ou par les moindres carrés, et on calculait les résidus, $m_{1s} + a_{1s}x$, correspondants.

Si tous ces résidus étaient contenus dans l'intervalle $(-\epsilon, +\epsilon)$ on arrêtait les calculs. Mais, dans le cas contraire, on les recommençait en ajoutant le terme $b_{1s}y$, et ainsi de suite.

Cette marche présente trois inconvénients :

1° Si elle ne réussit pas dans un concret donné, on ne peut en conclure que le problème soit impossible dans ce cas;

2° Si elle réussit, on ne peut en conclure qu'on ne pourrait résoudre le problème par une autre voie, au moyen d'un nombre moindre d'inconnues ;

3° Les calculs faits dans les essais successifs antérieurs à un essai couronné de succès, sont presqu'entièrement perdus.

3. *But de Cauchy.* Cauchy a imaginé une méthode dans laquelle les calculs afférents à un essai quelconque font partie intégrante de ceux qui constituent l'essai suivant, et dans laquelle, par conséquent, aucun calcul n'est jamais inutile.

Le troisième des inconvénients signalés plus haut est ainsi évité. Mais les deux autres subsistent toujours.

4. *Critique de la méthode de Cauchy.* La méthode de Cauchy fut publiée la première fois, en 1837, dans le tome II du JOURNAL DE LIOUVILLE, p. 193. Yvon Villarceau l'exposa avec plus de détails dans les ADDITIONS à la CONNAISSANCE DES TEMPS POUR 1852. Enfin, l'inventeur en fit l'objet d'une communication à l'Académie des Sciences, le 27 juin 1853 (COMPTES RENDUS, t. XXXVI, p. 1114).

Il faut croire qu'elle menaçait de détrôner, en France, la méthode des moindres carrés, puisque Bienaymé la critiqua à ce point de vue, dans la séance suivante de l'Académie des Sciences en 1853 (voir Comptes rendus, t. XXXVII, p. 5).

Il semble, d'après les réponses de Cauchy, que sa méthode a pour but principal de déterminer le nombre des inconnues qu'il convient de conserver dans les seconds membres des équations de condition ci-dessus, et fournit, pour les inconnues, des valeurs provisoires ou approchées qui doivent être corrigées ultérieurement par la méthode des moindres carrés.

Bienaymé fit remarquer avec raison que l'obligation de faire suivre les calculs de Cauchy de ceux des moindres carrés fait disparaître l'économie qui en constitue le but.

Il aurait pu ajouter que si l'application de la première méthode permet d'obtenir des résidus contenus dans un intervalle $(-\epsilon, +\epsilon)$, par exemple au moyen de quatre inconnues, les solutions des moindres carrés peuvent fort bien fournir des résidus sortant de cet intervalle, et obliger le calculateur à tout recommencer.

En réalité, la méthode de Cauchy ne peut inspirer confiance au delà de deux inconnues, nous l'avons montré dans une communication faite en 1901 à la Société scientifique de Bruxelles (t. XXV, 1re partie, p. 146).

Il y a cependant dans cette méthode un élément ignoré jusqu'ici, si nous ne nous trompons, et qui lui donne une grande valeur.

Elle peut être considérée comme un procédé de calcul applicable à n'importe quelle méthode de résolution des séries d'équations de condition.

Si on applique ce procédé à la méthode de Tobie Mayer, on obtient identiquement celle de Cauchy.

Mais si on l'applique aux moindres carrés, et si on arrête les calculs, par exemple à quatre inconnues, on obtient les solutions finales auxquelles on serait arrivé par l'application immédiate de la méthode des moindres carrés aux équations limitées à quatre inconnues.

Cette propriété, dont la démonstration fait l'objet de ce travail, permet non seulement de corriger le procédé de Cauchy de manière à le soustraire aux critiques de Bienaymé, et aux nôtres, mais d'en faire en outre une méthode qu'on peut suivre avantageusement dans un grand nombre d'applications pratiques de la méthode usuelle des moindres carrés.

5. *Tableau synoptique de la méthode de Cauchy.* Les deux exposés de Cauchy et celui d'Yvon Villarceau, peuvent être avantageusement remplacés, à notre avis, par le tableau synoptique ci-après, qui montre clairement le mécanisme du procédé.

Ce tableau est limité, pour fixer les idées, à quatre inconnues.

Les explications du contenu suivent le tableau.

NOTATIONS	CALCULS pour la première inconnue	CALCULS SUPPLÉMENTAIRES POUR		
		la 2e inconnue	la 3e inconnue	la 4e inconnue
$0=e_{1s}$	$0 = m_{1s} + a_{1s}x$	$+ b_{1s}y$	$+ c_{1s}z$	$+ d_{1s}u$
$0=E_{11}$	$0 = M_{11} + A_{11}x$	$+ B_{11}y$	$+ C_{11}z$	$+ D_{11}u$
	$x = -\frac{M_{11}}{A_{11}}$	$-\frac{B_{11}}{A_{11}}y$	$-\frac{C_{11}}{A_{11}}z$	$-\frac{D_{11}}{A_{11}}u$
$0=r_{1s}$	$0 = m_{1s} - a_{1s}\frac{M_{11}}{A_{11}}$	$+\left(b_{1s} - a_{1s}\frac{B_{11}}{A_{11}}\right)y$	$+\left(c_{1s} - a_{1s}\frac{C_{11}}{A_{11}}\right)z$	$+\left(d_{1s} - a_{1s}\frac{D_{11}}{A_{11}}\right)u$
$0=e_{2s}$	. . . .	$0 = m_{2s} + a_{2s}y$	$+ b_{2s}z$	$+ c_{2s}u$
$0=E_{21}$	. . . .	$0 = M_{21} + A_{21}y$	$+ B_{21}z$	$+ C_{21}u$
	. . . .	$y = -\frac{M_{21}}{A_{21}}$	$-\frac{B_{21}}{A_{21}}z$	$-\frac{C_{21}}{A_{21}}u$
$0=r_{2s}$	. . . .	$0 = m_{2s} - a_{2s}\frac{M_{21}}{A_{21}}$	$+\left(b_{2s} - a_{2s}\frac{B_{21}}{A_{21}}\right)z$	$+\left(c_{2s} - a_{2s}\frac{C_{21}}{A_{21}}\right)u$
$0=e_{3s}$	. . . .	. . . .	$0 = m_{3s} + a_{3s}z$	$+ b_{3s}u$
$0=E_{31}$	. . . .	. . . .	$0 = M_{31} + A_{31}z$	$+ B_{31}u$
	. . . .	. . . .	$z = -\frac{M_{31}}{A_{31}}$	$-\frac{B_{31}}{A_{31}}u$
$0=r_{3s}$	. . . .	. . . .	$0 = m_{3s} - a_{3s}\frac{M_{31}}{A_{31}}$	$+\left(b_{3s} - a_{3s}\frac{B_{31}}{A_{31}}\right)u$
$0=e_{4s}$	. . . .	. . . .	. . . .	$0 = m_{4s} + a_{4s}u$
$0=E_{41}$	. . . .	. . . .	. . . .	$0 = M_{41} + A_{41}u$
	. . . .	. . . .	. . . .	$u = -\frac{M_{41}}{A_{41}}$
$0=r_{4s}$	. . . .	. . . .	. . . .	$0 = m_{4s} - a_{4s}\frac{M_{41}}{A_{41}}$

La première ligne, $0 = e_{1s}$, est l'équation générale de la série donnée d'équations de condition. L'indice s y prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ... n.

La deuxième ligne, $0 = \mathrm{E}_{11}$, est la première des équations finales de la méthode à laquelle on applique le procédé de Cauchy.

Si cette méthode est celle de Tobie Mayer, on obtient le procédé exposé par Cauchy.

Nous supposerons dans la suite qu'on s'écarte de cette voie, et qu'on fasse usage de la méthode des moindres carrés.

On aura donc :

$$\mathrm{M}_{11} = [a_{1s}\, m_{1s}], \quad \mathrm{A}_{11} = [a_{1s}\, a_{1s}], \quad \mathrm{B}_{11} = [a_{1s}\, b_{1s}], \ldots$$

Les équations finales suivantes des moindres carrés ne sont pas utilisées dans les calculs. Mais nous en aurons besoin dans notre démonstration. Nous les désignerons respectivement par $0 = \mathrm{E}_{12}$, $0 = \mathrm{E}_{13}, \ldots$

On aura donc :

$$\mathrm{E}_{12} = [b_{1s}\, m_{1s}] + [b_{1s}\, a_{1s}]\, x + [b_{1s}\, b_{1s}]\, y + \ldots,$$

$$\mathrm{E}_{13} = [c_{1s}\, m_{1s}] + [c_{1s}\, a_{1s}]\, x + [c_{1s}\, b_{1s}]\, y + \ldots,$$

La troisième ligne du tableau provient de la résolution de la précédente par rapport à l'inconnue qui y occupe le premier rang.

En remplaçant cette inconnue, dans la première ligne, par sa valeur donnée par la troisième, on obtient la quatrième, $0 = r_{1s}$.

Cette quatrième ligne est reproduite avec d'autres notations pour former la ligne suivante. Elle est traitée ensuite comme l'a été la première, et ainsi de suite (*).

Dans la pratique, on commence par effectuer les calculs de la colonne intitulée : *Calculs pour la première inconnue.* La dernière ligne $0 = r_{1s}$ donne les résidus. Si ceux-ci sont contenus dans l'intervalle $(-\epsilon, +\epsilon)$, on arrête les calculs, et on adopte la valeur $x = -\dfrac{\mathrm{M}_{11}}{\mathrm{A}_{11}}$ trouvée pour x.

(*) Si l'on appliquait le tableau à la méthode de Tobie Mayer, on devrait former les équations $0 = e_{2s}$ en multipliant par — 1 les équations $0 = r_{1s}$ dans lesquelles la première inconnue aurait un coefficient négatif.

Dans le cas contraire, on effectue les calculs indiqués dans la colonne suivante, intitulée : *Calculs supplémentaires pour la deuxième inconnue.*

La dernière ligne $0 = r_{2s}$ donne les résidus. Si tous ces résidus sont contenus dans l'intervalle $(-\epsilon, +\epsilon)$, on arrête les calculs, et on adopte pour y et x les valeurs

$$x = -\frac{M_{11}}{A_{11}} - \frac{B_{11}}{A_{11}}\,y$$

$$y = -\frac{M_{21}}{A_{21}}$$

qui ont fourni les susdits résidus.

Dans le cas contraire, on passe à la colonne suivante, et ainsi de suite.

Le tableau montre donc clairement que les calculs appartenant à un essai quelconque font partie intégrante de ceux qui constituent l'essai suivant, et que, dès lors, le troisième des inconvénients signalés au n° 2 est évité par le procédé de Cauchy.

6. *Identité des résultats du procédé de Cauchy appliqué aux moindres carrés, et de la méthode usuelle des moindres carrés.*

Lemme. *Les solutions de la méthode des moindres carrés ne changent pas si, au lieu de l'appliquer à une série donnée d'équations de condition, on l'applique aux résultats de l'élimination d'une des inconnues entre les équations données et l'équation finale de même rang que cette inconnue.*

En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse des équations de condition

$$0 = e_{1s},$$

et de l'inconnue x.

Les résultats de l'élimination sont les équations $0 = r_{1s} = e_{2s}$, et les équations finales nouvelles sont :

$$0 = E_{21}, \qquad 0 = E_{22}, \qquad 0 = E_{23}.$$

Il s'agit de prouver que ce système d'équations, joint à l'équation $0 = \mathrm{E}_{11}$ qui a servi à éliminer x est équivalent au système final primitif

$$0 = \mathrm{E}_{11}, \qquad 0 = \mathrm{E}_{12}, \qquad 0 = \mathrm{E}_{13}, \qquad 0 = \mathrm{E}_{14}.$$

Considérons, à cet effet, par exemple, l'équation finale nouvelle $0 = \mathrm{E}_{23}$. On a

$$0 = \mathrm{E}_{23} = [m_{2s}c_{2s}] + [a_{2s}c_{2s}]y + [b_{2s}c_{2s}]z + [c_{2s}c_{2s}]u,$$

ou, en remplaçant m_{2s}, a_{2s}, b_{2s}, c_{2s} par leurs valeurs respectives

$$m_{1s} - a_{1s}\frac{\mathrm{M}_{11}}{\mathrm{A}_{11}}, \quad b_{1s} - a_{1s}\frac{\mathrm{B}_{11}}{\mathrm{A}_{11}}, \quad c_{1s} - a_{1s}\frac{\mathrm{A}_{11}}{\mathrm{C}_{11}}, \quad d_{1s} - a_{1s}\frac{\mathrm{D}_{11}}{\mathrm{A}_{11}},$$

prises dans la ligne $0 = r_{1s}$ du tableau synoptique

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{E}_{23} = & \qquad [m_{1s}d_{1s}] + [b_{1s}d_{1s}]y + [c_{1s}d_{1s}]z + [d_{1s}d_{1s}]u \\ & - \frac{\mathrm{D}_{11}}{\mathrm{A}_{11}}\left\{[m_{1s}a_{1s}] + [b_{1s}a_{1s}]y + [c_{1s}a_{1s}]z + [d_{1s}a_{1s}]u\right\} \\ & - \left\{\frac{[d_{1s}a_{1s}]}{\mathrm{A}_{11}} - \frac{\mathrm{D}_{11}[a_{1s}a_{1s}]}{\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{11}}\right\}\left\{\mathrm{M}_{11} + \mathrm{B}_{11}y + \mathrm{C}_{11}z + \mathrm{D}_{11}u\right\}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$[d_{1s}a_{1s}] = \mathrm{D}_{11}, \qquad [a_{1s}a_{1s}] = \mathrm{A}_{11}.$$

Par conséquent, le dernier terme du second membre se réduit à zéro.

On a d'autre part

$$[m_{1s}d_{1s}] + [b_{1s}d_{1s}]y + [c_{1s}d_{1s}]z + [d_{1s}d_{1s}]u = \mathrm{E}_{14} - \mathrm{A}_{14}x = \mathrm{E}_{14} - \mathrm{D}_{11}x$$

$$[m_{1s}a_{1s}] + [b_{1s}a_{1s}]y + [c_{1s}a_{1s}]z + [d_{1s}a_{1s}]u = \mathrm{E}_{11} - \mathrm{A}_{11}x;$$

d'où, en introduisant ces relations dans la valeur de E_{23},

$$0 = \mathrm{E}_{23} = \mathrm{E}_{14} - \frac{\mathrm{D}_{11}}{\mathrm{A}_{11}}\mathrm{E}_{11},$$

On trouverait de même

$$0 = E_{22} = E_{13} - \frac{C_{11}}{A_{11}} E_{11},$$

$$0 = E_{21} = E_{12} - \frac{B_{11}}{A_{11}} E_{11}.$$

Le système $0 = E_{11}$, $0 = E_{21}$, $0 = E_{22}$, $0 = E_{23}$ est donc équivalent au système :

$$\begin{aligned} 0 &= E_{11}, \\ 0 &= E_{12} - \frac{B_{11}}{A_{11}} E_{11}, \\ 0 &= E_{13} - \frac{C_{11}}{A_{11}} E_{11}, \\ 0 &= E_{14} - \frac{D_{11}}{A_{11}} E_{11}, \end{aligned}$$

et, par suite, au système final primitif

$$0 = E_{11}, \quad 0 = E_{12}, \quad 0 = E_{13}, \quad 0 = E_{14}.$$

En appliquant ce lemme au tableau synoptique, pris à rebours, on voit :

1° que le système

$$0 = E_{31},\ 0 = E_{41} \text{ équivaut à } 0 = E_{31},\ 0 = E_{32};$$

2° que le système $0 = E_{21}$, $0 = E_{31}$, $0 = E_{41}$ équivaut successivement à

$$0 = E_{21}, \quad 0 = E_{31}, \quad 0 = E_{32},$$
$$0 = E_{21}, \quad 0 = E_{22}, \quad 0 = E_{23},$$

3° que le système final $0 = E_{11}$, $0 = E_{21}$, $0 = E_{31}$, $0 = E_{41}$, du procédé de Cauchy appliqué aux moindres carrés, équivaut au système

$$0 = E_{11}, \quad 0 = E_{21}, \quad 0 = E_{22}, \quad 0 = E_{23},$$

et conséquemment au système final

$$0 = E_{11}, \quad 0 = E_{12}, \quad 0 = E_{13}, \quad 0 = E_{14}$$

de la méthode usuelle des moindres carrés.

7. *Conclusion.* Au lieu de se servir de la méthode de Cauchy comme préparation à l'application des moindres carrés, dans le cas où les seconds membres des équations de condition $0 = e_{1},$ sont des séries indéfinies ou limitées dont le nombre de termes doit être réduit autant que possible, il y a lieu de suivre la marche de la méthode de Cauchy, mais de l'appliquer aux moindres carrés, dès le début.

Rien n'empêche même de procéder d'une manière analogue dans les cas où les seconds membres des équations de condition renferment peu de termes, mais où l'on en supprimerait quand même quelques-uns si l'on rencontrait des séries de résidus compris dans un intervalle donné $(-\epsilon, +\epsilon)$.

Le procédé de Cauchy appliqué à la méthode des moindres carrés allonge les calculs de cette méthode, et ne peut par conséquent supplanter cette méthode d'une manière générale.

SUR LES

DÉPOTS FERRUGINEUX

DE FRANCHE-COMTÉ

PAR

M. BOURGEAT

Au 27 mai 1890, j'eus l'honneur d'adresser à l'Académie des Sciences de Paris, une note sur quelques dépôts ferrugineux des terrains secondaires. Me basant sur de nombreuses observations microscopiques, je faisais remarquer que ces dépôts, et spécialement ceux du Bajocien et du Lias tant de la Lorraine que de la Franche-Comté, se trouvent liés à des organismes inférieurs.

Deux ans après, Bleicher, de regrettée mémoire, confirmait ces observations et constatait, comme le dit M. de Lapparent, que les oolithes ferrugineuses du Lias lorrain « se composent d'un noyau minéral ou organique entouré de couches régulières d'une substance à la fois riche en silice et en matières organiques laissant reconnaître des formes de bâtonnets réguliers ».

Depuis cette époque, je n'ai cessé dans mes nombreuses excursions géologiques à travers la Franche-Comté, d'étudier les formations ferrugineuses qui s'y rencontrent.

C'est le résumé de ces observations que je voudrais donner aujourd'hui. J'examinerai : 1° quels sont les niveaux géologiques des couches à minerai; 2° quelle est la répartition géographique de chacune d'elles; 3° quels sont les principaux caractères qu'elles présentent; 4° quelles sont les explications probables sur l'origine du minerai.

I. — *Niveaux géologiques des assises ferrugineuses*

Les assises ferrugineuses de la Franche-Comté se montrent à quatre niveaux différents : 1° au sommet du Lias et à la base du Bajocien; 2° au Callovien; 3° au Néocomien; 4° au Tertiaire.

Ce sont surtout les couches du premier et du dernier niveau qui ont été l'objet d'une sérieuse exploitation.

Momentanément abandonnées à la suite des découvertes de gisements plus riches, elles reprendront sûrement dans l'avenir l'importance qu'elles ont eue dans le passé à mesure que les autres formations ferrugineuses s'épuiseront et que les transports deviendront moins coûteux.

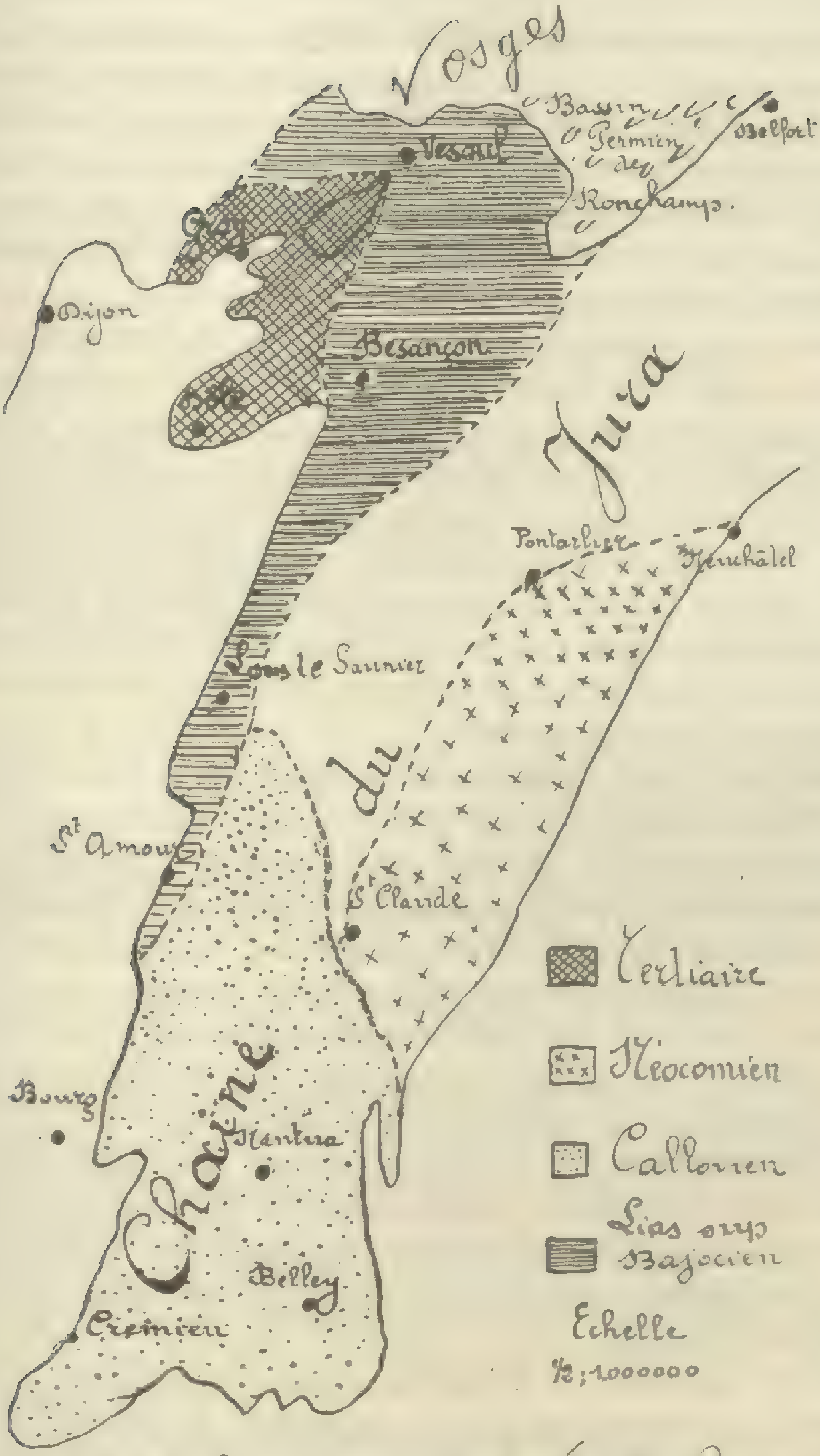
Celles du premier niveau sont datées par les fossiles qu'on y rencontre.

Pour certaines couches ce sont : les *Ammonites primordialis* et *aalensis* du Lias, comme on peut le constater aux environs de Salins, spécialement à la Roche pourrie. Pour les autres ce sont l'*Ammonites Murchisonae* avec des Lima ou d'autres bivalves qu'on est convenu de rapporter au Bajocien inférieur. C'est ce que l'on observe surtout à Ougney au voisinage du massif primitif de la Serre et dans une partie très notable de la Haute-Saône et du Doubs.

Celles du Callovien sont caractérisées surtout par la présence de l'*Ammonites anceps.* Quelques-unes cependant descendent au niveau de l'*Ammonites macrocephalus*, tandis que d'autres montent au niveau de l'*Ammonites athleta.*

Celles du Néocomien sont surtout de l'âge du *Pygurus rostratus*, qui s'y rencontre en abondance dans certaines localités, spécialement dans la vallée du Grandvaux et dans son prolongement du côté de Saint-Lupicin.

Les minerais du Tertiaire n'ont pas de fossiles caractéristiques et ont été souvent confondus avec les dépôts diluviens, mais leur âge peut être déterminé par les couches qui les supportent et par celles qui les surmontent dans la région bressanne. Elles semblent se placer, pour la plupart du moins, entre le niveau à Vivipara du Pliocène inférieur et le conglomérat de la Forêt de Chaux, qui est regardé comme contemporain des sables de Chagny, qu'on rapporte au Pliocène supérieur.


Vosges
Bassin Permien de Ronchamps
Belfort
Vesoul
Gray
Dijon
Besançon
Dôle
Jura
Pontarlier
Neuchâtel
Lons le Saunier
St Amour
St Claude
Chaîne du Jura
Bourg
Nantua
Belley
Crémieu
Tertiaire
Néocomien
Callovien
Lias ou Bajocien
Echelle
½;1000000

Dépôts ferrugineux de la Franche-Comté

II. — *Distribution géographique*

1° Les minerais de fer de la fin du Lias et du début du Jurassique proprement dit, semblent manquer, ou du moins n'avoir que peu d'importance, dans la région sud-est du Jura. Ils sont aussi très rares et très réduits sur la partie de la vallée de la Saône qui touche à la Côte-d'Or et à la Haute-Marne. Les principaux gisements qui ont été exploités jusqu'à ce jour sont ceux de Jussey, de Fleurey-les-Faverney, de Conflans et de Surucourt à l'ouest ou au nord de Vesoul dans la Haute-Saône, de Calmoutiers et de Noroy à l'est de la même ville dans le même département, de Rougemont, de Laissay dans le département du Doubs, d'Ougney, de Taxenne et de Monay dans le département du Jura. Mais ils ne sont pas les seuls. Le minerai est encore très visible en un grand nombre d'autres localités telles que celles d'Étrabonnes, de Gendrey, du Mont Guérin, de Rainans, près de Dôle; de Molamboz et de Montolier, près de Poligny; de Fangy et de Sellières, aux environs de Lons-le-Saunier; de Beaufort, sur le versant occidental du Jura auprès de Saint-Amour.

Lorsqu'on cherche à délimiter sur une carte la zone qui contient ces divers gisements, on voit qu'elle dessine une longue bande de terrains commençant au pied des Vosges et s'étendant vers le Plateau Central à peu près sur le prolongement du bassin permien de Ronchamp. Ce mode de répartition est d'autant plus intéressant à constater que le minerai de fer de Lorraine, qui est à peu près du même âge, se trouve compris entre Longwy et Nancy sur une bande de terrain qui prolongerait vers le sud-ouest le synclinal carbonifère et permien de Sarrebrück.

2° Les minerais de fer calloviens ont une répartition tout autre. Assez rares dans la Haute-Saône ils deviennent un peu plus communs dans le Doubs, mais ils ne se montrent réellement abondants que dans le sud-ouest de la chaîne du Jura entre Saint-Amour et Crémieu.

3° Les minerais du Néocomien sont presque exclusivement parqués dans les deux grands synclinaux de Neuchâtel par les Verrières, et de Mouthe par Saint-Laurent vers Saint-Lupicin. Si les autres synclinaux Néocomiens des feuilles de Pontarlier, d'Ornans, de Saint-Claude et de Nantua en contiennent encore quelques traces, ce n'est que d'une manière accessoire et à l'état sporadique.

4° Les minerais du Tertiaire sont surtout abondants dans la région de Gray et de Dôle sur la limite nord de la cuvette bressanne. Les quelques lambeaux que l'on trouve plus au sud n'ont qu'une importance secondaire.

Les principaux gisements de cet âge sont ceux d'Autrey, de Pesmes, de Marnay, de Gray, de Dampierre-sur-Salon, de Scey-sur-Saône, de Montbozon dans la Haute-Saône; du bois d'Arne, de Dampierre et de Foucherans dans le Jura.

III. — *Caractères que présentent les gisements*

1° Les gisements du Lias supérieur et du Jurassique inférieur ont pour premier caractère d'être formés principalement d'oolithes ferrugineuses à couches concentriques contenant un peu de silice et associées à une quantité plus ou moins grande de carbonate de chaux. L'analyse y révèle presque partout la composition suivante :

Oxyde de fer.	de 32 à 38	pour cent.
Silice	de 1 à 6	„
Chaux	de 6 à 25	„
Acide carbonique combiné	de 5 à 10	„
Eau	de 7 à 20	„

On sait combien les traces d'organismes s'y trouvent abondantes.

L'épaisseur de ces minerais est très variable. Ils forment moins des couches que des lentilles qui tantôt se renflent jusqu'à présenter 7 à 8 mètres d'épaisseur, tantôt s'amincissent jusqu'à se réduire à quelques décimètres.

Les couches qui les contiennent sont presque partout des marnes *gréseuses et micacées* parsemées d'*empreintes végétales* parmi lesquelles les plus abondantes sont celles des *Cancellophycus scoparius*.

Ces couches présentent donc un facies littoral ou tout au moins d'eaux peu profondes avec abondance de végétaux.

2° Les gisements du Callovien ne sont oolithiques que dans la partie méridionale du Jura. Ce n'est donc que dans cette région qu'ils rappellent les formations oolithiques précédentes. Ailleurs le minerai est comme à l'état de pâte imprégnant soit des marnes, soit le plus souvent des calcaires formés de débris d'encrines roulés.

Les couches sur lesquelles il repose sont manifestement des dépôts de faible profondeur. Tantôt en effet ces assises se terminent par des bancs d'huîtres ou des surfaces taraudées, tantôt par des couches à bryozoaires. Les fossiles que l'on trouve dans le minerai sont souvent roulés et couverts de serpules; mais je n'y ai vu jusqu'ici aucune trace de plantes.

3° Les gisements du Néocomien ne sont aussi franchement oolithiques que dans la région de Mouthe et de Nozeroy; comme on l'observe à Métabief et à Molpré. A mesure que l'on s'éloigne de ces localités le minerai passe également à l'état d'enduit. Parfois même il n'imprègne qu'une partie des assises et forme des sortes de taches ou de bavures sur un fond plus clair de la roche.

Les couches qui le contiennent deviennent assez fréquemment gréseuses vers leur partie supérieure. Elles sont par place criblées de ramifications tortueuses qui font penser à des algues. C'est surtout où ces ramifications sont abondantes que la matière ferrugineuse est le plus répandue. Elle semble même monter et descendre avec elles. La faune est riche en Gastropodes et en Lamellibranches roulés. Tout indique encore que l'on est en présence d'un dépôt de faible profondeur.

4° Enfin les gisements du Tertiaire sont formés de grains sphéroïdaux de la grosseur d'un pois, à couches concentriques composées d'oxyde de fer hydraté et de calcaire plus ou moins siliceux. Le tout est plus ou moins noyé dans de l'argile riche en alumine, et associé à de la silice en grains ou en rognons.

Ils forment tantôt des poches dans les calcaires jurassiques, tantôt des couches plus ou moins lenticulaires au-dessus d'eux. Leur épaisseur est donc très variable, pouvant passer de 1 mètre, et même moins, à 8 ou 10 mètres et même plus, comme on l'a constaté surtout au village des Minerais près de Fraisans.

Il s'y rencontre assez souvent des nodules ferrugineux creux à l'intérieur desquels l'on trouve souvent de la silice en grains. Parfois les minerais sont mélangés de débris de fossiles du Jurassique ou du Lias; mais on n'y a pas trouvé jusqu'ici de fossiles marins en place.

IV. — *Mode probable de formation des minerais*

D'après ce que nous venons de voir les minerais des trois premiers groupes ont un caractère commun. Ce sont des dépôts effectués à une faible profondeur et dans la zone d'agitation des flots. Ceux de la première et de la troisième catégorie sont en relation avec des empreintes que l'on s'accorde à rattacher au règne végétal. Ceux de la seconde n'ont pas jusqu'ici présenté ce caractère; mais, si l'on en croit M. Riche qui les a sérieusement étudiés dans le Jura méridional, ils se seraient déposés à la suite d'une émersion d'une partie de la région et seraient des dépôts de retour de la mer.

Toute explication sur leur origine doit donc tenir compte de ces caractères et c'est ce qui rend peu probable la vieille théorie des éruptions geysériennes. Qu'il y eût eu des sources ferrugineuses et peut-être même des filons dans les régions où se rencontrent les minerais, la chose est assurément possible. Je la crois même très probable sur la zone géographique du premier niveau ferrugineux, qui fait suite, comme il a été dit, au bassin permien de Ronchamp; mais, que le minerai ait choisi pour sortir exactement l'époque où les formations ont affecté un facies littoral, c'est là un point qu'il est difficile d'admettre. N'est-il pas plus naturel de croire que les minerais sont arrivés à toutes les époques sur l'emplacement des anciens plis hercyniens, qu'ils se sont d'abord mélangés aux autres sédiments donnant lieu aux couleurs jaunes ou rouges du Permien, du Trias, du Lias inférieur, etc., et qu'ensuite, après l'émersion d'une partie du sol ils ont été repris par les eaux pluviales et entraînés dans la mer?

Ceux du sommet du Lias et du Bajocien inférieur aussi bien que ceux du Néocomien, qui dans leur structure oolithique présentent des traces d'organisation, auraient été en partie dissous par ces eaux, puis précipités à nouveau sous l'action des plantes et des autres organismes de rivage.

Ceux du Callovien auraient peut-être moins subi l'influence des organismes. Leur accumulation serait plutôt due à la dissolution subie par des calcaires qui les contenaient, durant toute la période d'émersion constatée avant leur dépôt. Par cette décalcification le fer se serait concentré à mesure que les calcaires se réduisaient, puis au retour de la mer, le tout se serait déposé plus ou moins mécaniquement ou plus ou moins chimiquement dans des anses tranquilles.

Quant aux minerais du Tertiaire ou de la quatrième catégorie, il semble difficile de contester qu'ils ne soient en grande partie le résidu d'un lessivage des terrains. Ils se rencontrent d'abord dans les régions de la Franche-Comté où les minerais du Lias et du Bajocien présentent les plus nombreux affleurements. Les gros grains qui les constituent sont manifestement des résidus de calcaires ferrugineux plus ou moins décalcifiés. L'argile qui les empâte apparaît aussi comme un reste de décalcification. La silice même qu'on y rencontre serait due à l'action de l'eau sur l'argile, laquelle action aurait isolé l'élément acide pour laisser une masse alumino-ferrugineuse plus ou moins voisine de la Beauxite.

Lorsqu'ils sont en poches, on les voit pénétrer dans les calcaires du Jurassique et se lier intimement à eux ; lorsqu'ils sont en couches, ils paraissent manifestement avoir pris cette disposition sous l'action de l'eau. Il ne me semble donc pas trop téméraire de penser que dans les environs de Gray et de Dôle, où ils se montrent surtout, les calcaires du Jurassique et du Crétacé furent traversés en tous sens par les eaux chargées d'acide carbonique.

Ces eaux décalcifiant les assises produisirent leur maximum d'effet dans les points où les fissures d'absorption leur fournissaient plus de facilité de pénétration. C'est ainsi que se formèrent en quelques endroits des poches profondes comme celles qu'on peut observer au couchant de Gray et dans les minerais du bois d'Arne près de Dôle. Ailleurs, où l'action fut moins grande, le minerai fut moins épais. Lorsqu'enfin les lacs du Tertiaire vinrent recouvrir la région, ils répartirent, partout où ils pénétrèrent, ce minerai en couches ou en lentilles.

En résumé, si les minerais de Franche-Comté sont d'origine interne, leur dépôt sous la forme de sédiments semble plutôt dû à l'action des eaux à une époque postérieure à leur venue. Ils seraient surtout le résultat d'un lessivage des couches ferrugineuses antérieurement déposées, et pour un certain nombre d'entre eux les eaux auraient été puissamment aidées par les organismes inférieurs.

NOUVELLE CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE DU GLACIAIRE

DANS LE JURA MÉRIDIONAL

PAR

M. BOURGEAT

Depuis la note que j'ai eu l'honneur du publier en 1897 sur le glaciaire du Jura dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, j'ai recueilli à ce sujet de nouvelles observations que je serais heureux de signaler en quelques mots.

Les unes ont été faites le long de la nouvelle ligne de tramway ouverte entre Lons-le-Saunier et Saint-Claude, les autres au sud-ouest de Saint-Claude du côté de Saint-Amour et d'Arinthod.

De Lons-le-Saunier à Saint-Claude.

Le long de la ligne du tramway, tout voyageur peut constater qu'à partir de Lons-le-Saunier on rencontre pour la première fois le glaciaire entre Nogna et Pont-de-Poitte à la descente de la cluse de la Doye vers Pont-de-Poitte. Là, près d'un vieux moulin actuellement en ruine, on peut voir à gauche de la voie un épais dépôt de blocs et d'argile sans stratification, dont le prolongement se perd dans une vallée de la crête de l'Eute que l'on vient de traverser. Comme la hauteur de l'Eute dans le voisinage est au maximum de 670 mètres, on en peut conclure qu'à l'époque des grands glaciers les crêtes de cette hauteur étaient couvertes de neige dans le Jura méridional et pouvaient même engendrer des glaciers.

Le glaciaire se retrouve ensuite de l'autre côté de l'Ain entre Pont-de-Poitte et Clairvaux, sur une grande largeur de terrain et à une altitude qui dépasse à peine de 40 mètres celle de la rivière. Comme il ne semble pas remanié, et qu'il forme une masse non stratifiée, on est autorisé à croire aussi qu'à aucune date depuis les grands glaciers, la rivière d'Ain n'a coulé à 40 mètres au-dessus du niveau actuel.

En arrivant en vue de Clairvaux, on entame une puissante moraine, de laquelle on a détaché de magnifiques blocs polis et striés de plusieurs mètres cubes de volume. Tous ces blocs sont constitués par du jurassique supérieur, et viennent manifestement des hauteurs qui dominent à l'est du côté de Haute-Cour et de Chatel de Joux. Ils se relient du reste au glaciaire épars sur les flancs de ces hauteurs par des traînées très visibles.

De Clairvaux à Moirans, la voie obliquant vers le sud longe en contrebas le prolongement des hauteurs dont il vient d'être question. A chaque débouché de vallée elle entame des nappes glaciaires, les plus puissantes par le sommet, les plus faibles jusqu'à leur fond et quelquefois même jusqu'à la roche en place. Comme celle-ci est formée des bancs compacts et épais du jurassique supérieur, dont l'inclinaison est celle même du sol, il est facile de voir sur leur surface mise à nu un polissage parfait dû à l'action des glaciers.

Au delà de Moirans, on coupe à Villars d'Héria une large vallée d'écoulement glaciaire. L'abondance et la puissance des moraines s'y accuse, comme dans toutes les régions morainiques du Haut Jura, par des bouquets d'arbres capricieusement répartis qui donnent à la vallée une physionomie assez pittoresque.

Plus loin, vers Saint-Claude, à la descente de Pratz, la ligne coupe juste à quelques mètres des maisons de *Champ-André* une nappe glaciaire au-dessous de laquelle on peut encore admirer le beau poli de la roche, avec des blocs striés que l'on a extraits de l'argile.

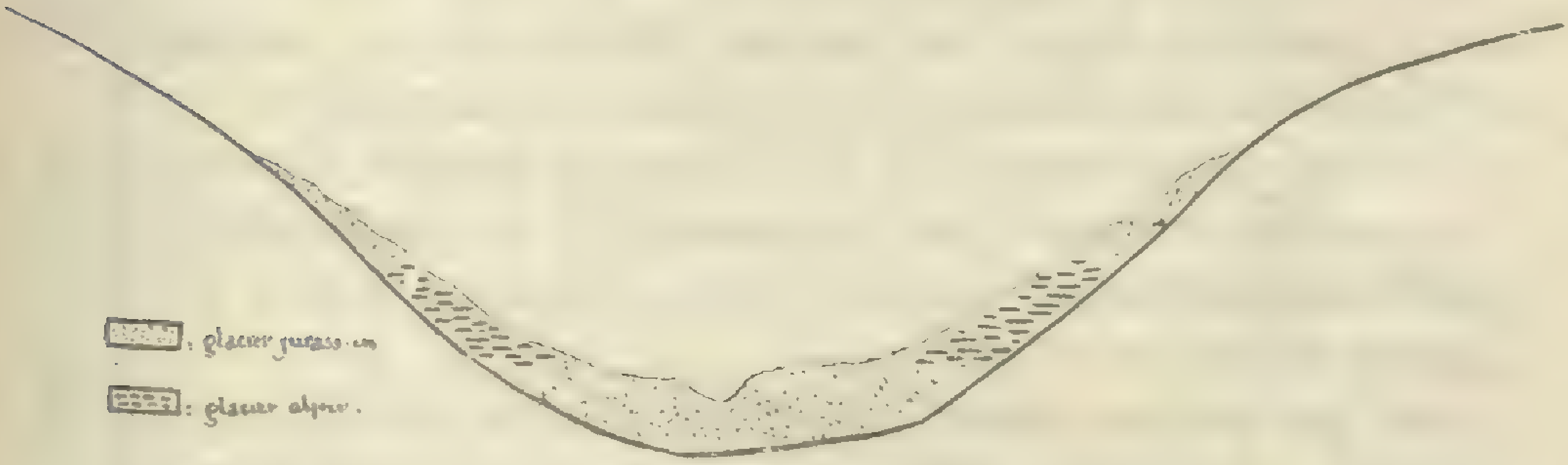
Si l'on s'arrête à la station de Saint-Lupicin, et qu'on se donne la peine d'observer le glaciaire qui s'étend sur le territoire avoisinant, on remarque

1° Que la grande vallée qui remonte au nord-est vers Ravilloles présente beaucoup de traînées glaciaires;

2° Que ces traînées sont plus nombreuses et plus épaisses du côté du nord-ouest que du côté du sud-est;

3° Que celles du nord-ouest ou du flanc droit de la vallée, s'étagent à un niveau plus élevé que celles du sud-est, ou du flanc gauche.

Une telle disposition s'explique en admettant que le glacier ne remplissait pas la vallée tout entière et qu'il avait une double pente : une dans le sens de la vallée, l'autre dans le sens perpendiculaire, de son flanc droit à son flanc gauche.



Coupe transversale d'une vallée jurassienne montrant les relations du glacier alpin et des glaciers jurassiens

Cette double inclinaison se comprend facilement car l'on constate que, tandis que le flanc gauche n'est dominé que par des hauteurs d'à peine 900 mètres, le flanc droit en présente qui dépassent 1000 mètres. En outre, sur le flanc droit, débouche l'importante cluse des Crozets qui apportait une masse de glace venue des Crozets, de Nanchez et des Piards et de Prénovel.

Environs de Saint-Amour et d'Arinthod.

Dans la région de Saint-Amour, j'ai trouvé quelques micaschistes et quelques quartzites alpins sur le territoire de Germagnat dans la vallée du Surand en amont de Simandre, où j'en avais précédemment signalés.

J'ai aussi remarqué la présence de sables et de galets d'origine jurassienne au petit hameau de Saint-Pierre, dans la même vallée du Surand et un peu plus haut que Germagnat.

Ces sables, qu'on exploite pour les constructions, sont assez mélangés d'argile et semblent être la moraine remaniée d'un ancien glacier venu des hauteurs si capricieusement découpées de Charnod.

Plus au sud-ouest, sur les territoires d'Aromas et de Céffia, dans une dépression de la crête qui sépare la vallée du Surand de celle de la Valouse, il se rencontre beaucoup de blocs erratiques alpins consistant en gneiss, micaschistes, quartzites, etc.

Comme cette dépression s'élargit en une vallée qui descend au sud vers l'Ain par Corvéiziat, on peut les suivre facilement dans cette direction. Ils y sont surtout abondants au voisinage des crêtes; mais les crêtes semblent en être dépourvues.

Plus à l'est de l'autre côté de l'arête qui domine la vallée de la Valouse, ces mêmes blocs se retrouvent en abondance sur les territoires de Chavagnaz et de Vosbles et jusqu'à Sancia à 25 kilomètres plus au nord-est.

On les observe encore lorsqu'on a passé la Valouse sur les territoires de Lavans, de Faverges, de Chemilla et de Saint-Hymetière, etc.

Peu abondants près du lit même de la Valouse, où ce sont des blocs jurassiens qui dominent, ils semblent augmenter de nombre jusqu'à la hauteur de 470 à 480 mètres à partir de laquelle les blocs erratiques jurassiens se présentent presque seuls.

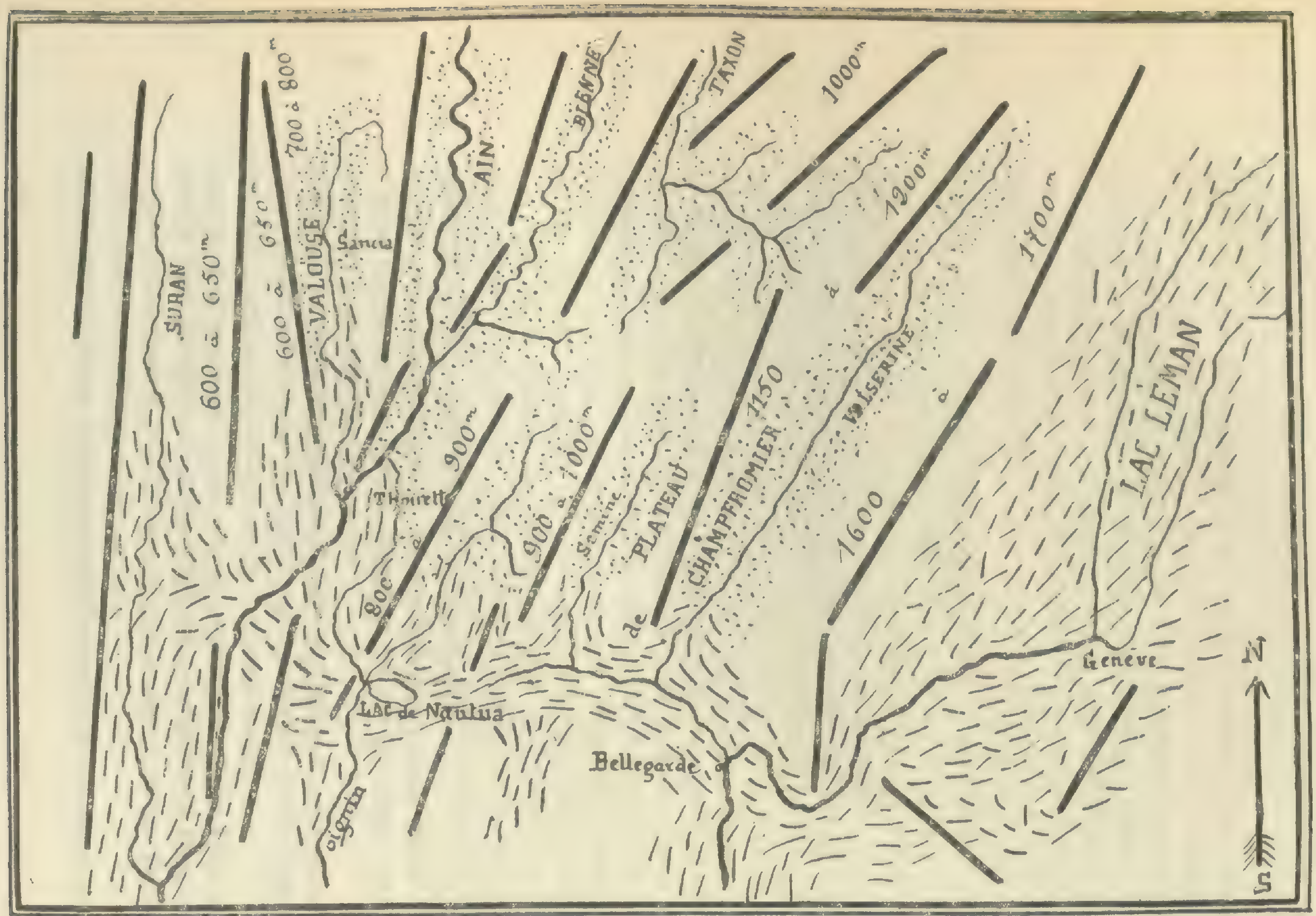
De ces faits, il me semble légitime de conclure encore :

1° Que, puisqu'il y a du glaciaire alpin dans la vallée de la Valouse jusque vers Sancia, les glaciers alpins remontaient cette vallée jusqu'au même point;

2° Que, puisque le glaciaire n'atteint à Sancia que 400 mètres d'altitude, alors que plus au sud, dans la direction où la Valouse s'écoule, il se montre à 470 et même à 480 mètres, le glacier alpin avait une pente superficielle, opposée à celle du fond de la vallée. Il coulait donc en contrepente remontant la vallée de la Valouse;

3° Que, puisque vers le lit de la rivière il n'y a guère que des blocs jurassiens, la branche glaciaire alpine y était venue recouvrir un glacier jurassien déjà formé;

4° Que, puisqu'enfin vers les sommets qui dépassent 500 mètres,


SURAN
600 à 650m
600 à 650m
700 à 800m
VALOUSE
Sanciat
AIN
BIENNE
TAXON
1000m
1200m
1700m
Thoirette
900m
800 à 900m
900 à 1000m
Semine
PLATEAU de CHAMPFROMIER
1150 à 1200m
VALSERINE
1600 à 1700m
LAC LEMAN
Genève
LAC de Nantua
Bellegarde
oignin
N
S

Relation des glaciers jurassiens et du glacier alpin au nord de la cluse Nantua Bellegarde

▤ : glacier alpin

Crêtes

▨ : glaciers jurassiens ; ——— Les chiffres indiquent les hauteurs des crêtes on ne voit plus guère que du glaciaire jurassien, il s'écoulait sur la nappe alpine des glaciers locaux.

En résumé donc, à l'époque de la grande extension des glaciers dans le Jura, les glaciers alpins remontaient en certains points les vallées en contrepente, ayant en dessous d'eux des nappes glaciaires jurassiennes et au-dessus des affluents locaux.

Ces derniers, coulant à l'opposé de la grande masse alpine, l'empêchaient d'autant plus facilement de remonter les vallées du Jura, qu'ils étaient plus puissants.

Ainsi s'expliquerait que le glaciaire alpin soit moins étendu dans la vallée de la Valserine, qui est plus proche des Alpes, que dans celle de la Valouse, qui en est plus éloignée.

LOCALISATIONS NUCLÉAIRES DE LA MOELLE ÉPINIÈRE

PAR

le Docteur D. DE BUCK

La substance grise de la moelle allongée a une structure franchement nucléaire et l'on connaît aujourd'hui relativement bien la disposition morphologique des noyaux III à XII. Ces noyaux sont d'ailleurs nettement en rapport avec les paires nerveuses respectives. La localisation se fait donc ici en rapport avec les nerfs, c'est une localisation *nerveuse.* Toutefois les noyaux des nerfs craniens ne forment pas un bloc uniforme, mais se subdivisent souvent en une série de groupements plus petits. On en décrit par exemple de cinq à huit pour le noyau du nerf III, quatre pour le noyau du nerf VII, et, quand on examine les figures représentant des coupes de ces groupements, on croit y reconnaître encore divers sous-groupements. L'on n'est cependant pas parvenu jusqu'ici à donner à ces divers groupements et sous-groupements une signification fonctionnelle déterminée et l'on ne saurait dire notamment à ce moment si la localisation nerveuse des noyaux craniens comporte une sous-localisation propre à chaque muscle innervé par le nerf.

La distribution de la substance grise sous forme de noyaux, qui est si nette dans le mésencéphale, se retrouve également au niveau de la moelle épinière. Même les noyaux y sont distribués d'une façon moins diffuse, plus régulière, en formant par leur superposition de véritables *colonnes* cellulaires. C'est le nombre et la disposition des colonnes motrices qui règle la conformation si variable de la corne antérieure de la moelle avec ses deux forts

---

(*) Communication faite à la IVe Section de la *Société scientifique,* session tenue à Bruxelles, le 9 avril 1902.

renflements au niveau de l'origine des racines nerveuses destinées aux membres supérieurs et inférieurs.

On s'est évertué, dans ces tout derniers temps, à pénétrer la signification morphologique et physiologique de ces groupements de cellules motrices, en d'autres termes on a tâché de fixer les localisations motrices dans la moelle épinière, tout comme on a cherché à localiser les diverses fonctions cérébrales. On s'est adressé à cet effet à l'anatomie comparée, à l'anatomie pathologique et surtout encore à l'expérimentation par l'excellente méthode de la réaction à distance de Nissl.

Nous ne nous étendrons pas ici sur le côté historique de cette question, qui se trouve exposé avec tous les détails dans les travaux relatifs aux localisations motrices médullaires de Sano (*), de Van Gehuchten et De Neef (**) et de De Neef (***).

Le but de ce travail est de faire une *mise au point* de l'état actuel de la question des localisations motrices médullaires.

Et d'abord quand on considère les diverses colonnes cellulaires qu'on rencontre dans toute la hauteur de la moelle, on peut réduire leur nombre à six, tout en admettant que ces colonnes peuvent se subdiviser en sous-groupements et qu'elles ne sont pas toutes également présentes dans une même coupe, c'est-à-dire à un même niveau de la moelle. On peut les dénommer d'après leur siège : médiane, antérieure, antéro-externe, antéro-latérale ou externe ou intermédiaire, postéro-latérale (y compris le groupement post-postéro-latéral) et centrale.

Nous faisons abstraction de la colonne de petites cellules située à la corne externe de la substance grise antérieure, la colonne intermédio-latérale, dont la signification est loin d'être élucidée.

Les colonnes médiane et antéro-externe existent sur presque toute la hauteur de la moelle, tandis que les colonnes centrale, antéro-latérale et postéro-latérale ne sont présentes qu'au niveau des renflements cervical et lombo-sacré.

(*) Sano, J. — *Les localisations des fonctions motrices de la moelle épinière.* Anvers, 1898.

(**) A. Van Gehuchten et C. De Neef. — *Les noyaux moteurs de la moelle lombo-sacrée chez l'homme.* Le Névraxe, vol. I, fasc. II, 1900.

(***) C. De Neef. — *Recherches expérimentales sur les localisations motrices médullaires chez le chien et le lapin.* Le Névraxe, vol. II, fasc. I, 1901.

Quant à la signification physiologique de ces colonnes et des noyaux plus ou moins indépendants qui les composent, nous nous trouvons actuellement devant cinq grandes manières de voir ou théories opposées : la théorie *nerveuse,* la théorie *radiculaire,* la théorie *musculaire,* la théorie *segmentaire* et la théorie *fonctionnelle* ou *téléologique.*

La théorie *nerveuse,* d'abord défendue par Marinesco (*), Parhon et Popesco (**), semble aujourd'hui abandonnée par ses propres auteurs, qui se sont rabattus sur la théorie fonctionnelle, téléologique. Quand, en effet, l'on étudie la réaction à distance dans les cellules motrices de la corne antérieure après lésion d'un nerf déterminé, on est obligé de constater que cette réaction s'opère dans des cellules appartenant à des groupements nucléaires différents. L'origine des nerfs est donc multinucléaire.

Quant à la théorie *radiculaire,* elle n'est guère défendue que par Déjerine. Se basant sur le fait anatomo-pathologique que les lésions de la substance grise médullaire (cornes antérieures), comme dans les poliomyélites, la syringomyélie, l'hématomyélie, se traduisent généralement par des troubles moteurs (paralysie, atrophie) à distribution radiculaire, Déjerine arrive à la conclusion que la topographie des noyaux moteurs de la moelle doit être radiculaire.

“ En résumé, dit-il (***), rien ne prouve qu'il existe dans la moelle des localisations motrices segmentaires, ainsi que l'admettent Van Gehuchten et De Buck (iv). Il n'y a pas non plus une locali-

---

(*) Marinesco. — *Contribution à l'étude des localisations des noyaux moteurs dans la moelle épinière.* Revue Neurologique, 1898, p. 463.

(**) C. Parhon et C. Popesco. Roumanie médicale, 1899, n° 1 et n° 3.

Remarque : Dans un travail récent (Revue Neurologique, 1901, p. 578) *Marinesco* se défend d'avoir jamais admis la théorie nerveuse. Son but, prétend-il, quand il a continué ses recherches sur la topographie médullaire, a été “ de voir quelle est l'origine réelle des différents nerfs du membre antérieur et non pas celui de mettre en rapport les noyaux de la moelle épinière avec tel ou tel segment des membres ou encore avec tel ou tel autre muscle ou groupe musculaire ”.

(***) *Traité de séméiologie du système nerveux.* Paris, 1901, p. 793.

(iv) *Remarque.* Déjerine fait ici erreur. La théorie segmentaire n'a pas été mise en avant par Van Gehuchten et De Buck, mais bien par Van Gehuchten et Nelis, en s'appuyant *en partie* sur les recherches antérieures de chromolyse après mélectomie publiées par Van Gehuchten et De Buck.

sation diffuse (Marinesco), il n'y a pas davantage une localisation motrice pour chaque muscle du corps (Sano). Tout démontre, au contraire, ainsi que je viens de l'exposer, que dans la moelle la localisation motrice est une localisation *radiculaire*. En d'autres termes, les racines antérieures de la moelle épinière proviennent de noyaux étagés les uns au-dessus des autres dans toute la hauteur de l'axe gris antérieur, chaque noyau ne fournissant de fibres qu'à la racine correspondante. On verra plus loin qu'il en est de même pour les localisations de la sensibilité. „

Déjerine se refuse donc à reconnaître les résultats expérimentaux acquis au moyen de la méthode de Nissl de la réaction à distance, qui prouve d'une façon péremptoire qu'il ne peut être question d'une distribution des noyaux médullaires moteurs d'après un type radiculaire.

Le créateur et encore aujourd'hui le défenseur ardent de la topographie médullaire à base *musculaire* est notre confrère Sano, d'Anvers. D'après lui, chaque muscle aurait dans la moelle son noyau déterminé isolé. Conformément à cette idée, basée sur ses recherches personnelles et celles d'autres auteurs, recherches d'ordre expérimental, anatomo-pathologique ou ressortissant à l'anatomie comparée, Sano a dressé un schéma topographique des colonnes grises motrices de la moelle (fig. 1 et fig. 2).

La théorie *segmentaire* a été mise en avant par Van Gehuchten et Nelis et est encore défendue aujourd'hui par le savant professeur de Louvain et notamment par son distingué élève De Neef. D'après ces auteurs donc, c'est le principe métamérique qui présiderait à la topographie des noyaux médullaires moteurs. Et notamment pour le membre thoracique et abdominal il existerait une série de quatre groupements nucléaires ou colonnes verticales dont les cellules respectives ne seraient en rapport qu'avec les muscles d'un segment donné des membres en question, *quelle que soit la fonction physiologique de ces muscles* (main, avant-bras, bras, épaule).

Enfin la *théorie fonctionnelle, téléologique,* la dernière venue, est défendue par Marinesco et ses élèves Parhon, et Goldstein.

Les groupements correspondraient respectivement à une fonction musculaire (extension, flexion, rotation, abduction, adduction).

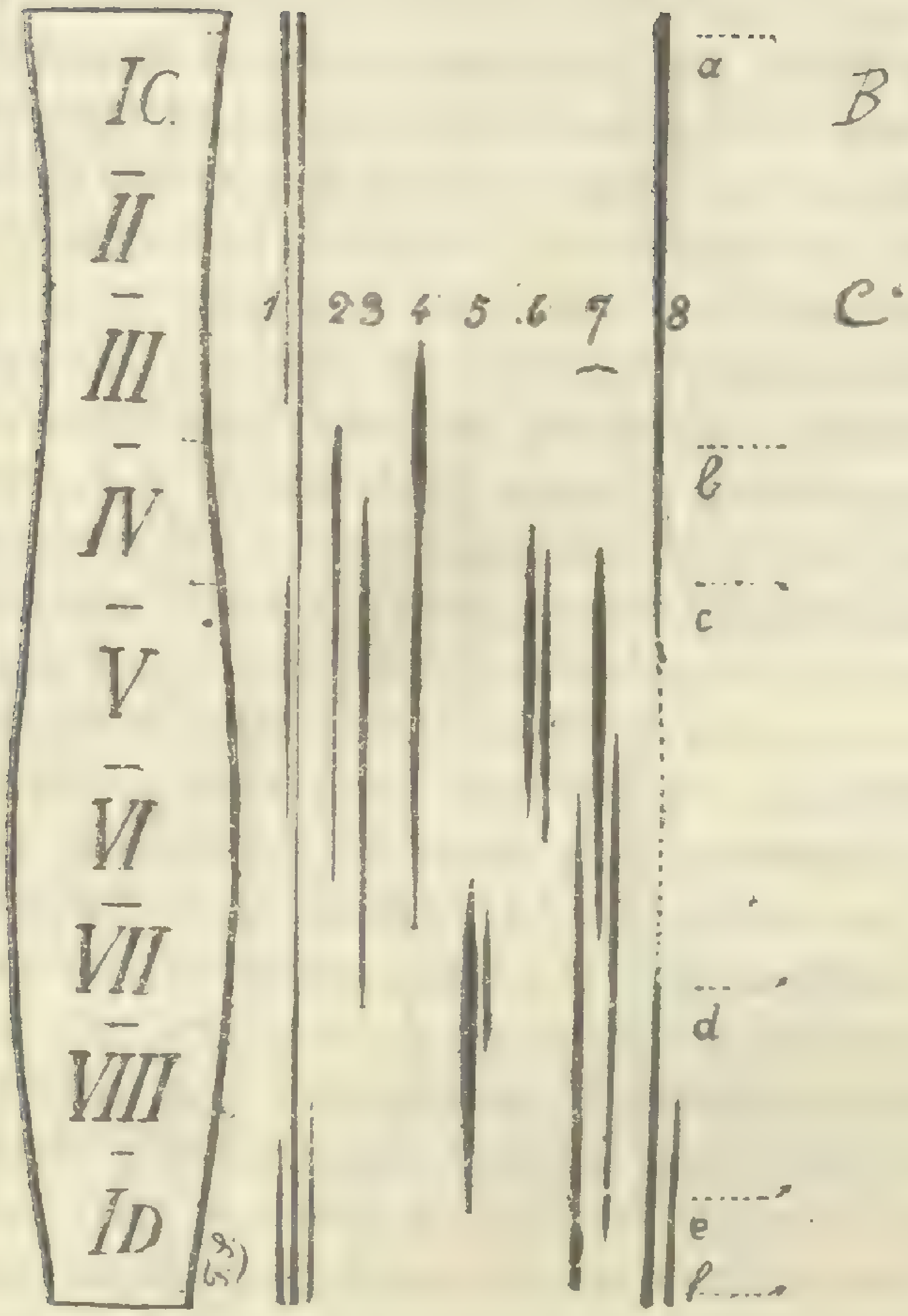


Fig. 1.

Columna medialis. — 1. *a*, courts rotateurs de la tête, m. sous-hyoïdiens. *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, extenseurs et rotateurs de la colonne vertébrale. — 2. Nucleus diaphragmae. — La série des noyaux sympathiques, composée de petites cellules, n'a pas été figurée. Elle se trouverait en arrière de la col. med. près du canalis centralis.

Columna intermedio-lateralis. — *a*, XIe paire, trapezius, sterno-cl.-m.; *b*, *c*, plexus cervical, trap. sterno-cl.-m.: *d*, *e*, trap. partie moyenne; *f*, trap. partie inf. — 8. *e*, début du nucl. latiss. dorsi.

Columna extremitatis superioris. — 3. pectorales. — 4. *b*, lev. scap.; *c*, serratus major. — 6. muscles de l'épaule. — 7. *c*, biceps; plus bas, supinateurs, extens. des doigts; entre *d* et *e*, fléchiss. et pronat., *e*, thenar et hypothenar; *f*, hypothenar. — 5. *d*, triceps; *e*, anconaeus.

Voici d'ailleurs comment Marinesco (*) exprime cette manière de voir : “ L'arrangement en groupes des cellules radiculaires et l'agencement de ces groupes entre eux, sont gouvernés par les lois qui ont été énoncées par Cajal pour certaines dispositions anatomiques des centres nerveux, lois qui cependant trouvent mieux ici leur application et qui sont : 1° la loi d'économie de temps; 2° la loi d'économie de matière, et 3° la loi d'économie d'espace, lois qui elles-mêmes relèvent, ainsi que je le pense, de la téléologie *mécanique* des centres nerveux. En effet, la concentration des cellules nerveuses en groupes permet à l'organisme de faire une économie considérable d'espace par le fait qu'un grand nombre de cellules ainsi réunies en groupes occupent un minimum d'espace possible, mais suffisant pour qu'elles puissent remplir leur fonction. D'autre part, la concentration des cellules en groupe permet à un nombre restreint de fibres pyramidales de se mettre, grâce aux collatérales, en rapport avec un grand nombre de cellules radiculaires disposées dans un ordre fonctionnel préétabli, qui assure un jeu régulier et harmonieux des différents groupes musculaires antagonistes. Il y a là sans doute une variation utile pour l'organisme et une variation de ce genre fixée par l'hérédité constitue une modification anatomique permanente qui nous explique l'existence des groupes dans la série phylogénique et ontogénique. C'est précisément en vertu de cette variation utile que l'organisme effectue une économie de protoplasma. „

Nous sommes donc encore en présence de trois théories différentes pour interpréter la topographie de la substance grise motrice de la moelle.

Voyons à présent quelles sont les bases scientifiques de ces théories et laquelle d'entre elles mérite le plus, à cette heure, notre confiance.

La théorie *musculaire* de Sano trouve une base dans le fait anatomique, aujourd'hui reconnu, que certains muscles ont un noyau bien isolé et spécial dans la substance grise de la moelle. C'est le cas pour le diaphragme (Sano, Kohnstamm, Marinesco). On connaît aussi les noyaux des pectoraux, du triceps brachial,

---

(*) G. Marinesco. *Recherches expérimentales sur les localisations motrices spinales.* Revue neurologique, 1901, p. 578.

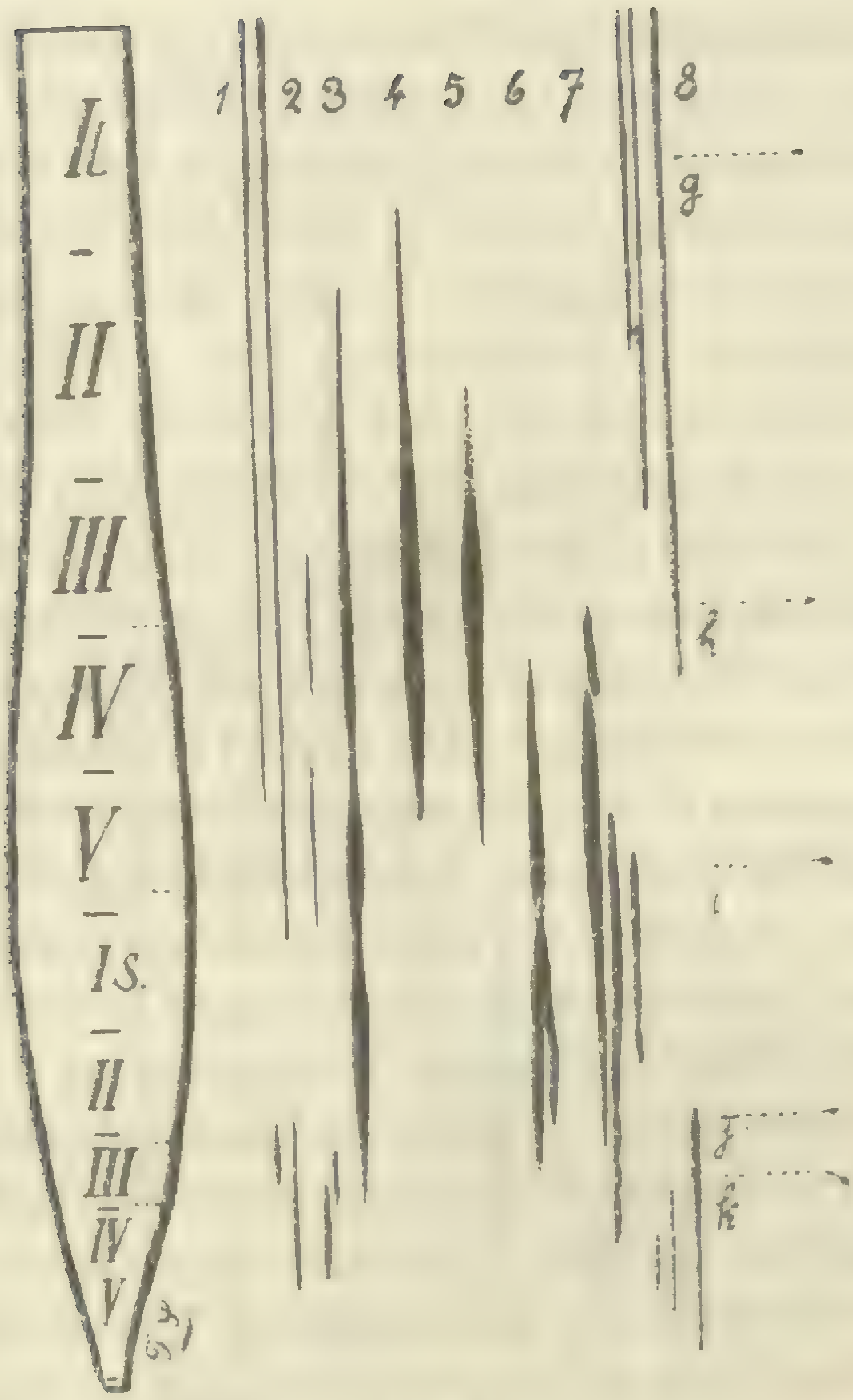


Fig. 2.

Columna medialis. — 1. *g*, *h*, *i*, extensores et rotatores spinae; *j*, *k*, ischio-coccygeus et lev. ani. — 2. *k*, sphincter vesic. en avant; sphincter ani, en arrière. — Il doit y avoir en outre des noyaux sympathiques viscéraux non figurés.

Columna intermedio-lateralis. — 8. *g*, muscles abdominaux; *h*, cremaster: *j*, *k*, muscles du périnée.

Columna extremitatis inferioris. — 2. *i*, pyramidalis. — 3. *h*, iliopsoas: *i*, glutaei; *j*, gemelli, pyriformis. — 4. quadriceps femoris. — 5. pectineus, adductores. — 6. *i*, fléchisseurs du genou; plus bas popliteus, triceps surae, *j*. — 7. *h*, tibialis anticus; *i*, extenseurs des orteils, péroniers; plus bas, tibialis posticus, fléchisseurs des orteils; *j*, *k*, muscles intrinsèques du pied.

mais il faut tout aussitôt faire remarquer que ces muscles exercent à eux seuls une fonction nettement déterminée, indépendante d'autres muscles.

La théorie *segmentaire* de Van Gehuchten et de ses élèves se base sur des recherches anatomo-pathologiques consécutives à des désarticulations du membre inférieur à des niveaux différents (pied, jambe, fesse) et sur des recherches expérimentales instituées sur le chien et le lapin à la suite de rupture des nerfs du membre thoracique et abdominal à des niveaux différents. Ces travaux sont par ordre de date ceux de Van Gehuchten et De Buck (*), Van Gehuchten et Nelis (**), Van Gehuchten et De Neef (***), De Neef (iv). Van Gehuchten et Nelis ont donc avancé la théorie segmentaire en se basant sur la chromolyse observée dans le noyau postéro-latéral primitif et le noyau postpostéro-latéral par Van Gehuchten et De Buck (v) après désarticulation au niveau du genou (2 cas) et après celle observée dans le seul noyau postpostéro-latéral par Van Gehuchten et Nelis (vi) après désarticulation du pied dans l'articulation du cou-de-pied.

Toutefois les altérations chromolytiques constatées par Van Gehuchten et De Neef (vii), après désarticulation du membre inférieur dans l'articulation coxo-fémorale, semblaient jusqu'à un certain degré en désaccord avec la théorie segmentaire formulée par Van Gehuchten et Nelis, en ce sens qu'ils trouvèrent en chromolyse 4 noyaux distincts (les noyaux 8, 7, 3 et 5), dont les *deux* derniers représenteraient les noyaux de la cuisse (fig. 3).

(*) Van Gehuchten et De Buck. *Contribution à l'étude des localisations des noyaux moteurs dans la moelle lombo-sacrée et de la vacuolisation des cellules nerveuses.* Revue Neurol., 1898, p. 510; *La chromolyse dans les cornes antérieures de la moelle après mélectomie au genou ; ses rapports avec les localisations médullaires.* Journ. de Neurologie, 1898, pp. 87 et 94.

(**) Van Gehuchten et Nelis. *La localisation motrice médullaire est une localisation segmentaire.* Journ. de Neurol., 1899, p. 301.

(***) Van Gehuchten et De Neef. *Les noyaux moteurs de la moelle lombo-sacrée chez l'homme.* Le Névraxe, vol. I, fasc. ii, p. 201.

(iv) De Neef, C. *Rech. expér. sur les localisations motrices médullaires chez le chien et le lapin.* Le Névraxe, vol. II, fasc. i.

(v) *Loc. cit.*

(vi) *Loc. cit.*

(vii) *Loc. cit.*

Malgré cela, les affirmations de De Neef, à la suite de ses recherches expérimentales sur le chien et le lapin, sont catégoriques : chaque segment de membre a un noyau isolé et déterminé dans les renflements respectifs de la moelle (fig. 4). Voici d'ailleurs les conclusions du travail expérimental de De Neef :

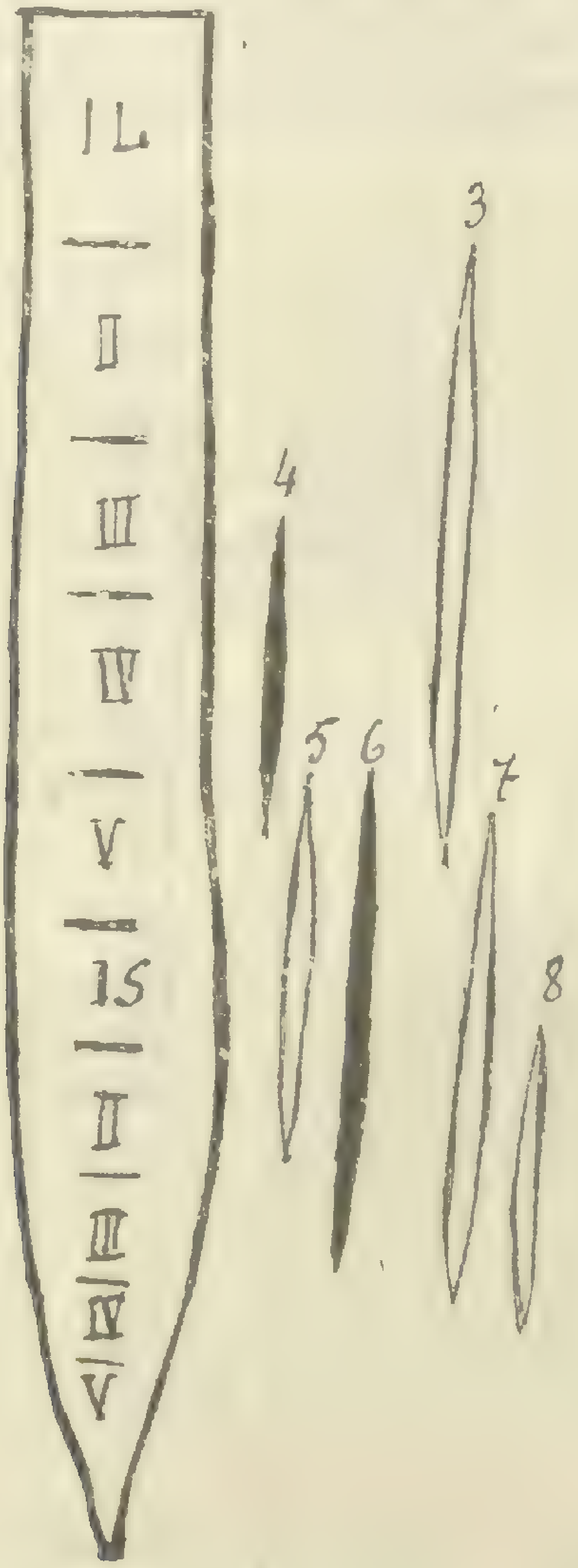


Fig. 3. — *Schema de Van Gehuchten et De Neef.*

Désarticulation de la cuisse. Noyaux 5, 3, 7 et 8 en chromolyse. Noyaux 4 et 6 indemnes.

1° La localisation motrice médullaire est une localisation segmentaire, conformément à l'opinion émise par Van Gehuchten et Nelis.

Tableau synoptique des colonnes cellulaires qui se trouvent normalement dans la moelle épinière du lapin. (D'après De Neef).

Tableau synoptique des colonnes cellulaires dans la moelle épinière du chien. (D'après De Neef).

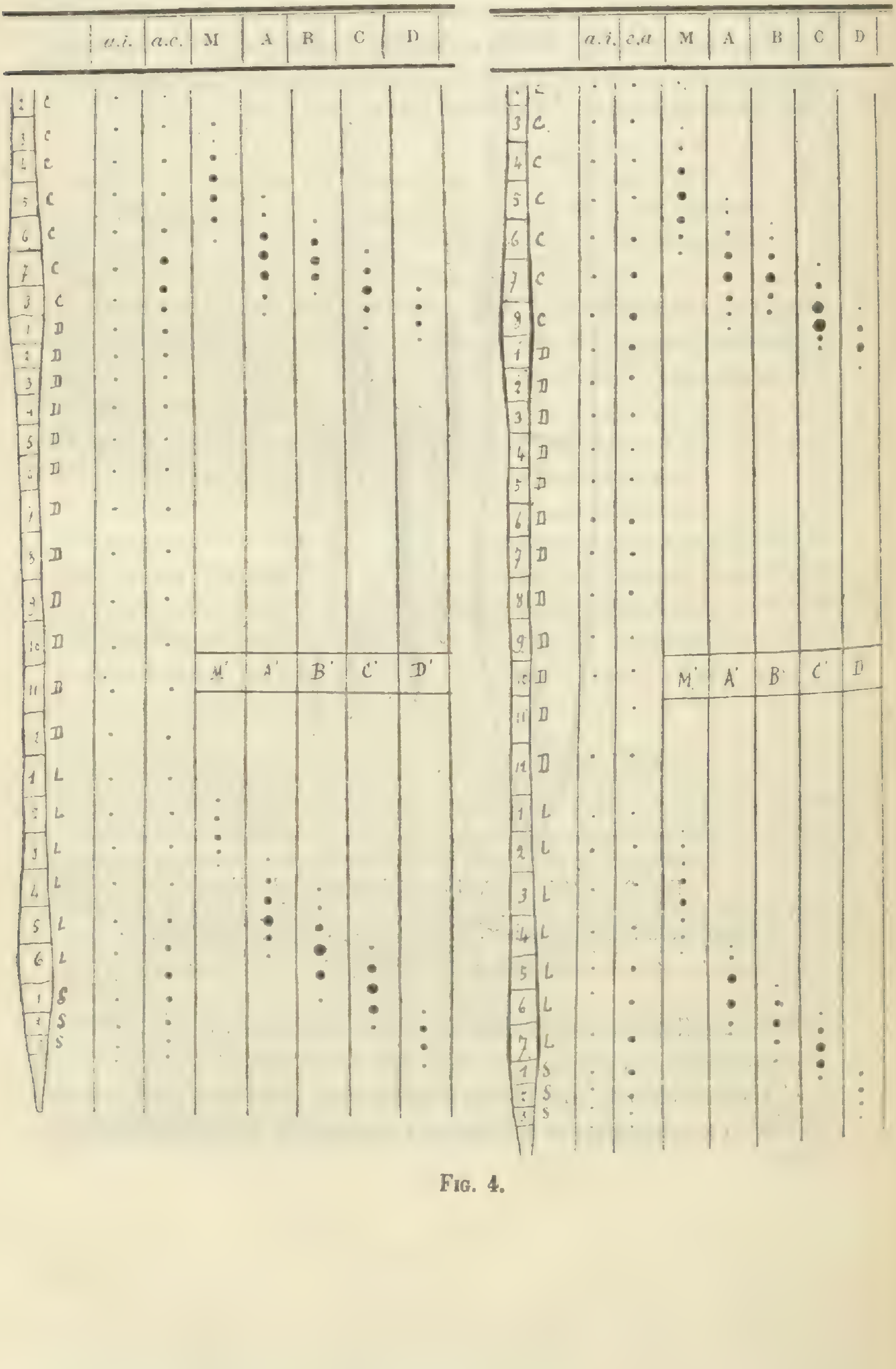


Fig. 4.

2° Il existe dans le *renflement supérieur* ou *cervico-dorsal*, chez le chien et chez le lapin, *quatre colonnes cellulaires* en connexion chacune avec un segment du membre thoracique, à savoir :

a) Une colonne cellulaire qui s'étend de la partie médiane du V^e^ segment cervical jusque vers la partie supérieure du I^er^ segment dorsal, dont les cellules sont probablement en connexion avec les muscles de l'*épaule.*

b) Une colonne cellulaire s'étendant de la partie la plus élevée du VI^e^ segment cervical jusque dans la partie supérieure du VIII^e^ segment cervical et qui forme le noyau d'origine des branches nerveuses innervant les muscles du *bras.*

c) Une colonne cellulaire allant de la partie proximale du VII^e^ segment cervical jusque dans la partie distale du I^er^ segment dorsal et qui constitue le noyau d'origine des nerfs innervant les muscles de l'*avant-bras.*

d) Une colonne située au niveau de VIII^e^ segment cervical et I^er^ segment dorsal et qui forme le noyau moteur des muscles de la *main.*

3° Il existe dans le *renflement inférieur* ou *lombo-sacré,* chez le chien et le lapin, quatre colonnes cellulaires en rapport chacune avec un segment du membre abdominal, à savoir :

a) Une colonne cellulaire qui s'étend, chez le chien, de la partie inférieure du III^e^ segment lombaire jusque dans la partie supérieure du VI^e^ et, chez le lapin, depuis le V^e^ jusque dans le VII^e^ segment lombaire. Les cylindraxes des cellules de cette colonne s'épanouissent probablement dans les muscles de la hanche.

b) Une colonne cellulaire qui, chez le chien, commence vers la partie médiane du IV^e^ segment lombaire pour se terminer à la partie supérieure du I^er^ segment sacré et qui diffère chez le lapin en ce qu'elle commence au niveau du VI^e^ segment lombaire.

Cette colonne constitue le noyau d'origine des branches nerveuses innervant les muscles de la cuisse.

c) Une colonne cellulaire commençant, chez le chien, au niveau du VI^e^ segment lombaire; chez le lapin, au niveau du VII^e^ segment lombaire et qui se poursuit jusque dans le II^e^ segment sacré. Cette colonne forme le noyau d'origine des nerfs innervant les muscles de la jambe.

d) Une colonne cellulaire s'étendant, chez le chien et chez le lapin, dans le domaine des IIe et IIIe segments sacrés et qui constitue le noyau moteur des muscles du pied.

La validité des conclusions de De Neef et de la théorie segmentaire absolue, formulée par ce dernier, est combattue par Marinesco (*) et surtout par Parhon et Goldstein (**), ses élèves, qui ont mis en avant la théorie *fonctionnelle, téléologique.*

Voici une série de faits anatomiques établis par les recherches expérimentales et anatomo-pathologiques de ces auteurs.

Ils distinguent dans les renflements cervical et lombo-sacré, quatre groupements nerveux ou colonnes grises (antéro-externe, central, intermédiaire et postéro-latéral). Ces groupements se subdivisent en noyaux (***) :

1° Les fibres qui forment le plexus brachial commencent à sortir de la moelle à la partie supérieure du IVe segment cervical et finissent à la partie supérieure du Ier segment dorsal.

2° Le noyau intermédiaire doit représenter dans le IVe segment cervical le centre des muscles sus- et sous-épineux.

3° Dans le Ve segment cervical le groupement central est le noyau du muscle grand pectoral. Le groupement intermédiaire dans ce même segment représente l'origine réelle du nerf circonflexe, tandis que les groupements de la partie postérieure de la corne y forment les centres des muscles de la région antérieure du bras (musculo-cutané) et le groupement antéro-externe l'origine réelle du grand dentelé.

4° Dans le VIIe segment le groupement central représente probablement le noyau du petit pectoral, le noyau antéro-externe, le noyau du grand dorsal et le groupement postérieur le noyau du triceps brachial.

5° Dans le VIIIe segment cervical, le groupement intermédiaire représente le noyau du triceps (radial). le groupement postéro-externe innerve les muscles de la région postérieure de l'avant-

---

(*) *Loc. cit.*

(**) Parhon et Goldstein. *Quelques nouvelles contributions à l'étude des localisations médullaires.* ANNALES DE LA SOC. BELGE DE NEUROLOGIE, 1902, n° 5, p. 121 et JOURN. DE NEUROL.; 1902.

(***) Les recherches de Marinesco, Parhon et Goldstein, ont surtout porté sur les groupements en rapport avec le membre thoracique.

bras et le court abducteur du pouce; le groupement postéro-interne innerve les muscles de la région antérieure de l'avant-bras; un peu plus bas, toujours dans le VIII^e^ segment, le groupement le plus postérieur et interne innerve les muscles de la main. Tous les petits groupements latéraux — sauf peut-être le plus antérieur — (avant-bras) innervent les muscles de la main. On voit que les muscles de la main sont représentés, dans la moelle, comme d'ailleurs ceux des autres segments, par plusieurs groupements cellulaires.

Ces faits ne cadrent donc nullement avec les données de la topographie segmentaire de De Neef, mais chaque segment aurait différents noyaux d'innervation appartenant même à plusieurs groupements. Ainsi le bras puiserait son innervation dans le groupement postéro-latéral et dans le groupement intermédiaire; l'avant-bras dans le groupement postéro-externe (extension) et postéro-interne (flexion); la main dans ces mêmes groupements postérieurs.

De même pour le membre inférieur. Le noyau post-postéro-latéral n'innerverait que les muscles plantaires du pied, tandis que le muscle pédieux tirerait son innervation de la partie inférieure du groupement postéro-latéral externe. La jambe aurait deux groupements de cellules distinctes, le groupement postéro-interne (flexion) et le groupement postéro-externe (extension); la cuisse tirerait son innervation du groupement externe ou intermédiaire et du groupement central. Quant à la fesse, voici ce que pensent Parhon et Goldstein(*) de son innervation: „ Sano, Van Gehuchten et De Buck, disent-ils, à la suite d'escarres fessiers, ont trouvé des cellules malades dans le groupement antéro-externe. Nous-mêmes avons trouvé des altérations dans le même groupement, à la suite de la résection du fessier moyen. C'est donc là que doit être localisée l'innervation des muscles de la hanche. „

Van Gehuchten et De Neef localisèrent également l'innervation de la hanche dans un groupement antéro-externe (groupe 6), allant de la partie supérieure du V^e^ segment lombaire jusqu'à la partie supérieure du III^e^ segment sacré (voy. fig. 3).

(*) *Loc. cit.*, p. 141.

Bruce (*) a récemment apporté quelque lumière dans la question de la topographie des colonnes cellulaires en rapport avec le membre abdominal par l'étude d'un double cas d'amputation : 1° au niveau du genou; 2° désarticulation de la cuisse avec résection d'une partie de la hanche, les muscles psoas-iliaque, pectiné, obturateur interne, pyriforme et jumeaux exceptés. Dans le premier cas il confirme l'innervation de la jambe et du pied telle que M. Van Gehuchten et moi nous l'avons les premiers décrite, mais, contrairement à notre manière de voir, Bruce fait remonter le groupement postérieur jusqu'au sommet du IIᵉ segment lombaire (fig. 5). Il place également le début de la colonne centrale un segment environ plus haut que ne le fait Van Gehuchten.

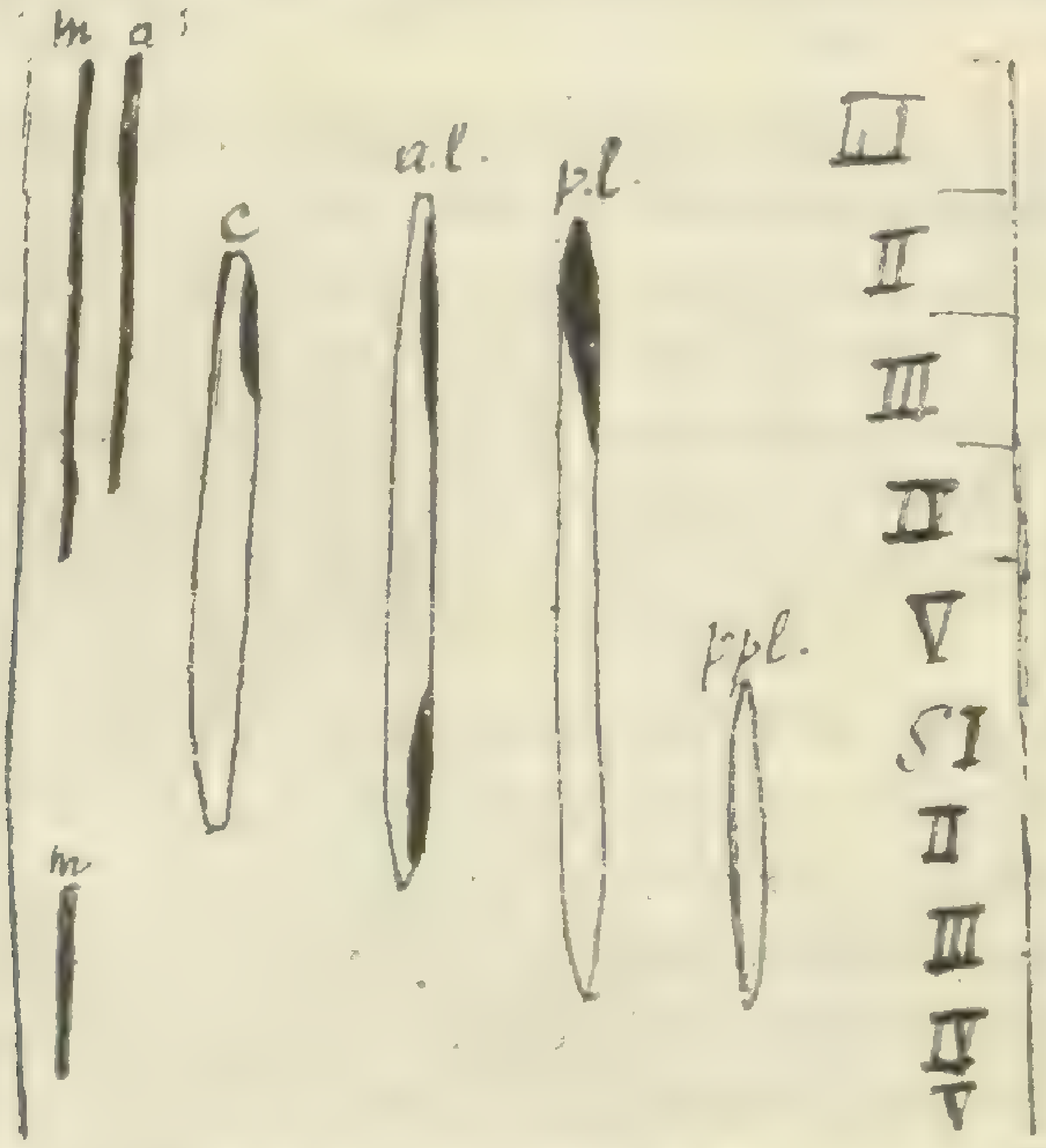


Fig. 5. — *Schéma de Bruce.*

Désarticulation de la cuisse et d'une partie de l'ilion.

Dans son second cas (fig. 5), Bruce trouva en chromolyse tout le groupement postéro-latéral, excepté quelques cellules du début : tout le groupement antéro-latéral, excepté quelques cellules en

---

(*) Bruce, A. *A contrib. to the localis. of the mot. nuclei of the spin. cord of man.* The Scott. med. and Surg. Journ., déc. 1901.

haut, en bas et en avant ; tout le groupement central, excepté quelques cellules au sommet.

Bruce croit pouvoir conclure de cette observation et de sa comparaison avec les résultats obtenus par Van Gehuchten et De Neef, que les cellules du début de la colonne postéro-latérale et antéro-latérale donnent naissance à l'innervation des psoas-iliaque et pectiné, tandis qu'à sa base (I^er^ et II^e^ segments sacrés) le groupement antéro-latéral innerve les rotateurs de la cuisse (y compris le grand fessier). La partie supérieure du groupement central (II^e^ et III^e^ segments lombaires) serait tout au plus en rapport avec l'obturateur externe.

J'ai moi-même fait, dans ces derniers temps, quelques recherches pour élucider l'importante question des localisations nucléaires du membre thoracique et abdominal dans la moelle épinière. Je me suis adressé à des lésions relativement circonscrites et j'ai examiné par la méthode de Nissl des coupes en série des renflements cervical et lombo-sacré de quatre moelles provenant de : 1° un cas de cancer inopérable du sein droit ayant détruit complètement le muscle grand pectoral et en partie le petit pectoral ; 2° trois cas de décubitus fessier à la suite de : *a*) compression de la moelle ; *b*) cachexie générale ; 3° un cas de gangrène entamant à gauche le pied dans son entier, à droite les orteils seulement.

Voici les résultats que nous avons obtenus. Dans le premier cas, où les pectoraux étaient seuls atteints, nous avons trouvé en chromolyse le groupement central depuis la partie inférieure du V^e^ segment cervical jusqu'à la partie inférieure du VII^e^ segment cervical. Ce fait confirme les vues de Sano (*), Parhon et Goldstein (**), Marinesco (***).

Sano constata l'altération de ce groupement à la suite de la section du nerf grand pectoral chez le chat et le pigeon.

Parhon et Goldstein et Marinesco virent survenir l'altération de ce même groupement à la suite de la résection du grand pectoral

---

(*) Sano, J. *Les localisations des fonctions motrices de la moelle épinière.* Anvers, 1898.

(**) Parhon et Goldstein. *Cercetari asupra localisalinei muschilor pectorali la one si la caine.* Roumanie médicale, sept. 1900.

(***) Marinesco. Revue neurologique, n° 12, 1901.

chez le chien et à la suite de la résection des muscles pectoraux pour envahissement par le cancer chez l'homme.

Notre observation est en désaccord avec les recherches de De Neef, qui place dans le groupement central depuis le Ve segment cervical jusqu'au Ier dorsal le noyau des muscles de l'épaule. Nous ferons toutefois remarquer que le groupement central était indemne dans les IVe et Ve segments cervicaux, où déjà, d'après Sano, Parhon et Goldstein, il appartiendrait aux muscles pectoraux.

Dans les cas de décubitus fessier, qui entamaient le muscle grand fessier, nous avons trouvé constamment des cellules en chromolyse dans la partie supérieure du groupement central, qui, d'après nous, va de la partie moyenne du IIIe segment lombaire jusqu'à la partie inférieure du IIe segment sacré.

On peut, avec Van Gehuchten, subdiviser la colonne centrale en deux groupements (4 et 5 de Van Gehuchten, voir fig. 3) le premier allant du IIIe segment lombaire au Ve de même nom, tandis que le second va du dernier au IIIe segment sacré exclusivement. Or c'est dans le groupe 4 de Van Gehuchten que dans le décubitus du grand fessier nous voyons constamment survenir la chromolyse. Ce fait est donc contraire à l'avis de Van Gehuchten, qui place dans ce noyau 4 le centre du releveur de l'anus ou diaphragme pelvien et qui y voit l'homologue du noyau d'innervation du diaphragme thoracique. Les vues de Van Gehuchten à propos de son noyau 4 furent aussi combattues par Bruce, qui de l'étude de son second cas croit pouvoir conclure que l'innervation du releveur anal part du groupe médian (mesial group) ou antéro-interne dans les IIIe et IVe segments sacrés, ensemble avec l'innervation des autres muscles du périnée.

D'après nos recherches, le *groupe 4 de Van Gehuchten est le noyau d'innervation du grand fessier.*

Dans un de nos trois cas de décubitus fessier celui-ci était très vaste, entamait les fessiers profonds en partie et s'étendait en bas à une partie des muscles fléchisseurs de la jambe. Dans ce cas notamment nous avons trouvé quelques rares cellules en chromolyse dans la partie inférieure du groupement central ou groupement 5 de Van Gehuchten (V L à 3 S) et dans le groupement antéro-latéral au même niveau (groupement 6 de Van Gehuchten, où celui-ci localise l'innervation de tous les muscles de la fesse). Il

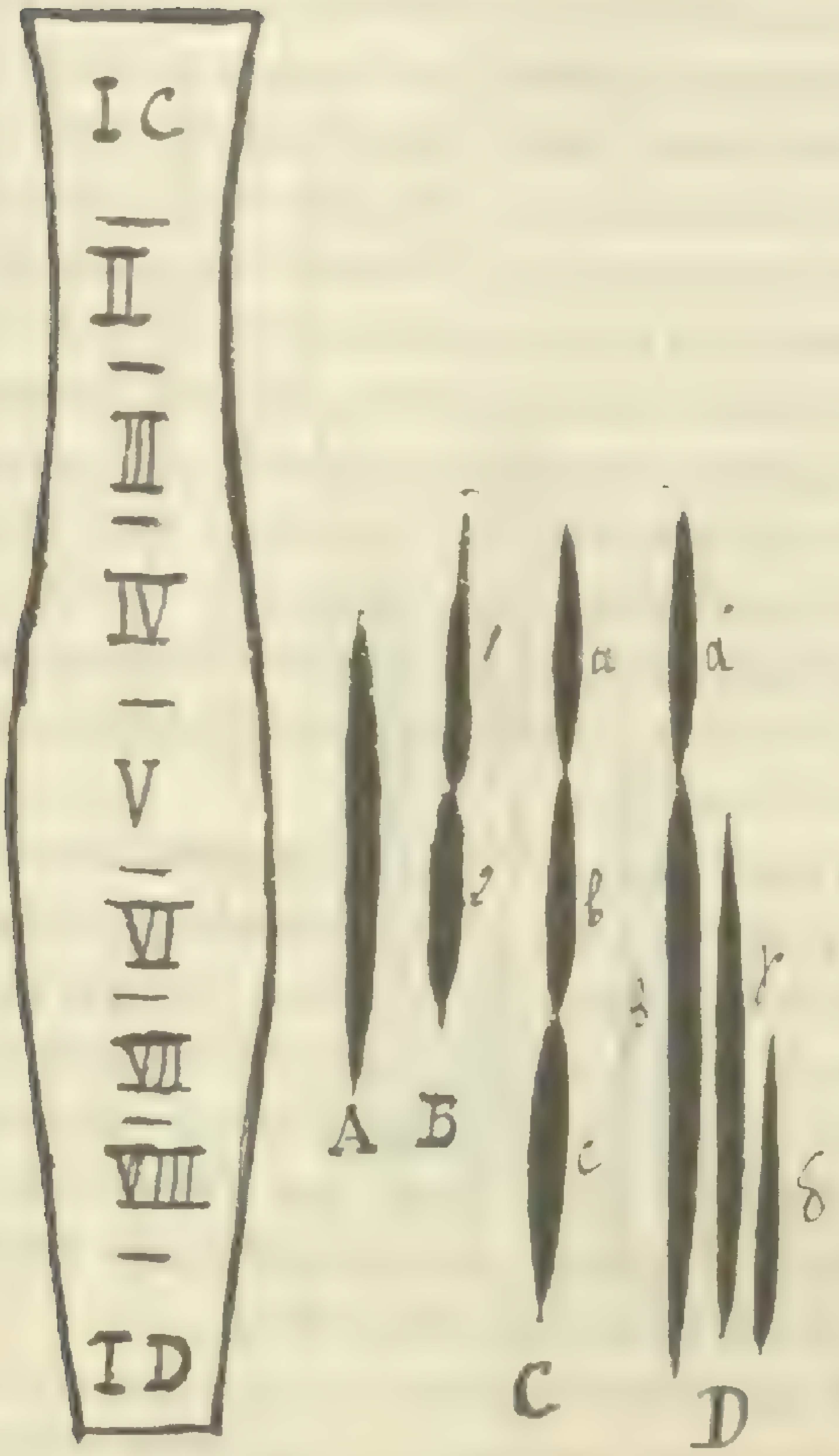

IC
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
ID
A
B
1
2
C
a
b
c
D
α
β
γ
δ

Fig. 6. — *Membre thoracique.*

A. Groupement central (pectoraux — adduction du bras).

B. „ antéro-externe
- 1 m. grand dentelé.
- 2 „ dorsal.

C. „ intermédiaire
- *a* n. sus-scapulaire.
- *b* n. axillaire.
- *c* m. triceps.

D. „ postéro-latéral
- α musc. ant. bras.
- β flexion avant-bras.
- γ extension „
- δ main.

est donc probable que, comme l'admet Bruce, le groupement V est en rapport avec les muscles fléchisseurs de la jambe. Cette donnée concorde aussi en partie avec le schéma de Sano (fig. 2), avec les recherches de Parhon et Goldstein, qui à la suite de la résection du biceps crural trouvèrent de la chromolyse dans le groupement central du noyau du sciatique, qui, disent-ils, paraît être la continuation du groupement central d'un niveau plus supérieur; mais ces mêmes auteurs, à la suite de la résection du demi-tendineux et du demi-membraneux, trouvèrent des lésions dans le groupement intermédiaire ou antéro-latéral. Mais comment comprendre dans ce cas que Van Gehuchten et De Neef ont trouvé ce même groupement intermédiaire (groupement 6, fig. 3), dépendant du sciatique, intact dans leur cas de désarticulation de la cuisse? Il semble donc plutôt que le groupe 6 est indépendant de la cuisse et appartient à la fesse.

Nous croyons pouvoir mettre en harmonie toutes les recherches faites jusqu'ici, y compris les nôtres, en admettant que le groupe 4 de Van Gehuchten et De Neef appartient au nerf petit sciatique ou fessier supérieur et au muscle grand fessier, que le groupe 5 de Van Gehuchten et De Neef appartient aux fléchisseurs de la cuisse et que leur groupe 6 appartient aux rotateurs et abducteurs proprement dits de la cuisse, c'est-à-dire aux fessiers moyen et inférieur, pyramidal, jumeaux, obturateurs.

Dans le cas de gangrène du pied nous avons trouvé des cellules en chromolyse dans le groupement post-postéro-latéral du noyau segmentaire du pied de Van Gehuchten et Nelis; mais également dans les groupements postéro-latéraux interne et externe (noyau segmentaire de la jambe de Van Gehuchten et Nelis). Ce fait semblerait prouver en faveur de la manière de voir de Marinesco. de Parhon et Goldstein, qui croient que le groupement post-postéro-latéral n'innerve que les muscles de la région plantaire du pied qui dépend du sciatique poplité interne, tandis que le groupe postéro-externe, destiné aux extenseurs du pied et des orteils, innerve le muscle pédieux. Mais dans ces cas de gangrène de cause générale les troubles trophiques sont trop diffus pour permettre une conclusion relativement à un point d'anatomie aussi délicat. Il faudra encore des recherches plus précises avant de pouvoir affirmer que la théorie segmentaire tombe à faux même pour le pied et la jambe.

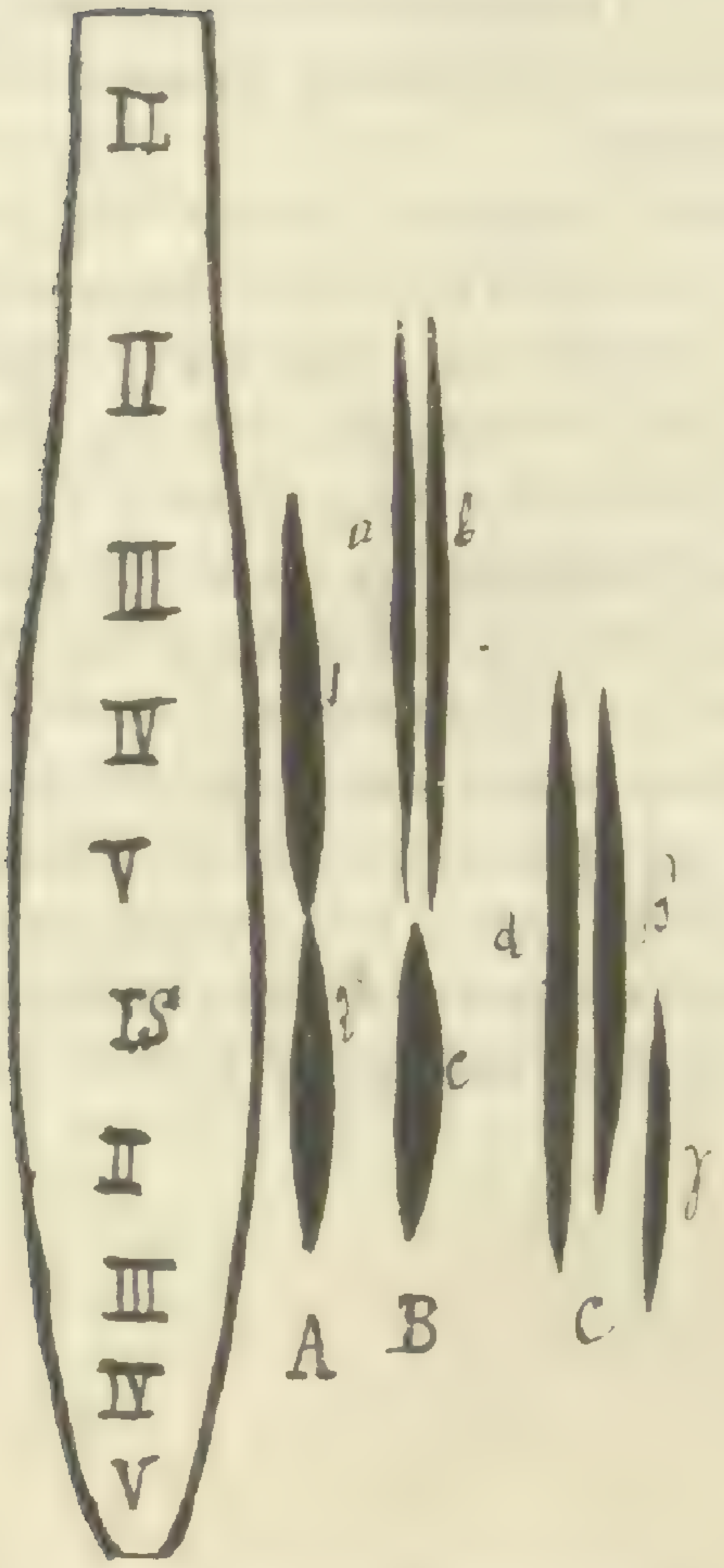


Fig. 7. — *Membre abdominal.*

A. Groupement central
- 1 n. pet. sciatique — m. grand fessier.
- 2 m. fléchisseurs rég. post. cuisse.

B. » antéro-externe et intermédiaire
- *a* cuisse extension (quadriceps)
- *b* cuisse (adducteurs)
- *c* fesse (rot. et adduction).

C. » postéro-latéral
- α post. lat. interne (jambe flexion)
- β » externe (jambe extension).
- γ post-postéro-lat. (pied flexion seule ?)

En tout cas elle semble ne plus pouvoir se maintenir pour les deux segments proximaux du membre thoracique et abdominal.

La théorie qui à l'heure actuelle explique le mieux les faits anatomiques connus est la théorie fonctionnelle, téléologique, de Marinesco et ses élèves.

L'innervation des membres thoracique et abdominal serait respectivement représentée par les schémas suivants (fig. 6 et fig. 7).

Tout en étant fondés sur une autre base, ces schémas se rapprochent très fort de ceux de Sano (fig. 1 et 2) conçus sur le type de la topographie musculaire. Il n'est pas impossible, comme le disent Parhon et Goldstein, qu'à mesure que nos connaissances avancent on n'aille pas plus loin dans la dissection de ces noyaux fonctionnels et que l'on n'y trouve un jour des sous-divisions pour chaque muscle entrant dans la composition du groupe fonctionnel. Plus on étudie les groupements, plus on y trouve de noyaux. Mais nous sommes toutefois encore loin d'avoir trouvé dans le groupement correspondant à la jambe dix-sept noyaux correspondant au nombre de muscles de ce segment (Van Gehuchten).

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/₀; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et* '**Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (**Émile**), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions**. *Exposé de la théorie des ensembles*. Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

—— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in 8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (**J.**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux*. Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière*. . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique,** réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ÉD. GUILLAUME et L. POINCARÉ. 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (**Jules**), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie)*. Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès*.
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (**E.**), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (**Ch.-Ed.**), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures** In-4° avec nombreuses figures ; 1902 . . . . 7 fr. 50

PELLAT (**H.**), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (**C.**), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à* 1793. Grand in 8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SIXIÈME ANNÉE, 1901-1902

QUATRIÈME FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1902

TABLE DES MATIÈRES

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PAGES
Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli, par M. P. Mansion 191
Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités, par **M. P. Mansion** 211
Étude comparée du rein (néphridie) chez les gastéropodes pulmonés et prosobranches, par le **R. P. A. Deschamps, S. J.** 215
Table des matières du tome XXVI 259

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

Adresse du secrétaire : **M. Paul Mansion**, 6, *quai des Dominicains, Gand.*

DÉMONSTRATION

DU

THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI

PAR

P. MANSION
Professeur à l'Université de Gand

THÉORÈME. *La somme* P *des valeurs de* $\mathrm{T}_m = \mathrm{C}_\mu^m p^m q^n$, *où* m *est compris entre* $\mu p - \mu l$, $\mu p + \mu l$, μ *étant égal à* $m + n$ *et au moins égal à dix*, p *et* q *des quantités positives telles que* $p + q = 1$, $p \geqq q$, l *inférieur ou égal à* $\frac{1}{2} q$, $\mu \geqq \frac{1}{q^2}$, *est supérieure à*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\, dt - \frac{3}{\sqrt{2\pi\,\mu p q}}, \qquad \mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

et a l'unité pour limite quand μ *croît indéfiniment* (*).

(*) Nous avons publié une esquisse de la présente démonstration dans les AKTEN DES FÜNFTEN INTERNATIONALEN KONGRESSES KATHOLISCHER GELEHRTEN ZU München von 24. bis 28. september 1900 (München, 1901, Herder und Co.) pp. 427 et 428. Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, Livre II, n° 16, pp. 275-284 de la troisième édition) donne des limites plus rapprochées que les nôtres, mais il n'a pas vraiment évalué les termes qu'il néglige. Il se contente de dire (p. 279) : « Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$ et des ordres supérieurs ». En réalité, ce n'est pas du tout facile.

1. *Formules analytiques employées dans la démonstration.* I. Si α est une quantité positive inférieure à l'unité, on a

$$(1)\qquad \log(1+\alpha) = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \cdots,$$

$$(2)\qquad -\log(1-\alpha) = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^4}{4} + \cdots,$$

On déduit de (1), (2),

$$(3)\qquad \log(1+\alpha) > \alpha - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha) > \frac{\alpha}{2},$$

$$(4)\qquad -\log(1-\alpha) < \alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Enfin, quel que soit α, θ étant compris entre 0 et 1,

$$(5)\qquad e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2} e^{-\theta\alpha} > 1 - \alpha.$$

II. Si N est un nombre entier, on a, d'après la formule de Stirling, sous sa forme élémentaire,

$$(6)\qquad 1.2.3\ldots N > \sqrt{2\pi N}\; N^{N} e^{-N},$$

$$(7)\qquad 1.2.3\ldots N < \sqrt{2\pi N}\; N^{N} e^{-N+\frac{1}{12N}}.$$

III. En faisant $t^2 = z$, on trouve aisément que

$$(8)\qquad \int_0^\infty e^{-t^2} t^4\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{z} z^{\frac{3}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

IV. Si z_x est une fonction de x décroissante depuis $x = 0$ jusque $x = N + 1$, N étant entier, on a évidemment

$$(9)\qquad z_0 + z_1 + \cdots + z_N > \int_0^{N+1} z_x\, dx.$$

V. Enfin, puisque $q \leqq \frac{1}{2}$, $\mu \geqq \frac{1}{q^2}$, $p \geqq q$, on a

$$(10) \qquad \mu q \geqq \frac{1}{q} \geqq 2, \qquad\qquad \mu p \geqq \mu q \geqq 2,$$

même sans supposer μ au moins égal à 10.

2. *On a*

$$\mathrm{T}_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left[1 - \frac{1}{6\mu\,pq}\right] t_m, \quad \text{si} \quad t_m = \left(\frac{m}{\mu p}\right)^{-m-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\mu q}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

En effet, d'après les inégalités (6) et (7),

$$\mathrm{C}_\mu^m = \frac{1.\,2.\,\cdots\,\mu}{1.\,2.\,\ldots\,m.\,1.\,2.\,\ldots\,n} > \frac{\sqrt{2\pi\,\mu}\;\mu^\mu\, e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi\,m}\;m^m\, e^{-m}\sqrt{2\pi\,n}\;n^n\, e^{-n}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}},$$

ou

$$\mathrm{C}_\mu^m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu}}\;\frac{1}{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu}{12mn}}}.$$

Par suite,

$$\mathrm{T}_m = \mathrm{C}_\mu^m p^m q^n > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\;\frac{1}{\left(\frac{m}{\mu p}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu q}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\;e^{-\frac{\mu}{12mn}}.$$

Mais, d'après (5), on a

$$e^{-\frac{\mu}{12mn}} > 1 - \frac{\mu}{12mn}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{T}_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left(1 - \frac{\mu}{12mn}\right) t_m.$$

Le produit mn des deux quantités m et n, dont la somme est la constante μ, est d'autant plus petit que $m - n$ ou $n - m$ est plus grand. La valeur la plus petite de mn correspondra donc à l'une ou l'autre des valeurs extrêmes que peuvent prendre m et n, savoir, au plus, $\mu p + \mu l$, $\mu p - \mu l$ pour m, $\mu q - \mu l$, $\mu q + \mu l$ pour n. Or

$$(\mu p + \mu l)(\mu q - \mu l) = \mu^2 [pq - (p - q) l - l^2],$$

$$(\mu p - \mu l)(\mu q + \mu l) = \mu^2 [pq + (p - q) l - l^2].$$

Le produit $12mn$ est donc égal ou supérieur à

$$12(\mu p + \mu l)(\mu q - \mu l) = 12\mu^2 (p + l)(q - l).$$

Le produit $12(p + l)(q - l)$ est aussi d'autant plus petit que la différence $p - q + 2l$ entre les deux facteurs $p + l$, $q - l$ est plus grande. Or, la plus grande valeur que puisse prendre l est $\frac{1}{2} q$. Par suite,

$$12(p + l)(q - l) \geqq 12\left(p + \frac{1}{2} q\right)\left(q - \frac{1}{2} q\right)$$
$$= 3(1 + p) q > 3.2p.q = 6pq.$$

On a donc

$$1 - \frac{\mu}{12mn} \geqq 1 - \frac{\mu}{12\mu^2 (p + l)(q - l)} > 1 - \frac{1}{6\mu pq},$$

et enfin

$$T_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu pq}}\left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right) t_m.$$

3. *On a* $t_{\mu p + 1} < t_{\mu p}$ *ou* 1. En effet, posons, en général,

$$t_m = e^{-u},$$

$$u = \left(m + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{m}{\mu p}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n}{\mu q}\right).$$

Si l'on fait

$$m = \mu p + x, \qquad n = \mu q - x,$$

on a

$$u = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right).$$

Pour $x = 1$, on trouve

$$u_1 = \left(\mu p + \frac{3}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{\mu p}\right) + \left(\mu q - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 - \frac{1}{\mu q}\right),$$

et, d'après les inégalités (3) et (4),

$$\begin{aligned} u_1 &> \left(\mu p + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{\mu p} - \frac{1}{2\mu^2 p^2}\right) - \left(\mu q - \frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{\mu q} + \frac{1}{2\mu^2 q^2 \left(1 - \frac{1}{\mu q}\right)}\right] \\ &= 1 + \frac{3}{2\mu p} - \frac{1}{2\mu p} - \frac{3}{4} \frac{1}{\mu^2 p^2} - 1 + \frac{1}{2\mu q} - \frac{1}{2(\mu q - 1)} + \frac{1}{4\mu q(\mu q - 1)} \\ &= \frac{1}{\mu p} - \frac{3}{4} \frac{1}{\mu^2 p^2} - \frac{1}{4\mu q(\mu q - 1)} \\ &= \frac{3}{4\mu p} \left(1 - \frac{1}{\mu p}\right) + \frac{1}{4\mu} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q(\mu q - 1)}\right]. \end{aligned}$$

D'après (10), μp est supérieur à 1, et $1 - \frac{1}{\mu p}$ est positif. On a aussi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q(\mu q - 1)} \geqq 0.$$

En effet, d'après (10) encore, $\mu q - 1$ est positif. La précédente inégalité peut donc s'écrire successivement

$$q(\mu q - 1) - p \geqq 0, \qquad \mu q^2 - p - q \geqq 0,$$

$$\mu q^2 \geqq 1,$$

ce qui est conforme à l'une des hypothèses de l'énoncé du théorème.

On a donc

$$u_1 > 0, \qquad e^{-u_1} < 1, \qquad \text{ou} \qquad t_{\mu p+1} < t_{\mu p}.$$

4. *La fonction $t_{\mu p+x}$ a un seul maximum, soit pour $x = 0$, soit pour une valeur comprise entre $x = 0$ et $x = p$.* De l'égalité

$$u = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right),$$

on déduit, par dérivation,

$$u' = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + x} - \frac{1}{\mu q - x}\right),$$

$$u'' = \frac{1}{\mu p + x}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu p + x}\right) + \frac{1}{\mu q - x}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu q - x}\right).$$

Si x est positif, même pour $x = \mu l$ et $l = \frac{1}{2}q$, $2(\mu q - x) = 2\mu q - \mu q = \mu q$ est égal ou supérieur à 2; donc u'' est une quantité positive. Si x est négatif, même pour sa valeur extrême, $x = -\mu l = -\frac{1}{2}\mu q$, $2(\mu p + x) = 2\mu p - \mu q$ est égal ou supérieur à μp, lui-même égal ou supérieur à 2 d'après (10); donc u'' est encore une quantité positive. Par suite, u' est une fonction croissante.

Si $p = q = 1$, pour $x = 0$, $u' = 0$; u', qui croît sans cesse, passe donc du négatif au positif pour $x = 0$; u a son minimum en $x = 0$, et $t_{\mu p} = e^{-u}$ a sa valeur maxima, savoir 1, aussi pour $x = 0$.

Si p est supérieur à q, on a, pour $x = 0$,

$$u' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p} - \frac{1}{\mu q}\right) < 0.$$

Pour $x = p$, on trouve après quelques transformations,

$$u' = \log\left(1 + \frac{1}{\mu q - p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + p} - \frac{1}{\mu q - p}\right).$$

Donc, d'après (3),

$$u' > \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu q - p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + p} - \frac{1}{\mu q - p}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu p + p} > 0.$$

Ainsi u' passe du négatif au positif, quand x varie de 0 à p; u a donc un minimum et $t_{\mu p + x} = e^{-u}$, un maximum pour une valeur X de x comprise entre 0 et p.

REMARQUE (*). *La valeur maxima de $t_{\mu p + x}$ est inférieure à $\sqrt{e}$, supérieure à 1, quand p est $> q$.* En effet, la valeur minima de u, correspondant à $x = \mathrm{X}$, s'obtiendrait en éliminant X entre les relations

$$u_{minima} = \left(\mu p + \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{\mathrm{X}}{\mu p}\right)$$
$$+ \left(\mu q - \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\mu q}\right),$$

$$u'_x = 0 = \log\left(1 + \frac{\mathrm{X}}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\mu q}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + \mathrm{X}} - \frac{1}{\mu q - \mathrm{X}}\right).$$

L'élimination complète est impraticable, mais en éliminant $\log\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\mu q}\right)$ entre les équations, il vient

$$u_{minima} = (\mu p + 1)\log\left(1 + \frac{\mathrm{X}}{\mu p}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\mu q - \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - \mathrm{X}} - \frac{1}{\mu p + \mathrm{X}}\right)$$
$$> -\frac{1}{2}\left(\mu q - \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - \mathrm{X}} - \frac{1}{\mu p + \mathrm{X}}\right).$$

(*) La démonstration du théorème de Bernoulli ne repose nullement sur cette remarque curieuse, mais, comme on le voit, assez difficile à démontrer.

Je dis que l'on a

$$\left(\mu q - X + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - X} - \frac{1}{\mu p + X}\right) < 1.$$

En effet, cette inégalité, après quelques transformations, devient

$$\mu p + 4\mu q X + 2X(1 - X) < 2\mu^2 q^2 + \mu q.$$

On a $\mu q^2 \geqq 1$, ou $\mu q^2 = 1 + \alpha$, α étant positif ou nul; $X < p$ a pour conséquence $4\mu q X < 4\mu p q < 4\mu . \frac{1}{4}$ ou μ, et, par suite, $4\mu q X = \mu - \beta$, β étant positif; $X(1 - X)$ est inférieure à $\frac{1}{4}$ ou de la forme $\frac{1}{4} - \gamma$, γ étant positif. L'inégalité à vérifier peut s'écrire

$$\mu p + \mu - \beta + \frac{1}{2} - 2\gamma < 2\mu(1 + \alpha) + \mu q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} < 2\mu q + 2\mu\alpha + \beta + 2\gamma.$$

Mais on a, d'après la formule (10), $\mu q \geqq 2$. Donc l'inégalité devient

$$\frac{1}{2} < 4 + 2\mu\alpha + \beta + 2\gamma,$$

laquelle est évidente.

Il en résulte que la valeur minima de u surpasse $-\frac{1}{2}$, la valeur maxima de $-u$ est inférieure à $\frac{1}{2}$, et, par suite, celle de $t_{\mu p + x}$ est inférieure à $\sqrt{e}$.

Dans le cas actuel où μ est $> q$, elle surpasse d'ailleurs $t_{\mu p}$ ou 1, puisque X n'est pas nul.

5. *Transformation de la somme des t_m et des* T_m. Si μp est entier, les valeurs de m à considérer dans $P = ST_m$ sont, $E(x)$ désignant le plus grand entier contenu dans x,

$$\mu p \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{matrix} \mu p + 1, & \mu p + 2, & \ldots, & \mu p + E(\mu l) \\ \mu p - 1, & \mu p - 2, & \ldots, & \mu p - E(\mu l) \end{matrix} \right\}.$$

Dans ce cas,

$$St_m = t_{\mu p} + \mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p + x} + t_{\mu p - x}] > \mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p + x} + t_{\mu p - x}].$$

Si μp n'est pas entier, il y aura entre μp et $\mu p + 1$ un seul entier r. On aura

$$t_r > t_{\mu p + 1},$$

puisque la fonction $t_{\mu p + x}$ a sa valeur minima, pour $x = 1$, dans l'intervalle de $x = 0$, à $x = 1$, d'après les nos 3 et 4.

On devra donc donner à m les valeurs

$$r \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{matrix} r + 1, & r + 2, & r + 3, & \text{etc.} \\ r - 1, & r - 2, & r - 3, & \text{etc.} \end{matrix} \right\}$$

comprises entre $\mu p - \mu l$, $\mu p + \mu l$.

La fonction t_m décroît de part et d'autre à partir de sa valeur maxima comprise entre $t_{\mu p}$ et $t_{\mu p + p}$; donc

$$\begin{matrix} t_{r-1} > t_{\mu p - 1}, & \qquad t_r \quad > t_{\mu p + 1}, \\ t_{r-2} > t_{\mu p - 2}, & \qquad t_{r+1} > t_{\mu p + 2}, \\ t_{r-3} > t_{\mu p - 3}, \text{ etc.} & \qquad t_{r+2} > t_{\mu p + 3}, \text{ etc.} \end{matrix}$$

Par suite, la somme de tous les t_m à considérer sera supérieure à

$$\mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p + x} + t_{\mu p - x}].$$

On a donc aussi

$$\begin{aligned} P &> \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\, St_m \\ &> \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p + x} + t_{\mu p - x}]. \end{aligned}$$

6. *Transformation de la dernière somme.* Posons

$$y_x^2 = t_{\mu p + x} \times t_{\mu p - x}.$$

La moyenne arithmétique de deux quantités est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique (*). On a donc

$$t_{\mu p + x} + t_{\mu p - x} \geqq 2y_x,$$

$$\mathrm{P} > \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right) \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \overset{x=\mathrm{E}(\mu l)}{\underset{x=1}{\mathrm{S}}} y_x.$$

Soit

$$y_x^2 = e^{-v},$$

de sorte que

$$v = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu p - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)$$
$$+ \left(\mu q + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right).$$

On trouve, en dérivant deux fois par rapport à x,

$$v' = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + x} - \frac{1}{\mu p - x}\right)$$
$$+ \log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu q + x} - \frac{1}{\mu q - x}\right);$$

$$v'' = \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu p - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu p + x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu p - x)^2}$$
$$+ \frac{1}{\mu q + x} + \frac{1}{\mu q - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu q + x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu q - x)^2}.$$

(*) Nous avons déjà fait connaître cette transformation dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1892, t. XVI, 1re partie, pp. 85-87, ou dans nos *Mélanges mathématiques* (1883-1898), pp. 79-80.

La dérivée v'' est inférieure au second membre où l'on ne laisse que les termes positifs. On a donc

$$v'' < \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu p - x} + \frac{1}{\mu q + x} + \frac{1}{\mu q - x}$$
$$= \frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} + \frac{2\mu q}{\mu^2 q^2 - x^2}.$$

Or

$$\frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} = \frac{2}{\mu p} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{\mu^2 p^2}} = \frac{2}{\mu p} \left[1 + \frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{x^4}{\mu^4 p^4} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2}{\mu p} + \frac{2x^2}{\mu^3 p^3} \left[1 + \frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{x^4}{\mu^4 p^4} + \cdots\right].$$

Puisque x a tout au plus la valeur μl égale ou inférieure à $\frac{1}{2}\mu p$, de sorte que $\frac{x^2}{\mu^2 p^2}$ est égale ou inférieure à $\frac{1}{4}$, on a

$$\frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} \leqq \frac{2}{\mu p} + \frac{2x^2}{\mu^3 p^3} \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right] = \frac{2}{\mu p} + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\mu^3 p^3}.$$

De même,

$$\frac{2\mu q}{\mu^2 q^2 - x^2} \leqq \frac{2}{\mu q} + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\mu^3 q^3}.$$

Par suite,

$$v'' > \frac{2}{\mu p} + \frac{2}{\mu q} + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\mu^3 p^3} + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\mu^3 q^3} = \frac{2}{\mu pq} + \frac{8}{3} \frac{x^2 (p^3 + q^3)}{\mu^3 p^3 q^3},$$

et, puisque $p^3 + q^3$ est inférieur à $(p + q)^3 = 1$,

$$v < \frac{2}{\mu pq} + \frac{8}{3} \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}.$$

On déduit de là, en intégrant deux fois de 0 à x,

$$v' < \frac{2x}{\mu pq} + \frac{8}{9}\,\frac{x^3}{\mu^3 p^3 q^3}, \qquad v < \frac{x^2}{\mu pq} + \frac{2}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3},$$

puis,

$$-\frac{v}{2} > -\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3},$$

$$y_x = e^{-\frac{v}{2}} > e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}},$$

et, d'après (5),

$$y_x > z_x,$$

si l'on pose

$$z_x = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}\right).$$

Si l'on introduit z_x à la place de y_x dans l'inégalité relative à P donnée au début de ce numéro, elle devient

$$\mathrm{P} > \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right)\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\,\mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mu l} z_x.$$

Pour $x = 0$, $z_0 = 1$; pour x croissant, z_x décroît. On a donc, d'après la formule (9), en observant d'ailleurs que $\mathrm{E}(\mu l) + 1$ surpasse μl,

$$z_0 + \mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mathrm{E}(\mu l)} z_x > \int_0^{\mathrm{E}(\mu l)+1} z_x\,dx > \int_0^{\mu l} z_x\,dx,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mathrm{E}(\mu l)} z_x > \int_0^{\mu l} z_x\,dx - 1.$$

Donc enfin

$$\mathrm{P} > \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right]\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left\{\int_0^{\mu l} z_x\,dx - 1\right\}.$$

7. *Première estimation de la limite inférieure de* P. On a

$$\int_0^{\mu l} z_x\,dx = \int_0^{\mu l} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3p^3q^3}\right)dx$$

$$> \int_0^{\mu l} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx - \frac{1}{9}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,\frac{x^4}{\mu^3p^3q^3}\,dx.$$

Posons

$$\frac{x^2}{2\mu pq} = t^2, \qquad \frac{\mu^2 l^2}{2\mu pq} = \mathrm{T} \quad \text{ou} \quad \mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

La première intégrale du second membre de la dernière égalité deviendra

$$\sqrt{2\mu pq}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt.$$

La seconde prendra la forme

$$\frac{4}{9\mu pq}\sqrt{2\mu pq}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,t^4\,dt,$$

et est égale, d'après la formule (8), à

$$\frac{4}{9\mu pq}\sqrt{2\mu pq}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\pi} = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}{\mu pq}.$$

Donc enfin

$$\int_0^{\mu l} z_x dx > \sqrt{2\mu pq}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}dt - \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}{\mu pq}.$$

Il en résulte, pour P, d'après la dernière formule du n° 6, la relation

$$\mathrm{P} > \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right]\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}dt - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\right\}$$

et, *à fortiori*,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{6\mu pq} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}.$$

Or, on a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2}\, dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = 1.$$

Donc enfin,

$$P > \int_0^\tau e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}},$$

ou

$$P > \int_0^\tau e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{2\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}.$$

8. *Seconde estimation de la limite inférieure de* P. Si μ est au moins égal à 10, on a

$$\frac{1}{2\mu pq} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}.$$

En effet, cette inégalité équivaut à la suivante :

$$\pi < 2\mu pq.$$

Or, d'après (10), $\mu q = 2 + \delta$, δ étant positif ou nul, $p = 1 - q = 1 - \frac{2+\delta}{\mu}$. Par suite, l'inégalité à vérifier devient

$$\pi < 2\,(2+\delta)\left(1 - \frac{2+\delta}{\mu}\right) = 2\mu .\ \frac{2+\delta}{\mu}\left(1 - \frac{2+\delta}{\mu}\right).$$

Le produit du second membre est minimum quand les deux derniers facteurs diffèrent le plus possible. La différence entre ces deux facteurs est $1 - 2\frac{2+\delta}{\mu}$ dont la valeur maxima correspond à $\delta = 0$. Alors $q = \frac{2}{\mu}$, $p = 1 - \frac{2}{\mu}$, et l'on a

$$2\mu pq = 4\left(1 - \frac{2}{\mu}\right).$$

Cette dernière expression, pour $\mu \geqq 10$ (hypothèse dont nous ne nous servons qu'ici) a une valeur égale ou supérieure à $4\left(1 - \frac{2}{10}\right)$ ou $3\frac{1}{5}$, donc supérieure à π. On a donc

$$\frac{1}{2\mu pq} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

et, par suite, la dernière inégalité du n° précédent donne

$$\mathrm{P} > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2} dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}}.$$

9. *Théorème de Jacques Bernoulli.* On a évidemment

$$\mathrm{P} < (p+q)^{\mu} = 1.$$

Pour μ croissant indéfiniment, T croît aussi indéfiniment; on déduit des inégalités

$$1 > \mathrm{P} > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2} dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}}$$

pour $\mu = \infty$,

$$\lim \mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

c'est-à-dire le théorème de Jacques Bernoulli.

Note sur la valeur approchée de $t_{\mu p \pm x}$

Dans les traités de Calcul des probabilités, on admet que l'on a très approximativement, pour de grandes valeurs de μ,

$$t_{\mu p + x} = t_{\mu p - x} = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

Nous allons chercher une limite supérieure et une limite inférieure de ces expressions afin de voir jusqu'à quel point est justifiée l'approximation dont il vient d'être question.

I. *Limites de* $\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Les valeurs extrêmes de $\frac{x}{\mu p}$, $\frac{x}{\mu q}$ sont 0 et $\frac{1}{2}$, cette dernière valeur correspondant au cas où $2x = p = q = 2l$. Cherchons quelle valeur on peut donner à j et k dans la double égalité

$$1 - j\epsilon \geqq (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - k\epsilon$$

ϵ, quantité inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$, représentant $\frac{x}{\mu p}$ ou $\frac{x}{\mu q}$.

La première inégalité devient successivement

$$1 \leqq (1 + \epsilon)(1 - 2j\epsilon + j^2\epsilon^2) = 1 + \epsilon(1 - 2j) + \epsilon^2(-2j + j^2) + j^2\epsilon^3$$

$$0 \leqq 1 - 2j + j\epsilon(-2 + j) + j^2\epsilon^2 = 1 - 2j - j\epsilon(2 - j - j\epsilon).$$

On voit d'abord que j ne peut surpasser $\frac{1}{2}$. La valeur minima du second membre, pour une valeur donnée de j, correspond à la valeur maxima de $j\epsilon(2 - j - j\epsilon)$, laquelle s'obtient en donnant à ϵ sa valeur maxima $\frac{1}{2}$. L'inégalité devient alors

$$0 \leqq 1 - 2j - \frac{1}{2}j\left(2 - j - \frac{1}{2}j\right) = 1 - 3j + \frac{3}{4}j^2.$$

On peut supposer $j = \frac{1}{3}$, ou même un peu plus grand.

La seconde inégalité devient de même

$$1 \geqq (1+\epsilon)(1-k\epsilon)^2 = 1 + \epsilon(1-2k) + \epsilon^2(-2k+k^2) + k^2\epsilon^3,$$

$$0 \geqq 1 - 2k - k\epsilon(2 - k - k\epsilon).$$

Si l'on fait $k = \frac{1}{2}$, l'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de ϵ de 0 à $\frac{1}{2}$; pour $k < \frac{1}{2}$, l'inégalité n'est plus vérifiée quand ϵ est très petit. La valeur $k = \frac{1}{2}$ est donc la plus petite que l'on puisse donner à k.

Nous écrirons donc

$$1 - \frac{1}{3}\epsilon \geqq (1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu p} \geqq \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p},$$

$$1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu q} \geqq \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}.$$

II. *Limites de* $\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}}$. On trouve, de même, par les calculs élémentaires que nous supprimons, pour abréger,

$$1 + \frac{5}{6}\epsilon \geqq (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 + \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu p} \geqq \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p},$$

$$1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu q} \geqq \left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}.$$

III. *Limites de* $w_1 = (\mu p + x)\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) + (\mu p - x)$.

$\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)$, *$x$ étant nul ou positif.* On trouve, pour les dérivées première et seconde de w_1,

$$w'_1 = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right),$$

$$w''_1 = \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu q - x}.$$

Or

$$\frac{1}{\mu p + x} = \frac{1}{\mu p}\,\frac{1}{1 + \frac{x}{\mu p}} = \frac{1}{\mu p}\left[1 - \frac{x}{\mu p} + \frac{x^2}{\mu p\,(\mu p + x)}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^2 p^2\,(\mu p + x)}.$$

Mais $\mu p + x$ est compris entre μp et $\mu p + \frac{1}{2}\mu p$; donc

$$\frac{1}{\mu p + x} < \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^3 p^3},$$

$$\frac{1}{\mu p + x} > \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{\mu^3 p^3}.$$

De même,

$$\frac{1}{\mu q - x} = \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^2 q^2\,(\mu q - x)}.$$

L'expression $\mu q - x$ est comprise entre $\mu q - \frac{1}{2}\mu q$ et μq; donc

$$\frac{1}{\mu q - x} < \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + 2\,\frac{x^2}{\mu^3 q^3},$$

$$\frac{1}{\mu q - x} > \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3}.$$

De ces diverses inégalités, on tire

$$w''_1 < \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^3}{\mu^3 q^3} + \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + 2\,\frac{x^2}{\mu^3 q^3}$$

$$= \frac{1}{\mu p q} + \frac{x^2}{\mu^2 p^2 q^2}\,(p - q) + \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}\,(2p^3 + q^3);$$

$$w_1'' > \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3} + \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3}$$
$$= \frac{1}{\mu pq} + \frac{x}{\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right).$$

On déduit de là, en intégrant deux fois de 0 à x, w_1' et w_1 étant nuls pour $x = 0$,

$$w_1 < \frac{x^2}{2\mu pq} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3);$$
$$w_1 > \frac{x^2}{2\mu pq} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right).$$

IV. *Limites de* $w_2 = (\mu p - x)\log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right) + (\mu q + x).\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)$, *$x$ étant positif*. On trouve de même, en changeant p en q et q en p, dans les calculs précédents,

$$w_2 < \frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(p^3 + 2q^3);$$
$$w_2 > \frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(\frac{2}{3}p^3 + q^3\right).$$

V. *Limites de* $t_{\mu p+x}$, $t_{\mu p-x}$. On a d'abord

$$t_{\mu p+x} = \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\mu p + q - \frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\mu p - q - \frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-w_1}.$$

Par suite, d'après I, II, III,

$$t_{\mu p-x} < \left(1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right)}$$
$$> \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^3}{2\mu pq} - \frac{x^2}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3)}.$$

De même,

$$t_{\mu p-x} = \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\mu p + q - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\mu p - q - \frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} . e^{-w_2} .$$

Par conséquent, d'après I, II, IV,

$$t_{\mu p - x} < \left(1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu q}\right)$$

$$\times \; e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(\frac{2}{3}p^3 + q^3\right)}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}\right)$$

$$< \; e^{-\frac{x^2}{2\mu px} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(p^3 + 2q^3)} .$$

VI. *Conclusion.* On voit d'après ces calculs combien il est difficile de justifier la formule classique

$$t_{\mu p \pm x} = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}} .$$

Pour qu'elle soit admissible, il faut supposer : 1° $\frac{x}{\mu p}$, $\frac{x}{\mu q}$ très petits comparés à l'unité, c'est-à-dire que $\frac{l}{p}$, $\frac{l}{q}$ soient des fractions très petites puisque x peut prendre la valeur extrême μl ; 2° $\frac{x^2}{\mu^2 p^2 q^2}$ doit être très petit comparé à $\frac{x^2}{\mu pq}$, ou $\frac{x}{\mu pq}$ comparé à 1, c'est-à-dire que $\frac{l}{pq}$ doit aussi être une fraction très petite.

En résumé, comme la seconde condition implique la première, on doit supposer l très petit par rapport à pq.

Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités

On peut trouver une valeur approchée de l'expression

$$P = \int_{\frac{m}{\mu}-l}^{\frac{m}{\mu}+l} z^m (1-z)^n \, dz : \int_0^1 z^m (1-z)^n \, dz,$$

de la manière suivante. Posons pour abréger,

$$p = \frac{m}{\mu}, \qquad q = 1 - p = \frac{n}{\mu},$$

puis, faisons dans la première intégrale,

$$z = p + x, \qquad 1 - z = q - x.$$

Cette intégrale deviendra

$$\int_{-l}^{+l} (p+x)^m (q-x)^n \, dx = p^m q^n \int_{l}^{+l} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx.$$

Pour fixer les idées, nous supposons l tout au plus égal à la moitié de q et p égal ou supérieur à q.

On a, comme on sait,

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n + \left(1 - \frac{x}{p}\right)^m \left(1 + \frac{x}{q}\right)$$

$$\geqq 2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right)^m \left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)^n}$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}\mu p \log\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right) + \frac{1}{2}\mu q \log\left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)} .$$

Or, si α est inférieur à l'unité,

$$l(1 - \alpha) > -\alpha - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\mu p \log\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)+\frac{1}{2}\mu q \log\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)$$

surpasse

$$\frac{1}{2}\mu p\left[-\frac{x^2}{p^2}-\frac{x^4}{2p^4\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\mu q\left[-\frac{x^2}{q^2}-\frac{x^4}{2q^4\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{\mu x^2}{2p}-\frac{\mu x^4}{4p\,(p^2-x^2)}-\frac{\mu x^2}{2q}-\frac{\mu x^4}{4q\,(q^2-x^2)}$$

$$=-\frac{\mu x^2}{2pq}-\frac{\mu x^4}{4}\left\{\frac{1}{p\,(p^2-x^2)}+\frac{1}{q\,(q^2-x^2)}\right\}.$$

On a

$$\frac{1}{p\,(p^2-x^2)}+\frac{1}{q\,(q^2-x^2)}$$

$$=\frac{p^3+q^3-x^2}{pq\,(p^2-x^2)\,(q^2-x^2)}<\frac{1}{pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}.$$

Par conséquent, on a

$$\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^m\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)^n}>e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\,e^{-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}}$$

et, puisque $e^{-\alpha}$ est $>1-\alpha$,

$$\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^m\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)^n}>e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right).$$

Il en résulte que l'on a

$$\mathrm{P}>\frac{p^m q^n\displaystyle\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right)dx}{\displaystyle\int_0^1 z^m\,(1-z)^n\,dz}.$$

L'intégrale eulérienne du dénominateur est égale à

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu+2)}=\frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\,m.\;1.\,2.\,\ldots\,n}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,\mu}\cdot\frac{1}{\mu+1}.$$

Posons dans l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = t^2, \qquad \mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

le deviendra

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} e^{-t^4}\, dt \left(1 - t^2 \frac{pq}{\mu\,(p^2 - l^2)\,(q^2 - l^2)}\right)$$

supérieure à

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} e^{-t^2} dt - \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \frac{pq}{\mu\,(p^2 - l^2)\,(q^2 - l^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, t^4\, dt.$$

Or, en faisant $t = \sqrt{u}$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, t^4\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{3}{2}} du = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}\sqrt{\pi}.$$

On a donc enfin

$$\mathrm{P} > \frac{1.2.3.\ldots\mu}{1.2.3.\ldots m.1.2.\ldots n}\, p^m q^n\, \frac{\mu+1}{\mu}\sqrt{2\mu pq}$$
$$\times \left\{ 2\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\, dt - \frac{15}{4}\, \frac{\sqrt{\pi}\, pq}{\mu\,(p^2 - l^2)\,(q^2 - l^2)} \right\}.$$

Au moyen de la formule de Stirling, on prouve assez facilement l'inégalité suivante :

$$\frac{1.2.3.\ldots\mu}{1.2.3.\ldots m.1.2.\ldots n}\, p^m q^n > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \left(1 - \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q-l)}\right).$$

Le facteur qui précède la parenthèse dans l'inégalité relative à P, est donc supérieur à

$$\frac{\mu+1}{\mu}\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q-l)}\right]$$
$$> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q+l)}\right].$$

On a donc

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt \,.\, \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q-l)} - \frac{15pq}{4\mu\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\,.$$

Or

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0 e^{-t^2}\, dt = 1,$$

$$12\,(p+l)\,(q-l) > 12\left(p + \frac{1}{2}\,q\right)\left(q - \frac{1}{2}\,q\right) = 3\,(1+p)\,q > 6pq,$$

$$(p^2 - l^2)\,(q^2 - l^2) > \left(p^2 - \frac{1}{4}\,p^2\right)\left(q^2 - \frac{1}{4}\,q^2\right) = \frac{9}{16}\,p^2 q^2.$$

Par suite,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{15pq.\,16}{4\mu.\,9.\,p^2q^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{20}{3\mu pq}\,.$$

Comme

$$\frac{1}{6} + \frac{20}{3} = \frac{41}{6}$$

est inférieur à 7, on a enfin

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt - \frac{7}{\mu pq}\,.$$

ÉTUDE COMPARÉE DU REIN (NÉPHRIDIE)

CHEZ LES

GASTÉROPODES PROSOBRANCHES ET PULMONÉS

PAR

le **P. A. DESCHAMPS, S. J.**
Docteur en sciences naturelles

INTRODUCTION

On considère aujourd'hui chaque rein de Mollusque comme une néphridie modifiée, largement développée en un sac volumineux où pendent des replis tapissés d'épithélium excréteur.

Chez ces animaux, il ne resterait du cœlome que le péricarde; or, sauf peut-être l'une ou l'autre exception, Fissurelle, Patelle (Erlanger), on trouve chez eux une ouverture entre le péricarde et le rein. Le rein des Mollusques est donc un canal, plus ou moins dilaté, faisant communiquer le cœlome avec l'extérieur : c'est bien là la définition d'une néphridie, et le nom de néphrostome peut s'appliquer à juste titre à l'ouverture réno-péricardique.

Il nous paraît utile de rappeler ici quelques notions d'embryologie et d'anatomie comparée concernant les Gastéropodes, et spécialement les Stylommatophores.

D'après Erlanger [16] (*), Korschelt et Heider [32], et nous adoptons cette opinion, toute néphridie de Gastéropode se constitue

---

(*) Ces chiffres renvoient à la table des auteurs.

aux dépens de deux feuillets du blastoderme : le mésoderme et l'ectoderme. Le mésoderme donne naissance au rein proprement dit par une évagination du cœlome qui, chez l'adulte, reste en communication avec le péricarde par le néphrostome. La partie ectodermique de la néphridie est une évagination de la cavité palléale, elle s'unit à l'évagination mésodermique précédente, et, après résorption des deux parois qui les séparent, elle constitue le canal excréteur de la néphridie ou l'uretère.

Chez les Stylommatophores, chez l'*Helix pomatia* par exemple, la portion ectodermique est d'abord peu développée, et se réduit pour ainsi dire à l'orifice par lequel la glande débouche dans la cavité palléale (H. Fol). Cette partie ectodermique se développe ensuite en même temps que la partie glandulaire ou mésodermique, et devient l'uretère primitif ou *uretère primaire,* qui continue à s'ouvrir au fond de la cavité pulmonaire. Bientôt une gouttière, se distinguant par son épithélium cylindrique très élevé, du reste de la cavité palléale ou pulmonaire, conduit de l'uretère primitif au pneumostome. Plus tard, cette gouttière se ferme complètement d'arrière en avant par accroissement et rapprochement des bords, et le canal ainsi formé prend le nom d'*uretère secondaire*, formation nouvelle et spéciale aux Stylommatophores.

L'anatomie comparée nous fait retrouver chez diverses espèces adultes d'un genre du même groupe, le genre *Bulimus,* quelques-uns des stades transitoires de ce développement ontogénique. Voici le tableau que nous en donne von Ihering (52) :

„ 1° *Bulimus oblongus :* Le rein s'ouvre dans la cavité respiratoire par une simple papille ;

2° *Bulimus auris leporis :* Le rein latéral et le tiers postérieur de l'uretère secondaire sont entièrement fermés ; la plus grande partie de cet uretère (les deux tiers) est encore ouverte ;

3° *Bulimus papyraceus :* Les deux tiers de l'uretère secondaire sont fermés ;

4° *Bulimus Blainvilleanus :* L'uretère secondaire est, comme chez l'Helix, entièrement fermé. (*Op. cit.,* p. 273.) „

Ces préliminaires nous ont semblé nécessaires pour nous orienter dans l'étude comparée d'un organe aussi compliqué que la néphridie des Gastéropodes.

Ajoutons-y une remarque. De même que sur l'origine des deux portions de la néphridie, les auteurs sont loin d'être d'accord sur les noms à donner aux deux parties de l'uretère.

Girod (21), chez l'Hélix, appelle l'uretère primaire *vésicule urinaire,* et réserve le nom de *canal excréteur* pour l'uretère secondaire; von Ihering, tout en reconnaissant qu'il est inexact de considérer l'uretère primaire comme partie intégrante de la glande rénale, lui conserve cependant le nom de *rein adjacent* ou *latéral (Nebenniere),* employé par d'autres auteurs. La dénomination d'*uretère secondaire* qu'il adopte, a, conformément à ses théories dont nous allons dire un mot (*), une tout autre signification que celle exposée plus haut. Simroth (50) appelle l'uretère primaire, *branche récurrente* ou encore *rein latéral,* et *canal excréteur* l'uretère secondaire, dirigé droit en avant.

Nous avons préféré emprunter à l'embryologie les noms d'*uretère primaire* et d'*uretère secondaire;* car les données de cette science serviront de base à nos considérations sur les homologies de la néphridie des Gastéropodes Prosobranches et Pulmonés.

(*) Voici, d'après Herman Fol (*Sur le développement des Gastéropodes Pulmonés,* ARCHIVES DE ZOOL. EXPÉRIM., t. VIII. 1880), la théorie de von Ihering : " Guidé par des raisons purement anatomiques, von Ihering arrive à la singulière conclusion que le poumon des Pulmonés terrestres (Stylommatophores) n'est qu'une portion élargie du rein ou du cloaque, et il donne en conséquence à ces animaux le nom de Néphropneustes. Chez les Pulmonés aquatiques ou Basommatophores (Branchiopneustes), le poumon serait une partie de la cavité branchiale. Je m'abstiens de porter un jugement sur les motifs d'anatomie comparée qui peuvent avoir conduit l'auteur à ce résultat, mais je ne puis concevoir qu'une différence si considérable dans l'origine d'un organe tel que le poumon ait pu exister, sans laisser de trace dans l'hénogénie (ontogénie) de ces deux groupes. „

Korschelt et Heider, dans leur *Traité d'Embryologie comparée* (t. III, p. 1053) établissent clairement que la cavité palléale des Stylommatophores est l'homologue de celle de Basommatophores, et que c'est une erreur d'en faire une portion élargie du rein ou du cloaque.

Simpel (32) et Pelseneer (40) fournissent à leur tour des arguments d'anatomie comparée contre cette théorie que von Ihering reste seul à soutenir.

CHAPITRE PREMIER

Homologies de la néphridie chez les Gastéropodes Prosobranches et Pulmonés

Au début, nous tenons à prévenir le lecteur que nous considérons comme de simples *hypothèses* les rapprochements que nous allons faire entre le rein des Prosobranches et celui des Pulmonés. Depuis longtemps nous avions été frappé de la ressemblance qui existe entre l'uretère de l'Arion et la glande néphridienne de Remy Perrier, organe des Prosobranches que cet auteur décrit comme une formation entièrement nouvelle et propre à ce groupe de Gastéropodes. D'autre part, une étude attentive des différences de circulation et de structure entre l'uretère et le rein proprement dit chez les Stylommatophores, avait attiré notre attention sur l'opinion d'Erlanger et de Korschelt et Heider. Nous l'avons vu, ces auteurs distinguent dans toute néphridie de Gastéropode deux parties d'origine différente : une portion mésodermique, le rein proprement dit, et une portion ectodermique qu'on appelle *uretère* quand elle est assez allongée pour former un canal. Pour maintenir partout et toujours une distinction nette entre ces deux parties, nous avons étendu le nom d'*uretère* à la portion ectodermique, alors même qu'elle ne constitue qu'une seule poche avec le rein proprement dit.

Les hypothèses qui suivent reposent directement sur les deux considérations que nous venons d'indiquer, l'une empruntée à l'anatomie comparée, l'autre à l'embryologie. Nous le répétons, nous ne les donnons que comme hypothèses. Quel que soit leur sort, elles nous ont aidé à redresser certaines erreurs, notamment touchant la structure de la glande néphridienne de R. Perrier. Nous avons l'espoir qu'elles pourront être de quelque utilité dans l'étude générale de la néphridie de l'embranchement des Mollusques.

§ 1. — État de la question

I. — HISTORIQUE

Von Ihering a fait le premier travail d'ensemble sur le rein des Mollusques *(Zür Morphologie der Niere der sog. Mollusken,* ZEITSCH. F. WISS. ZOOL., t. XXIX, 1877).

Nous nous sommes contenté de l'aperçu qu'en donne R. Perrier (*Recherches sur l'Anatomie et l'Histologie du rein des Gastéropodes Prosobranches ;* ANN. DES SCIENCES NATUR., t. VIII, 1889). Nous connaissons en effet par d'autres travaux de von Ihering ses idées sur la néphridie des Pulmonés ([52.53]) ; d'autre part, pour les Prosobranches, R. Perrier avoue que ses conclusions se rapprochent beaucoup de celles de von Ihering.

Nous avons consulté les travaux de Béla Haller sur les Prosobranches (voir la bibliographie), et en particulier celui qu'il intitule : *Zur Kenntnis der Niere der Prosobranchier* (MORPH. JARHB., t. XII, 1886).

A côté d'erreurs relevées par R. Perrier et Erlanger, ces mémoires ne nous paraissent pas mériter les critiques du premier de ces savants. La même observation pourrait d'ailleurs s'appliquer à l'appréciation que B. Haller donne du travail de R. Perrier (voir : *Die Morphologie der Prosobranchier,* III, MORPH. JARHB., 1892, p. 478).

Le mémoire de R. Perrier sur le rein des Prosobranches a paru en 1889, dans les ANNALES DES SCIENCES NATURELLES. Inutile d'y insister ici ; nous allons en parler longuement un peu plus loin.

Plus récemment, Erlanger a publié sur ce sujet une étude très importante ([16]) ; il y réfute une partie de la théorie de R. Perrier sur le rein des Prosobranches Mononéphridés. Nous y reviendrons.

II. — HYPOTHÈSE ACTUELLE SUR LA DOUBLE TORSION ET L'ASYMÉTRIE DES GASTÉROPODES

“ C'est une opinion acceptée par la plupart des morphologistes, écrit Erlanger *(op. cit.)*, que la forme ancestrale des Mollusques avait une symétrie bilatérale complète, et que l'anus et la cavité palléale se trouvaient au pôle aboral de l'animal.

„ Spengel, Bütschli, Ray Lankester, Lang et autres auteurs ont bâti sur cette hypothèse leur théorie concernant la torsion et l'asymétrie. „

A. — Double torsion des Gastéropodes

Empruntons à Pelseneer (40) le résumé rapide de cette théorie. Il est un phénomène morphologique général dans l'embranchement des Mollusques : la torsion ventrale dans un plan antéro-postérieur, tendant à rapprocher les deux extrémités du tube digestif; cette torsion est manifeste chez les Céphalopodes, les Scaphopodes et les Lamellibranches.

A cette torsion primitive s'ajoute, chez les Gastéropodes adultes, une torsion secondaire latérale, subsidiaire à la ventrale. En effet, le développement du pied tend à écarter de nouveau les deux extrémités du tube digestif; le rapprochement doit donc forcément se faire par le côté, c'est-à-dire par une torsion latérale, dans un plan à peu près perpendiculaire à celui de la torsion ventrale.

Comme conséquences de cette double torsion, citons, outre l'enroulement du sac viscéral et de la coquille, outre la torsion de la commissure nerveuse viscérale :

1° Le transport de l'anus en avant et au dos;

2° Le déplacement des organes circumanaux : ceux qui étaient à droite avant la torsion se trouvent amenés à gauche, et *vice-versa.*

Pour rappeler ce déplacement, Pelseneer parlera, par exemple, de rein *originairement* droit, *topographiquement* (*actuellement*, pour Erlanger) gauche.

Nous n'avons à parler que des Gastéropodes chez qui la double torsion est toujours réalisée à l'état adulte; c'est pourquoi nous désignerons toujours les organes d'après la position qu'ils occupent après cette double torsion. Donc, rein gauche pour nous sera l'équivalent de rein *originairement* droit, *topographiquement* ou *actuellement* gauche.

Nous avons représenté, fig. I, le massif réno-péricardique chez l'ancêtre hypothétique (*) des Mollusques ; nous y supposons la double torsion effectuée comme chez les Gastéropodes. Ce schéma est celui que Remy Perrier donne pour les Acéphales dans son *Anatomie comparée* (⁴⁸).

Nous y avons ajouté, d'après Erlanger, la portion de l'épithélium du péricarde qui très probablement, dit Erlanger, constituait la *gonade (G)*. Chez ce type, ajoute Erlanger, les produits sexuels, versés dans la cavité du péricarde, passaient dans la néphridie par l'un ou l'autre canal réno-péricardique, et de là, le conduit rénal les amenait dans la cavité palléale. Cette condition est presque réalisée chez les Néoméniens actuels.

Mais très tôt, dans la phylogénie, la portion de l'épithélium péricardique qui représente la gonade se sépare du péricarde (Voyez dans Erlanger (¹⁵) le développement de la *Paludine*). C'est le cas pour tous les groupes de Gastéropodes actuels.

B. — *Asymétrie des Gastéropodes*

Outre ces phénomènes, les Gastéropodes en présentent encore un autre : l'asymétrie.

L'anus, aux deux côtés duquel s'ouvrent les deux néphridies, ne reste pas au milieu de la cavité palléale devenue antérieure, mais il se trouve porté soit à droite, soit à gauche : à droite chez les espèces dextres.

Les phénomènes qui sont la conséquence de cette asymétrie sont interprétés par R. Perrier autrement que par la plupart des auteurs. Après avoir exposé la théorie de Perrier, nous la réfuterons en donnant l'opinion actuellement admise sur ce sujet.

(*) Remarquons, une fois pour toutes, que nous parlons d'ancêtre des Mollusques pour nous conformer au langage employé aujourdhui, mais nous ne prétendons nullement par là grossir le nombre des auteurs pour qui l'hypothèse transformiste est chose reçue. *Ancêtre* signifie donc simplement sous notre plume *type idéal* dont on retrouve les grandes lignes, plus ou moins adaptées, dans chaque espèce de l'embranchement des Mollusques : rien de plus. Supposé même que ce type ait été réalisé autrefois, il resterait encore à prouver qu'il existe une relation de descendance entre lui et les Gastéropodes actuels.

III. — THÉORIE DE R. PERRIER SUR LE REIN DES PROSOBRANCHES. — SA CLASSIFICATION DES PROSOBRANCHES

A. — Théorie

1° D'après R. Perrier, le rein unique des Monotocardes est formé par la fusion des deux reins des Diotocardes ; cette union s'est faite de telle façon que le rein droit des Diotocardes y est représenté par la portion droite, c'est-à-dire, par le rein proprement dit, à concrétions uriques ; le rein gauche des Diotocardes se retrouve dans une bande accolée au plafond du sac rénal, le long du péricarde et de la cavité palléale : R. Perrier lui a donné le nom de *glande néphridienne.*

2° La glande néphridienne, déjà signalée, dit Perrier, par Béla Haller, n'est pas, comme il l'a figurée, une simple dépendance du rein; c'est un organe parfaitement autonome dont la structure n'avait jamais été, jusqu'ici, exactement étudiée.

Nous exposerons cette structure plus loin, lorsque nous discuterons l'opinion de R. Perrier.

3° Chez les Monotocardes supérieurs, une portion du rein proprement dit s'est transformée, et ce rein unique est constitué par deux lobes très différents d'aspect et de structure.

B. — Classification des Prosobranches

Cette classification de R. Perrier repose spécialement sur l'appareil rénal. C'est pourquoi nous jugeons utile de la résumer ici. Nous y ajoutons quelques termes nouveaux introduits par E. Perrier, dans son *Traité de Zoologie* (fascicule IV, 1897).

Edmond Perrier avait proposé deux sous-ordres chez les Prosobranches : les Diotocardes, qui correspondent aux Rhipidoglosses ou Aspidobranches et les Monotocardes, qui correspondent aux Pectinibranches. Bouvier adopte cette division (6).

R. Perrier y a ajouté les Hétérocardes (ou Docoglosses).

1. Diotocardes

Chez tous, à l'exception des Néritidés, il y a deux reins qui ne communiquent jamais l'un avec l'autre. Leurs orifices, toujours distincts, sont situés au sommet de papilles saillantes dans la cavité palléale. Ils se divisent en *Homonéphridés, Hétéronéphridés, Mononéphridés.*

1° *Homonéphridés :* deux reins physiologiquement identiques, placés symétriquement; leurs dimensions diffèrent : le droit est plus volumineux que son congénère, il communique seul avec le péricarde.

Famille unique : Fissurellidés.

Nota. — Erlanger, qui a repris l'étude de ces Prosobranches, n'a pas découvert de communication entre le péricarde et le rein; il s'explique facilement l'erreur de R. Perrier qui a cherché le néphrostome par des injections colorées poussées dans le péricarde. Il y a, en effet, un endroit de moindre résistance, où la cavité rénale droite est seulement séparée de la cavité du péricarde par trois minces feuillets : l'épithélium sécréteur du rein, la propria du rein, l'épithélium aplati du péricarde.

C'est probablement, dit Erlanger, l'endroit où la néphridie s'est séparée du péricarde ou cœlome (*op. cit.*, p. 600).

Cette partie, peu résistante, aura sans doute cédé sous l'effort de l'injection.

La question reste donc à trancher.

2° *Hétéronéphridés :* deux reins tout à fait différents. Le rein droit est le véritable appareil urinaire; le rein gauche, qui communique seul avec le péricarde, est transformé en *sac papillaire* (ou *canal papillaire*) de B. Haller. Ce serait un organe de réserve.

Familles : Haliotidés, Turbinidés, Trochidés.

3° *Mononéphridés :* Cœur avec deux oreillettes dissymétriques; l'oreillette droite est rudimentaire.

Un seul rein, qui s'ouvre par un orifice en boutonnière au fond de la cavité palléale, au-dessus de la branchie.

Famille unique : Néritidés.

2. Hétérocardes

Une seule famille : Patellidés.

Les deux reins fonctionnent comme glande urinaire, mais le rein gauche, tout petit, a passé à droite du péricarde, entre lui et le rein droit. “ La communication du rein gauche avec le péricarde ne m'a pas paru exister „, écrit R. Perrier. Mais il décrit une communication du rein droit avec le péricarde. Erlanger, ici encore, n'a pas découvert de canal réno-péricardique, même pour le rein droit.

Remarquons que le rein gauche des Diotocardes, aussi bien que celui de la Patelle, a son système vasculaire sous la dépendance immédiate de l'oreillette ou des oreillettes, suivant le cas.

3. Monotocardes

Une seule cavité rénale et un seul orifice excréteur.

Pour R. Perrier, ce rein unique provient de la fusion des deux reins des Diotocardes, qui sont donc situés d'un même côté du péricarde et, ne formant plus qu'une seule poche, n'ont plus qu'une seule ouverture. Le plus souvent on y trouve une glande *néphridienne* représentant le rein gauche; le rein proprement dit ou à concrétions urinaires représente, lui, le rein droit.

Comme le système nerveux, le rein permet de diviser les Monotocardes en deux grands groupes, auxquels R. Perrier conserve les anciens noms de *Ténioglosses* et de *Sténoglosses.*

A. — *Ténioglosses :*

1° Holonéphridés (d'Edmond Perrier).

Caractères :

a) Rein proprement dit généralement constitué par une masse ayant dans toutes ses parties des fonctions et une structure identiques.

Ex. : Littorine, Paludine, Valvée, Cyclostome, etc.

b) Glande néphridienne.

2° Épinéphridés (E. Perrier) (*).

Exceptionnellement, le rein proprement dit se différencie en

(*) “ D'après les caractères du rein, on pourrait diviser les Prosobranches en deux séries : l'une à rein de structure uniforme, l'autre à rein divisé en deux lobes dissemblables. ... Il y aurait, entre ces deux séries, un parallélisme plus grand qu'entre les deux groupes des Ténioglosses et des Sténoglosses (**E. Perrier,** ***op. cit.,*** **p. 2094**). „

deux lobes distincts, de structure différente; cela constitue un passage au groupe suivant.

Deux familles principales : Cypræïdés; Naticidés.

B. — *Sténoglosses.*

1° Caractères.

a) Rein proprement dit formé nettement de deux lobes très différents d'aspect et de structure.

Ex. : Volutidés, Olividés, Cônidés, Muricidés.

b) Glande néphridienne.

a) Méronéphridés :

Rein formé de deux lobes, de structure dissemblable, simplement juxtaposés ou à peine intriqués; chacun d'eux occupe une surface considérable des parois de la chambre rénale.

2° Division.

Ex. : Volutidés, Cônidés.

b) Pycnonéphridés :

Lobe gauche du rein formé d'une lamelle marginale, bordant entièrement le rein, et donnant naissance à d'autres lamelles secondaires qui pénètrent entre les lobules du rein droit.

Ex. : Buccinidés, Muricidés, Purpuridés, etc.

Remarque. La glande néphridienne est commune à tous les Monotocardes, à l'exception de la Paludine, de la Valvée, du Cyclostome; des Vermétidés, Cérithidés et genres voisins.

§ 2. — **Examen de la Théorie de R. Perrier**

Après l'aperçu que nous venons de donner de la classification de R. Perrier, le lecteur suivra plus aisément l'exposé de sa théorie et notre réfutation. Pour plus de clarté, nous procéderons par propositions.

Première proposition. — Le rein unique des Monotocardes ne provient pas de la fusion des deux reins des Diotocardes, mais en représente uniquement le rein gauche. Il ne reste du rein droit que le canal excréteur, qui sert de conduit génital.

Cette proposition est diamétralement opposée à l'opinion de R. Perrier. Nous l'empruntons à Erlanger (16), dont le travail a pour but de rechercher l'homologie de cette néphridie unique des Monotocardes.

" D'après l'opinion émise pour la première fois par Ray Lankester, écrit-il, la néphridie qui persiste seule chez la plupart des Prosobranches (Monotocardes), correspond au rein gauche des formes ayant deux organes rénaux (la plupart des Diotocardes)... Dans mon travail sur le développement de la Paludine, j'avais établi que cette opinion avait l'appui d'une preuve embryologique.

„ L'étude du développement des espèces *Bythinia tentaculata* et *Planorbis* est venue y ajouter une confirmation nouvelle.

„ Comparons ces résultats avec le fait que la glande génitale chez les Zygobranches et les Cyclobranches (Diotocardes et Hétérocardes, d'après la nouvelle terminologie française), s'ouvre dans le rein droit. Comparons-les avec cet autre fait que chez la Paludine le canal du rein droit rudimentaire devient le conduit génital.

„ Dès lors nous voyons clairement :

„ 1. Que le rein droit actuel a disparu ou s'est transformé; et qu'une portion, correspondant au canal excréteur, forme une partie de l'appareil génital unique;

„ 2. Que le seul rein restant, chez la plupart des Prosobranches, est le rein gauche actuel. „

Deuxième proposition. — La glande néphridienne, que décrit R. Perrier chez les Monotocardes, n'est pas une formation spéciale à ce groupe; c'est une portion de l'appareil rénal, homologue de l'uretère primaire des Stylommatophores.

Erlanger, malheureusement décédé depuis, nous apprend dans le travail déjà cité qu'il avait recueilli des matériaux pour l'étude du développement embryogénique de la Cassidaire, l'un des types choisis par R. Perrier pour la description de sa glande néphridienne. En attendant, il admettait comme simplement possible que la glande néphridienne provînt de la transformation du rein droit, et non pas du gauche.

Dans cette hypothèse, le rein des Monotocardes résulterait, comme pour Perrier, de l'union des deux reins des Diotocardes, mais avec cette différence que, pour Perrier, la glande néphridienne correspondrait au rein gauche des Diotocardes; et le rein proprement dit, à leur rein droit. En somme, ce serait l'hypothèse de R. Perrier, mais renversée.

Ces recherches d'embryogénie que projetait Erlanger n'ont pas été faites. Guidé par l'anatomie comparée, nous croyons avoir découvert la véritable signification de la glande néphridienne.

Nous allons soumettre au lecteur les considérations qui nous portent à regarder la glande néphridienne de R. Perrier comme une portion de l'appareil rénal, homologue de l'uretère primaire des Stylommatophores.

Nous avions été vivement frappé, depuis longtemps, de la grande ressemblance qu'il y a entre cet uretère et la glande néphridienne; elle va si loin, que nous pouvons appliquer à l'uretère de l'Arion, par exemple, et spécialement à la tête de l'uretère primaire, chaque trait par lequel R. Perrier a décrit la glande néphridienne.

Prévenons une objection, qui se présente naturellement : la portion de néphridie que R. Perrier appelle *glande néphridienne* ne forme qu'une seule et même cavité avec le rein proprement dit; l'uretère primaire des Stylommatophores est, au contraire, un canal à parois propres, ne communiquant avec le rein proprement dit que par un étroit orifice. Comment après cela pouvons-nous les comparer?

La réponse est facile, si vous avez devant les yeux les généralités de l'*Introduction*. Dans le développement d'un Stylommatophore (Ex. : Hélix), la néphridie ne forme d'abord qu'une seule poche; et la portion ectodermique y est si peu développée qu'elle se réduit, pour ainsi dire, à l'orifice par lequel la glande s'ouvre dans la cavité palléale.

En outre, avons-nous dit, ce stade embryonnaire et transitoire chez l'Hélix, se retrouve fixé d'une manière permanente et à l'état adulte chez une espèce du même groupe des Stylommatophores : le *Bulimus oblongus*.

Or, cette portion ectodermique, si peu développée à l'état adulte chez ce *Bulimus*, est manifestement l'homologue de l'uretère primaire d'un Hélix ou d'un Arion.

Ceci rappelé, le lecteur ne s'étonnera plus de notre comparaison entre la glande néphridienne des Prosobranches et l'uretère des Pulmonés.

A. — Les rapports sont les mêmes

L'uretère de l'Arion et la glande néphridienne sont situés tous deux au plafond de la cavité rénale, en contact avec le péricarde; tous deux se prolongent le long de la cloison antérieure du rein proprement dit, au fond de la cavité palléale.

Ajoutons un rapport important, que ne signale pas R. Perrier : la glande néphridienne, comme l'uretère naturellement, se trouve aux abords de l'ouverture qui conduit hors du rein les produits sécrétés.

B. — Couleur et Aspect

1° A l'extérieur, la couleur de la glande néphridienne est tout à fait différente de la couleur du rein proprement dit : cette dernière est plus ou moins brune. La glande néphridienne, au contraire, a une " couleur paille, analogue à celle de la peau de chamois " (B.Haller).

Mêmes différences entre le rein proprement dit et l'uretère primaire de l'Arion.

2° A l'Arion s'applique également ce que R. Perrier dit de la glande néphridienne vue de l'intérieur, après ouverture de la chambre urinaire : " Elle n'a plus cette apparence spongieuse et puissamment glandulaire du rein proprement dit. La surface présente de très forts plissements, assez irréguliers, ramifiés et anastomosés, montrant très nettement, à la loupe, un aspect fibreux tout à fait caractérisé. "

On croirait lire la description de la surface interne de l'uretère chez l'Arion (*).

C. — Circulation

Voici comment R. Perrier la conçoit à l'intérieur de la glande néphridienne (p. 158) : " Elle est totalement différente de celle du rein. Tandis que celui-ci s'injecte assez facilement par l'interme-

---

(*) Nous renvoyons pour les détails de la structure et de la circulation du rein des Pulmonés Stylommatophores, à notre précédent mémoire : *Recherches d'Anatomie Comparée sur les Gastéropodes Pulmonés*, ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1898.

diaire des lacunes de la cavité générale, il n'en est rien pour la glande néphridienne. Elle appartient à un tout autre domaine. Le sang lui *vient en entier directement de l'oreillette,* et cela d'une façon toute particulière. En effet, la bande qui constitue cette glande peut être considérée comme un organe creux, à parois musculaires extrêmement nettes. La cavité, ainsi limitée, est partiellement obstruée par un tissu conjonctif spécial. Mais le reste constitue une série d'espaces communiquant ensemble et que le sang remplit facilement.

„ C'est ainsi que dans une note préliminaire présentée à l'Académie des Sciences (C. R., t. CVI, 1888), j'ai pu considérer l'intérieur de la glande néphridienne comme une véritable lacune sanguine. Cette lacune communique largement avec l'oreillette, dans l'angle antérieur du rein, à peu près au point où la veine branchiale arrive au cœur. En définitive, ce n'est qu'un diverticule de l'oreillette.

„ Elle s'injecte avec la plus grande facilité, soit par l'oreillette, soit mieux encore par le vaisseau afférent branchial...

„ On ne peut distinguer dans cet appareil ni voies d'aller, ni voies de retour. La circulation y est donc forcément très irrégulière, et on aurait peine à la comprendre, sans la présence des muscles qui limitent la lacune...

„ La contraction de ces muscles a pour résultat de diminuer la cavité de la glande néphridienne, dont le sang se trouve dès lors forcément chassé. Il doit donc se produire un mouvement de soufflet, entretenant un courant alternatif d'allée et de venue du liquide sanguin. *Malheureusement, je n'ai jamais pu voir ce phénomène, que cache l'opacité des tissus.* „

Il faut faire deux parts dans ce qui précède, celle des faits, et celle de leur interprétation.

Tous les faits énoncés par R. Perrier conviennent également à la circulation de l'uretère primaire chez l'Arion; mais notre interprétation est toute différente. (Pour plus de détails, voir notre mémoire cité plus haut.)

Quand on injecte une matière colorante, par exemple le bleu de Prusse soluble ou l'encre de Chine, dans la cavité générale de l'Arion, le rein proprement dit se remplit assez facilement de masse à injection; il est en effet en communication directe avec cette cavité générale. Au contraire, la tête de l'uretère primaire ne présente pas trace d'injection. Cet uretère primaire appartient donc, tout comme la glande néphridienne, à un autre domaine circulatoire que le rein proprement dit. Nous savons, qu'embryologiquement, il dérive de l'ectoderme de la cavité palléale : il est donc naturel de le trouver sur le trajet du sang qui revient à l'oreillette après s'être hématosé dans cette cavité palléale ou poumon; il doit en outre dans ces conditions s'injecter avec la plus grande facilité par l'oreillette, à laquelle il ramène directement le sang du poumon. Enfin, comme toutes les lamelles de cet uretère sont lacunaires, la masse à injection pénètre tout l'organe, et on ne peut alors y distinguer ni voies d'aller ni voies de retour.

Notre description, on le voit, répond absolument à celle que R. Perrier donne pour la glande néphridienne; mais la connaissance que nous avons de la circulation de retour chez les Stylommatophores nous fait interpréter tout autrement les résultats des injections chez les Prosobranches. R. Perrier avoue d'ailleurs n'avoir jamais pu voir directement ce mouvement de soufflet, entretenant dans le sang, à l'intérieur des lacunes de la glande néphridienne, un flux et un reflux continuels. Nous ne croyons donc pas téméraire de rejeter cette hypothèse si compliquée et si peu vraisemblable; et de supposer que, chez les Monotocardes, la glande néphridienne, tout comme l'uretère de l'Arion auquel elle ressemble sous tant de rapports, reçoit du sang qui revient de la cavité palléale où il s'est hématosé; tandis que, chez ces mêmes Monotocardes, le sang qui traverse le rein arrive directement de la cavité générale, comme chez l'Hélix, l'Arion et surtout comme chez la Limace.

Avec cette hypothèse, on explique facilement la différence si grande entre les résultats de l'injection de ces organes, selon que la masse colorée est poussée dans la cavité générale ou dans l'oreillette.

D. — Structure

R. Perrier distingue, à ce point de vue, deux parties dans la glande néphridienne :

1° L'épithélium qui le tapisse du côté de la cavité rénale : c'est la glande néphridienne proprement dite, qui, d'après lui, représente le rein gauche des Diotocardes.

2° Le tissu conjonctif qui remplit la lacune, considérée par lui comme un diverticule de l'oreillette et dans laquelle s'enfoncent les replis de l'épithélium.

On trouve là, dit Perrier, une de ces glandes lymphatiques signalées par Cuénot : la glande *hématique*.

Pour lui, glande néphridienne et glande hématique sont choses absolument distinctes : “ Ainsi, dit-il, chez la Paludine, la glande épithéliale (ou néphridienne) a disparu ; mais la glande vasculaire sanguine existe toujours ; seulement, elle est pour ainsi dire rentrée dans l'oreillette et s'est développée sur tout le pourtour de ses parois „ (*op. cit.,* p. 271).

Reprenons chacun de ces points séparément.

1. Glande épithéliale ou glande néphridienne proprement dite :

1° “ L'épithélium sécréteur est disposé en une seule couche et constitué par une seule espèce de cellules. Leur forme varie énormément d'un type à l'autre. Malgré cela elles présentent des caractères assez constants. C'est ainsi qu'elles ne possèdent jamais de vacuoles. „

Ce caractère, qui les distingue nettement des cellules rénales proprement dites, se retrouve dans l'épithélium de l'uretère de tous les Stylommatophores.

2° Culs-de-sac de l'épithélium : “ L'épithélium sécréteur pénètre dans l'épaisseur de l'organe (hématique), y formant des culs-de-sac qui se terminent à une profondeur plus ou moins grande. „

Il nous semble qu'ici R. Perrier commet une erreur qu'il a reprochée lui-même à B. Haller, et à juste titre, au sujet des lamelles du rein proprement dit. Il représente la glande néphridienne comme formée de culs-de-sac qui s'enfoncent dans le tissu lacuneux de la glande hématique.

Pour contrôler cette assertion, nous avons fait des coupes transversales de la prétendue glande néphridienne chez la Littorine (fig. XI) ; or, l'aspect que nous figurons répond absolument à celui de coupes que nous avons faites à travers les lamelles de l'uretère de l'Arion et de la Limace (fig. IX et X) ; par contre, il diffère des figures que donne R. Perrier relativement à la glande néphridienne de la Littorine.

Quelle est la raison de cette différence? Nous avons cherché si elle ne provenait pas de l'obliquité plus ou moins grande des coupes qu'il figure ; ou du moins de l'obliquité des lamelles, due en partie à la contraction de l'organe lors de la fixation. Nous pensons pouvoir répondre affirmativement. Nous avons en effet trouvé, dans l'uretère de l'Arion, des aspects absolument semblables à ceux que décrit R. Perrier chez la Littorine (fig. IX). Or, dans nos coupes, l'apparence de culs-de-sac, plongés dans le tissu lacunaire sous-jacent, a manifestement pour cause l'obliquité des coupes qui passent près de la base des lamelles. Il doit en être de même pour les coupes de R. Perrier, concernant la Littorine ; ainsi s'explique la différence entre ses résultats et les nôtres. Ce qui confirme cette manière de voir, c'est que nous trouvons dans certains endroits de nos coupes de la Littorine l'aspect de culs-de-sac décrits par R. Perrier.

2. Tissu et lacunes à l'intérieur de l'organe, glande hématique :

1° Nous y rencontrons d'abord le tissu conjonctif habituel des parties lacunaires : petites cellules conjonctives étoilées formant des mailles très lâches. De ces mailles, les unes restent perméables et constituent des lacunes où se rencontrent de nombreux globules sanguins; d'autres sont occupées par de grosses cellules plasmatiques (cellules muqueuses, ou encore, cellules vésiculaires de Langer).

Cette description s'applique autant à l'uretère des Stylommatophores qu'à la glande néphridienne.

2° Tissu spécial : glande hématique.

R. Perrier décrit sous ce nom " des cellules assez grosses, à protoplasme très granuleux. La limite entre deux cellules n'est pas toujours très nette, et souvent on ne peut en distinguer la trace... Les noyaux sont très nets, vivement colorés par le picrocarmin, avec des nucléoles distincts.

„ Il nous semble, ajoute-t-il, que la structure histologique de notre glande, sa position et ses rapports étroits avec l'organe central de la circulation, son voisinage de l'appareil circulatoire près duquel, suivant M. Cuénot, les glandes lymphatiques sont souvent placées, pourraient être autant de preuves en faveur de l'hypothèse que c'est un organe destiné à produire les globules du sang... Ce ne sont pourtant pas des preuves absolues, et on pourrait avoir ici un appareil de réserve... Quoi qu'il en soit, les caractères vus plus haut indiquent assez nettement que nous avons affaire à une glande vasculaire sanguine, destinée à influer d'une manière quelconque sur la composition du sang. „

Au sujet de cette glande hématique, nous ne pouvions avoir de meilleure appréciation que celle de Cuénot lui-même. Or, voici comment il s'exprime, dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris, sur la *glande de l'oreillette (Paludina vivipara)* et la *glande néphridienne (Murex brandaris)*, (C. R., t. CX, p. 1276).

Après avoir admis que la paroi très épaisse de l'oreillette, chez la Paludine, est réellement une glande lymphatique (*), il ajoute : “ J'ai étudié la glande néphridienne seulement chez un type, le *Murex brandaris ;* c'est dire que mes conclusions ne prétendent aucunement être générales... Les cellules que nous y voyons ne sont point un élément caractéristique de la glande néphridienne; on les retrouve partout où il y a du tissu conjonctif, dans le manteau, dans les piliers rénaux, etc... „

Faisons ici quelques remarques :

1° On retrouve, dit Cuénot, l'élément caractéristique de la glande hématique (car il prend glande néphridienne dans son sens le plus général) dans les piliers rénaux ; or, on peut assimiler la structure lacunaire d'un repli de l'uretère chez les Stylommatophores à la structure interne d'une lamelle du rein proprement dit. L'observation de Cuénot plaide donc en faveur de l'homologie que nous essayons d'établir entre cet uretère et l'organe où R. Perrier distingue une glande néphridienne et une glande hématique.

2° Dans la figure X, représentant une coupe de la portion de l'uretère primaire d'un Stylommatophore en contact avec le péricarde, *pr*, nous trouvons dans la paroi des cellules nerveuses ganglionnaires, *cg*. Or, ces cellules sont grosses ; la limite entre deux cellules n'est pas toujours très nette, et souvent on n'en distingue aucune trace sans réactifs spéciaux ; les noyaux sont très nets, vivement colorés par le picro-carmin, avec des nucléoles

---

(*) Nous l'avons vu, R. Perrier dit que chez la Paludine il n'y a pas de glande néphridienne, mais qu'on y trouve uniquement une glande hématique autour des parois de l'oreillette.

distincts. Tous ces caractères sont ceux des cellules spéciales de la glande hématique, d'après la description qu'en donne R. Perrier.

3° Ajoutons que la situation de ces cellules, chez les Stylommatophores aussi bien que chez les Prosobranches à glandes néphridienne et hématique, est au voisinage de l'oreillette, dans le tissu lacunaire qu'entoure le ou les vaisseaux ramenant au cœur le sang hématosé.

Donc, pour nous résumer : Cuénot trouve dans la glande hématique du *Murex brandaris* de grosses cellules qu'on rencontre partout où il y a du tissu conjonctif, comme, par exemple, dans les piliers rénaux. Ces grosses cellules ne sont en réalité que les cellules muqueuses ou cellules vésiculaires de Langer.

Quant aux fameuses cellules spéciales de la glande hématique de Perrier, elles répondent trait pour trait aux cellules nerveuses ganglionnaires qui se trouvent, chez les Stylommatophores, dans le tissu lacunaire de l'uretère primaire, au voisinage de l'oreillette.

Ces rapprochements plaident certainement en faveur de notre hypothèse, et vont droit à l'encontre de celle de R. Perrier.

Et si, aux similitudes de structure, nous ajoutons les considérations faites plus haut sur les rapports, la couleur, l'aspect et la circulation des deux organes, ne nous est-il pas permis de regarder comme très vraisemblable l'homologie de la glande néphridienne (avec sa glande hématique) des Prosobranches, et de l'uretère primaire des Pulmonés?

La proposition qui va suivre fournit à notre hypothèse un nouvel argument.

Troisième proposition. — L'uretère de la Paludine et de la Valvée est l'homologue de l'uretère primaire des Stylommatophores.

1. R. Perrier considère l'uretère des Paludines comme une production nouvelle " dont nous n'avons vu jusqu'à présent aucun homologue... L'anatomie comparée, ajoute-t-il, permet difficilement de résoudre la question. "

Cette difficulté est-t-elle si grande?

Nous représentons, fig. XII, une coupe transversale de l'uretère de la Paludine vivipare; la figure XIII nous donne, à un grossissement plus fort, un fragment de la coupe précédente.

Or, les plis qu'on y trouve sont absolument semblables à ceux de l'uretère des Stylommatophores.

2. Après l'anatomie, interrogeons l'embryologie.

R. Perrier, rappelant l'opinion de von Ihering, d'après laquelle les conduits urinifères de la Paludine et des Pulmonés, *physiologiquement* analogues, n'ont aucune homologie morphologique, ajoute : „ Sans doute l'*embryogénie* pourrait donner une réponse définitive à la question, mais jusqu'ici les embryogénistes qui ont étudié le développement de la Paludine n'ont donné aucun renseignement à cet égard. „

Depuis lors a paru la belle étude d'Erlanger sur l'embryogénie de la Paludine, et l'homologie des uretères de la Paludine et des Pulmonés est chose définitivement prouvée.

Nous trouvons là un puissant argument pour notre hypothèse. Parmi les quelques Prosobranches sans glande néphridienne, R. Perrier cite la Paludine et la Valvée. Or, dans ces deux genres voisins, on rencontre un uretère, que Perrier signale d'ailleurs sans pouvoir déchiffrer ses homologies. Mais cet uretère, nous venons de le voir, est l'homologue de l'uretère des Pulmonés. Cette absence de glande néphridienne dans des groupes où l'on trouve un uretère homologue de l'uretère des Pulmonés était à prévoir avec notre hypothèse, pour laquelle uretère et glande néphridienne sont choses synonymes. Comment au contraire Perrier pourrait-il expliquer cette apparition subite, au sein des Prosobranches, d'une production aussi caractérisée que l'uretère de la Paludine et de la Valvée? Nous l'avons vu, il se déclare impuissant à résoudre cette question.

Quatrième proposition. — L'uretère de la Paludine, et par conséquent l'uretère des Stylommatophores, est l'homologue du canal ou sac papillaire (expression de B. Haller) ou rein gauche des Diotocardes hétéronéphridés (Haliotis, Turbo, Trochus).

„ En se fondant sur la communication qu'il croyait exister entre le rein droit des *Haliotis* et leur rein gauche ou canal papillaire, B. Haller avait assimilé l'uretère des Paludines à ce canal; nous avons démontré que la communication invoquée par B. Haller n'existe pas chez l'*Haliotis*; l'assimilation qu'il a proposée tombe par suite d'elle-même. „ Telle est l'appréciation de R. Perrier (*op. cit.*, p. 173).

Nous croyons que R. Perrier rejette trop vite l'opinion de B. Haller, qui nous paraît, à nous, fort vraisemblable. Sans doute il a corrigé avec raison l'erreur anatomique du savant hongrois qui fait communiquer entre eux les deux reins des *Haliotis*. Mais de là ne suit pas logiquement l'impossibilité de voir dans l'uretère des Paludines l'homologue du rein gauche des *Haliotis*. En effet, cela n'ôte rien aux ressemblances multiples qui existent entre les deux organes. Sans faire une comparaison détaillée comme pour la glande néphridienne, disons que tout, aspect extérieur, circulation, structure, nous semble autoriser le rapprochement de B. Haller.

La coupe microscopique d'une lamelle de l'uretère de l'Arion ou de la Limace est pour ainsi dire identique à la coupe par laquelle R. Perrier figure une saillie du canal papillaire de l'*Haliotis*.

Cinquième proposition. — Chez les Monotocardes supérieurs, (Épinéphridés parmi les Ténioglosses; Sténoglosses), le lobe gauche du rein (différenciation du rein proprement dit d'après R. Perrier) appartient à la portion ectodermique de la néphridie, et il correspond, avec la glande néphridienne de ces Monotocardes, à l'uretère de la ***Paludine*.**

1° R. Perrier lui-même rapproche la structure de ce lobe gauche de celle du canal papillaire de l'*Haliotis* : “ Chose étrange, dit-il, les coupes démontrent la plus grande analogie entre la structure histologique de ce lobe gauche et celle des papilles du sac papillaire ou rein gauche de l'*Haliotis*. Le tissu propre qui les constitue,... l'examen de l'épithélium, tout concourt à nous montrer l'identité des deux formations. „ (*Op. cit.*, p. 230.)

Il admet d'ailleurs que l'on pourrait joindre ce lobe à la glande néphridienne, mais il penche cependant vers l'hypothèse qui en fait une différenciation du rein proprement dit : “ Cette observation, ajoute-t-il, démontre indirectement, s'il en est besoin encore, la nature rénale du canal papillaire des *Haliotis*, en nous indiquant qu'un tissu véritablement rénal est susceptible de se transformer en cet élément nouveau et si différent qui forme la papille de l'*Haliotis.* „

Ces transformations nous semblent bien peu en rapport avec l'unité de plan d'un organe, considéré dans toute l'étendue d'un groupe naturel.

Dans notre hypothèse, au contraire, le rein proprement dit ne se modifie jamais et reste glande à sécrétion urinaire dans le groupe entier des Gastéropodes.

Les formations variées que présente l'appareil rénal de cette classe se rapportent toutes à la portion ectodermique de la néphridie; toutes, elles sont les homologues de l'uretère primaire des Stylommatophores.

2° La description et les figures que B. Haller donne de ce lobe gauche du rein sont absolument d'accord avec notre opinion qui rapproche ce lobe de l'uretère des Pulmonés. (Consultez, sur ce sujet, MORPH. JAHRB., 16 Bd., 3 H., p. 259, 1890; et 18 Bd., 3 H., p. 451, 1892.)

§ 3. — Notre hypothèse sur les homologies de la néphridie des Gastéropodes Prosobranches et Pulmonés

I. — NÉPHRIDIE TYPIQUE DES GASTÉROPODES

Une néphridie complète, typique de Gastéropode a des fonctions multiples, représentées anatomiquement par deux parties d'origine différente :

Une portion mésodermique, qui fournit le néphrostome et le rein proprement dit et est chargée de la sécrétion urinaire (du moins, de la formation des concrétions).

Une portion ectodermique, à laquelle nous avons donné le nom d'*uretère,* et qui fait communiquer la glande rénale avec la cavité palléale, et ainsi avec l'extérieur. On peut distinguer dans l'uretère lui-même deux sortes de fonctions (qui n'existent pas toujours réunies) : 1° celle de canal excréteur pour les produits rénaux et génitaux; 2° les fonctions de la paroi elle-même, de ce tissu lacunaire, formant des replis tapissés d'un épithélium que l'absence de concrétions distingue de l'épithélium rénal proprement dit.

II. — ANCÊTRE HYPOTHÉTIQUE DES GASTÉROPODES

Chez le type idéal représentant cet ancêtre hypothétique (fig. I), on admet l'existence de deux néphridies complètes, placées symétriquement à droite et à gauche du rectum. Le rectum lui-même traverse le péricarde, comme chez les Acéphales.

Une portion de la paroi péricardique *(G)* représente la gonade; chaque néphridie a par conséquent toutes les fonctions énumérées plus haut; les produits génitaux passent dans la néphridie par le néphrostome. et de là sont éliminés par la même voie que la sécrétion urinaire.

III. — DIOTOCARDES

A. — Néphridies des Diotocardes Homonéphridés

Nous allons suivre la classification des Prosobranches exposée plus haut.

Le type que nous venons de décrire est hypothétique. Parmi les Gastéropodes actuels, le genre qui s'en éloigne le moins est le genre *Fissurella.* Mais chez la Fissurelle, l'asymétrie commence déjà à se produire, et les néphridies tendent à se partager les fonctions réunies dans chacune des deux néphridies de notre type idéal. Ainsi la néphridie droite seule conduit encore au dehors les produits génitaux, car la gonade s'est séparée du péricarde.

Remarquons ici, d'après Erlanger (le dernier qui, à notre connaissance, ait étudié cette question), qu'il se présente chez la Fissurelle une anomalie, reproduite également chez la Patelle et les espèces voisines : c'est l'absence de néphrostome dans l'une et l'autre néphridies. Si le fait se confirme, ces Mollusques seraient les seuls dont la néphridie ne communiquerait plus avec le cœlome, c'est-à-dire, ici, avec le péricarde. Mais on trouve beaucoup d'exemples semblables dans les autres embranchements. Nous pouvons citer, parmi les organes rénaux que l'on considère comme néphridies et qui ne sont plus en communication avec la cavité cœlomique : les tubes de Malpighi des Insectes, et les reins *(métanéphros)* des Vertébrés supérieurs.

Ceci dit, revenons à la Fissurelle (fig. II) et exposons succinctement la disposition et les fonctions des deux néphridies :

1. Néphridie gauche

1° Portion *mésodermique :*
a) Pas de néphrostome.
b) Grande diminution de volume du rein proprement dit.
2° Portion *ectodermique :*
a) Elle ne sert plus de conduit génital.
b) Aucune papille n'est signalée près de l'ouverture excrétrice.

2. Néphridie droite

1° Portion *mésodermique :*
a) Pas de néphrostome.
b) Rein normal.
2° Portion *ectodermique :*
a) Communication avec la gonade.
b) Papilles ou replis de la paroi.

B. — *Néphridies des Diotocardes Hétéronéphridés* (fig. III) *(Haliotis, Turbo, Trochus)*

L'asymétrie est plus considérable, et la division du travail plus complète entre les deux néphridies.

1. Néphridie gauche

1° Portion *mésodermique :*
a) Néphrostome.
b) Pas de rein proprement dit.
2° Portion *ectodermique :*
a) Pas de communication avec la gonade.
b) Replis de la paroi = canal papillaire (ou sac papillaire) de B. Haller.

2. Néphridie droite

1° Portion *mésodermique :*
a) Pas de néphrostome.
b) Rein proprement dit bien développé.
2° Portion *ectodermique :*
a) Conduit excréteur pour la gonade comme pour le rein proprement dit.
b) Pas de replis de la paroi.

C. — *Néphridie unique des Diotocardes Mononéphridés = Néritines*

Remarques :

1° A partir des Néritines, l'asymétrie plus marquée entraîne la disparition d'une néphridie, la droite. La néphridie gauche, demeurée seule, doit donc réunir toutes les fonctions d'une néphridie typique de Gastéropode. Effectivement, cela a lieu, sauf pour un seul point : la communication avec la gonade.

On tend à généraliser (Erlanger, Pelseneer) l'observation d'Erlanger sur le développement de la Paludine, et à considérer le conduit génital des Gastéropodes Mononéphridés comme un reste de la portion ectodermique de la néphridie droite : c'est le *nevrogonaduct* de Ray Lankester. Quoi qu'il en soit, chez ces Gastéropodes, la néphridie unique, correspondant à la néphridie gauche des Diotocardes binéphridés, n'a plus aucune communication avec la gonade.

2° Contrairement à l'opinion de Perrier, nous croyons que la portion mésodermique ou rein proprement dit ne subit aucune transformation chez les Prosobranches et les Pulmonés ; partout elle donne uniquement naissance à la portion de la néphridie tapissée d'épithélium à concrétions.

Les modifications que nous rencontrerons portent donc uniquement, d'après nous, sur la partie ectodermique.

Néphridie unique de la Néritine

Citons d'abord ce que R. Perrier écrit à ce sujet :

« Le cœur et le rein, écrit-il (p. 133), se trouvent au fond de la cavité palléale, près de la base de la branchie, le cœur à gauche du rein dans sa position habituelle. *Fait remarquable et unique parmi les Prosobranches,* le rein n'est pas contigu au péricarde. Les deux poches sont séparées par une *cavité close de toute part,* qui ne s'injecte pas par la cavité générale, et qui règne sur toute la longueur du rein. »

En lisant cette description d'une *cavité close de toute part et séparant le rein du péricarde,* voici quelle a été aussitôt notre pensée :

Cette cavité doit être en réalité un uretère analogue à celui de la Paludine et des Pulmonés ; par conséquent, elle *doit* présenter deux ouvertures : l'une, postérieure, qui la fait communiquer avec le rein proprement dit ; l'autre, antérieure, par laquelle cet uretère débouche dans la cavité palléale.

Quelle puissante confirmation pour notre hypothèse sur la structure de la néphridie des Prosobranches et son homologie avec la néphridie des Pulmonés, si cette prévision se trouvait réalisée !

Les faits nous ont donné raison contre R. Perrier : nous avons découvert point par point dans l'appareil rénal de la Néritine tout ce que nous avions pu prévoir avant d'en faire l'étude.

Contrairement à ce qu'avance Perrier, le rein unique de la Néritine fluviatile ne constitue pas une exception parmi les Prosobranches ; comme ailleurs il est contigu au péricarde. L'erreur de R. Perrier provient de ce qu'il a vu une cavité close de toute part, là où nous avons en réalité un uretère homologue de celui de la Paludine.

L'appareil rénal se compose donc, chez la Néritine, de deux cavités superposées. La cavité supérieure est le rein proprement dit, dont R. Perrier a fait à tort tout l'appareil rénal de ce Prosobranche. On y reconnaît tous les caractères habituels de cette portion mésodermique de la néphridie : plissements de la paroi, structure histologique caractéristique, rapports vasculaires spéciaux avec la branchie ou appareil respiratoire, néphrostome en communication avec la cavité du péricarde.

Ce néphrostome est très caractéristique : c'est un long canal cilié qui part de l'extrémité antérieure du rein proprement dit, ou cavité supérieure de l'organe rénal, et, sous forme de tube, traverse la cavité inférieure ou uretère, pour aboutir au péricarde, situé sous cet uretère.

La paroi de la cavité inférieure ou uretère offre de ci de là de légers plissements analogues à ceux que nous avons signalés dans l'uretère de la Paludine.

Le schéma que nous donnons représente une coupe longitudinale à travers ces organes (fig. VIII). Il a pour but de réunir sous les yeux du lecteur les divers rapports de la néphridie avec le péricarde et la cavité palléale, ainsi que les relations réciproques du rein proprement dit et de l'uretère. Nous pouvons voir en *c* la communication de l'uretère *u* avec le rein proprement dit : *R*. En avant, cet uretère s'ouvre par une fente étroite, *ou*, dans la cavité branchiale ou palléale.

Nous aimons à le répéter, notre hypothèse reçoit, de cette structure qu'elle nous a permis de prévoir, une importante confirmation (*).

IV. — MONOTOCARDES

La portion *mésodermique* (néphrostome et rein proprement dit) ne subit pas de changement. Nous ne nous occuperons donc plus, dorénavant, que de la partie *ectodermique* de la néphridie (fig. IV).

A. — Ténioglosses

1. Holonéphridés

1° La plupart ont ce que R. Perrier appelle *glande néphridienne.*

Nous l'avons montré, cette glande est en réalité l'homologue de l'uretère primaire des Stylommatophores et représente la portion ectodermique de la néphridie unique des Monotocardes.

Ici la néphridie ne forme encore qu'une seule cavité, et la prétendue glande néphridienne constitue la portion de paroi qui entoure l'orifice de communication entre l'appareil rénal et la cavité palléale : l'ouverture de communication se trouve dans cette portion ectodermique.

2° Chez quelques Ténioglosses, la prétendue glande néphridienne est absente.

Parmi eux, *a)* deux ont un uretère, la Paludine et la Valvée.

Cet uretère est l'homologue de la glande néphridienne. Il représente un stade plus avancé de la différenciation. Les deux portions, mésodermique et ectodermique, constituent chacune une cavité propre; une étroite ouverture les fait communiquer entre elles.

b) Chez l'Ampullaire, appartenant à une famille qu'on range dans le même groupe que les Paludines (Edm. Perrier, *op. cit.,*

(*) Nous devons à l'obligeance de M. l'abbé Lensen, docteur en sciences naturelles, auteur de belles recherches sur la Néritine, les préparations qui nous ont permis de contrôler notre hypothèse.

p. 2085), R. Perrier a voulu voir une transition entre le rein des Diotocardes et celui des Monotocardes. Il fait appel dans ce but à l'étude de Bouvier sur l'organisation des Ampullaires (⁷).

D'après Bouvier, “ les Ampullaires présentent deux reins : un rein antérieur triangulaire ou rein droit, formé par des lamelles, et un rein postérieur ou gauche, dont le plafond est tapissé par le réseau vasculaire qui constitue le tissu rénal. Le rein gauche communique par un conduit avec le rein droit, et ce dernier s'ouvre seul dans la chambre palléale par l'intermédiaire d'un large orifice en relation avec la gouttière rénale „ (p. 66).

Cette description nous suggère une autre interprétation que celle de Bouvier. Nous tenons à le faire remarquer, les considérations que nous allons émettre sont purement *à priori*, et nous n'avons nullement la prétention d'affirmer que les choses se passent en réalité comme nous les exposons. Notons seulement que, de l'avis d'Erlanger, les recherches sur l'appareil rénal des Ampullaires doivent être complétées. Voici ce qu'il écrit à ce sujet (*op. cit.*, p. 608) : “ Bouvier, dit-il, dont j'estime très hautement l'habileté comme anatomiste, a seulement examiné des spécimens d'Ampullaires conservés dans l'alcool, et il a employé exclusivement la méthode de dissection. Il me semble très improbable que l'organe rénal lamellaire ne communique pas avec le péricarde, comme le rein de Bithynie, dont la forme et la structure sont très semblables.

Ce point, ainsi que la communication des deux organes rénaux, devront être recherchés à nouveau sur des spécimens bien conservés et par la méthode des coupes en série... „

Nous avons voulu nous abriter sous la haute compétence d'Erlanger. Ceci dit, et sans préjuger le résultat de recherches nouvelles, voici comment, avec notre hypothèse, nous interprétions cet appareil rénal :

1° Il n'y aurait qu'une seule néphridie, et l'Ampullaire, sous ce rapport, ne formerait plus, au sein des Monotocardes, une exception inexplicable.

Admettons pour un instant l'exactitude de la description de Bouvier :

2° Le rein qu'il appelle *rein gauche* constituerait la portion mésodermique de la néphridie ; ce serait le rein proprement dit.

Nous retrouverions dans le *rein droit* de Bouvier la glande néphridienne de R. Perrier, ou mieux l'uretère des Paludines, c'est-à-dire la portion ectodermique de la néphridie. Mais remarquons-le, Bouvier n'a pas fait de coupes en séries à travers ces organes ; il découvre leurs communications au moyen d'un crin introduit dans l'un des orifices d'un canal. D'autre part, il reconnaît " que les injections ne sortent pas par la gouttière quand on injecte le rein droit „. La chose est étonnante, si le rein droit, comme il l'indique, verse directement dans cette gouttière les produits excrétés.

Aussi, nous basant sur la structure et la circulation, nous sommes porté à renverser le rôle que nous avons attribué à chacune des deux poches : le rein droit de Bouvier, et non plus le rein gauche, constituerait alors la portion mésodermique de la néphridie unique : en effet, sa structure et sa circulation semblent nous l'indiquer clairement. Comme le suppose Erlanger, cette poche communiquerait avec le péricarde. Nous retrouvons dans le rein gauche la structure et la circulation de la glande néphridienne et de l'uretère de la Paludine : c'est lui, par conséquent, et non le rein droit, qui s'ouvrirait dans la gouttière de la cavité palléale.

Pour appuyer cette hypothèse que nous ne donnons que sous la plus grande réserve, signalons le fait suivant : d'après Bouvier lui-même, " au point de vue circulatoire, les deux reins de l'Ampullaire sont exactement dans les mêmes conditions que les deux reins de l'Haliotide „ (p. 70). Or, le rein gauche de l'Haliotide ou canal papillaire est, nous l'avons montré, une formation ectodermique homologue de l'uretère.

2. Epinéphridés *(Cypraea, Natica)*

La constitution de la néphridie est la même que chez les Méronéphridés que nous allons examiner.

B. — Sténoglosses

1. Méronéphridés (Volutidés, Conidés)

Chez ces Sténoglosses, comme chez les Épinéphridés, la néphridie constitue toujours une cavité unique ; mais la portion ectodermique y prend une plus grande extension. Elle comprend, en effet, outre la glande néphridienne, ce que R. Perrier et B. Haller nomment le *lobe gauche* du rein.

2. Pycnonéphridés

Ici la différenciation nous paraît plus grande, car on y trouve une lamelle marginale, bordant entièrement, à gauche, le rein proprement dit. La cavité unique a donc une tendance vers la séparation en deux cavités; et, pour autant que nous pouvons en juger par les descriptions de R. Perrier, la portion située à gauche, et contenant la glande néphridienne, serait la portion ectodermique de l'organe.

On aurait donc ici une transition entre les Monotocardes à cavité rénale unique, et ceux qui possèdent un uretère nettement délimité.

V. — NÉPHRIDIE DES PULMONÉS

1° Chez les Stylommatophores, les seuls Pulmonés que nous ayons étudiés, on retrouve les différents stades vus chez les Prosobranches. En effet :

a) Chez les *Bulimus oblongus* (von Ihering), la néphridie forme une seule cavité, et la portion ectodermique y est seulement représentée par une simple papille autour de l'ouverture du rein dans la cavité respiratoire.

Cette disposition rappelle exactement le rein droit de l'Haliotide.

b) Chez le *Bulimus auris leporis,* l'uretère primaire est formé en canal distinct. Cet uretère primaire, qu'on retrouve chez l'Hélix, la Limace, l'Arion, est l'homologue de l'uretère de la Paludine.

2° Chez la plupart des Stylommatophores, il s'y ajoute une formation propre à ce groupe : l'*uretère secondaire.*

Chez les uns, cet uretère secondaire n'est qu'une gouttière de la cavité palléale, gouttière plus ou moins complètement fermée (*Bulimus auris leporis; Bulimus papyraceus;* voir plus haut, p. 2).

Mais chez d'autres, et c'est le cas pour l'Hélix, la Limace et l'Arion, la gouttière se ferme complètement et constitue alors un canal : c'est l'uretère secondaire proprement dit.

3° Rappelons enfin que chez les Stylommatophores possédant un uretère secondaire (Ex. : *Helix pomatia*), ces divers stades que nous avons trouvés fixés à l'état adulte chez les Monotocardes et chez certaines espèces de Stylommatophores, s'observent transitoirement pendant le développement embryonnaire.

RÉSUMÉ DE CE CHAPITRE

L'embryologie et l'anatomie comparée nous donnent l'une et l'autre la constitution d'une néphridie de Gastéropode, et les différents stades par lesquels elle passe pour atteindre son plus haut degré de différenciation, celui de la néphridie d'un Pulmoné Stylommatophore, possédant un uretère secondaire (Ex. : Hélix, Limace, Arion).

Comme on le voit dans le développement embryonnaire *(Helix Pomatia)*, ainsi que dans l'étude comparée tant des Prosobranches que des Stylommatophores, la portion de la néphridie qui se modifie et se différencie de plus en plus, c'est la portion ectodermique. La portion mésodermique, au contraire, ou rein proprement dit, reste essentiellement la même chez tous ces Gastéropodes.

Voici les multiples aspects que présente la portion *ectodermique :*

A. — Chez les Prosobranches

1° Paroi plissée du canal excréteur du rein droit chez la Fissurelle.

2° Canal ou sac papillaire (rein gauche) de l'Haliotide.

3° Uretère de la Néritine.

4° Prétendue glande néphridienne de la plupart des Ténioglosses.

5° Uretère de la Paludine et de la Valvée, et peut-être de l'Ampullaire.

6° Glande néphridienne jointe au lobe gauche du rein des Sténoglosses.

B. — Chez les Pulmonés

1° Simple papille du *Bulimus oblongus.*

2° Uretère primaire du *Bulimus auris leporis,* de l'Hélix, de la Limace, de l'Arion.

3° Chez certains Stylommatophores, il s'ajoute une partie ectodermique nouvelle, formée secondairement aux dépens de la paroi de la cavité palléale : tantôt c'est une simple gouttière plus ou moins complètement fermée (plusieurs espèces de *Bulimus*); tantôt c'est un canal conduisant jusqu'au pneumostome les produits rénaux : on l'appelle *uretère secondaire* (Hélix, Limace, Arion).

Cette étude comparée de la néphridie est à continuer sur les autres groupes de Mollusques. Nous avons déjà recueilli certains indices qui nous donnent l'espoir de pouvoir ramener ailleurs encore l'appareil rénal au schéma typique d'une néphridie complète, telle que nous l'avons décrite.

CHAPITRE II

Quelques considérations sur les fonctions de la néphridie des Gastéropodes

Comme dans la question si compliquée de la sécrétion rénale chez les Vertébrés, les auteurs sont loin d'être d'accord sur les fonctions de la néphridie des Mollusques. Aussi nous contenterons-nous de résumer brièvement l'état actuel de nos connaissances sur ce sujet, en y ajoutant quelques remarques suggérées par la structure et la circulation de l'uretère.

§ 1. — Rein proprement dit

I. — CONSTITUTION DES CONCRÉTIONS RÉNALES

“ La plupart des auteurs, dit Cuénot (12), les considèrent comme formées d'acide urique ou d'urates... J'ai repris à mon tour la question chez divers Pulmonés terrestres et aquatiques, et je me suis convaincu de l'absence d'acide urique. La substance des concrétions est bien certainement une leucomaïne xanthique, mais je ne suis pas très sûr que ce soit de la guanine pure. „

II. — MÉCANISME DE LEUR EXPULSION

1° Pour Girod (22), la cellule excrétrice, chez l'Hélix, tombe avec sa vacuole et ne peut présider à la reconstitution de son protoplasme.

2° Remy Perrier (42) a examiné directement un fragment de tissu rénal de Littorine abandonné à lui-même sur le porte-objet du microscope. Selon lui, la vacuole contenant la concrétion est seule expulsée, et la cellule, qui conserve son noyau et la majeure partie de son protoplasme, peut recommencer son fonctionnement de glande monocellulaire. Le rein rentre ainsi dans la classe des glandes mérocrines de Ranvier.

Un des arguments de Perrier, la disposition des cellules à concrétions sur un seul rang, toutes égales, sans apparence de cellules jeunes prêtes à les remplacer, pourrait s'appliquer aux nombreuses coupes du rein que nous avons faites, notamment chez l'Hélix, la Limace et l'Arion.

3° Cette expulsion est périodique.

Des observations de Cuénot (11) sur trois espèces : *Helix pomatia, Helix nemoralis, Limax maximus,* il résulte que des amas de concrétions sont rejetés à des intervalles éloignés, quinze jours, un mois et plus, suivant la plus ou moins grande activité vitale de l'animal. Durant la période d'hibernation (5 mois), les Hélix ne rejettent absolument rien.

4° A côté de cette expulsion périodique des concrétions, rien n'empêche qu'il y ait habituellement sécrétion de liquides par les cellules rénales.

§ 2. — **Uretère**

I. — CIRCULATION DE L'URETÈRE

1° La circulation dans les parois et les lamelles de l'uretère (soit primaire, soit secondaire), ne diffère en rien de la circulation rénale. C'est une circulation lacunaire. On voit sur les coupes microscopiques combien le tissu des lamelles de l'uretère est creusé de lacunes; aussi peut-il, à un moment donné, se remplir d'une masse considérable de sang.

2° Nous avons été frappé de trouver partout les lamelles de l'uretère sur le trajet d'une portion notable de sang veineux qui ne traversera pas le rein proprement dit. Ainsi, chez l'Hélix, le sang veineux qui arrive au côté droit du poumon passe auparavant dans les lamelles de l'uretère secondaire.

Chez la Limace, le sang afférent du diverticule pulmonaire droit qui, après hématose, se rend directement à l'oreillette, traverse, avant de pénétrer dans le poumon, les lamelles de l'uretère secondaire.

Chez l'Arion, le trajet est inverse : du sang, hématosé d'abord dans le poumon, passe ensuite dans les lamelles de l'uretère primaire avant d'aboutir à l'oreillette.

II. — FONCTIONS DE L'URETÈRE

A. — Canal excréteur

Il est à peine besoin d'indiquer son rôle de canal excréteur. Mais sa fonction s'arrête-t-elle là? Nous ne le pensons pas.

B. — Résorption (opinion de Simroth)

1° „ Chez les genres *Limax, Agriolimax* et *Amalia,* dit cet auteur, les deux branches de l'uretère sont partout sillonnées de fins vaisseaux. Aussi je reviens à cette opinion, émise à propos de la Parmacelle, qui attribuerait à ces vaisseaux la résorption de l'excès du liquide qui est sorti du rein proprement dit (50). „

Cette résorption rappelle la théorie de Ludwig sur le mécanisme de la sécrétion rénale chez les mammifères (³).

2° Remarquons d'abord : *a)* que le mot *vaisseau* est inexact; nous trouvons plutôt ici des replis lacunaires semblables aux lamelles rénales.

b) Ces replis existent aussi bien chez l'Arion que chez la Limace.

Ces remarques faites, voici notre avis sur l'hypothèse de Simroth : Les contractions si fréquentes de l'animal doivent produire à chaque instant une augmentation de pression dans les plis lacunaires de l'uretère. En outre, le tissu qui constitue ces replis est plus lâche que celui des lamelles rénales et plus largement en rapport avec le sang qui revient directement de la cavité générale. Aussi, après des injections modérées faites dans la cavité générale de l'Arion, par exemple, nous trouvions les lamelles de l'uretère remplies de bleu, tandis qu'on n'en voyait pas encore de trace dans les lamelles rénales.

Pour ces raisons, nous sommes peu porté à accepter l'opinion de Simroth, tant qu'elle ne s'appuie sur aucune preuve expérimentale.

C. — Sécrétion

Il est évident pour nous que la structure lamellaire de l'uretère, si semblable à celle du rein proprement dit, indique clairement que ce canal remplit une fonction dans la sécrétion rénale.

Ajoutez à cela que partout les lamelles de l'uretère, comme nous l'avons dit plus haut, sont sur le trajet d'une portion notable de sang qui n'a pas traversé ou ne traversera pas le rein proprement dit. Cette division en deux parties de la masse totale du sang de la circulation de retour semble bien montrer qu'il y a division du travail, au point de vue de la fonction excrétrice, entre le rein proprement dit et l'uretère. Cette hypothèse est-elle vraie, et comment se fait cette division du travail? A l'observation de nous l'apprendre!

Que le lecteur nous permette seulement un simple rapprochement.

Letellier (³⁵), à la suite de Kowaleski, a comparé les fonctions du rein des Acephales à celle du rein des Vertébrés. Pour les Mammifères en particulier, le lecteur sait que, d'après la théorie de Bowmann et von Wittich, l'urée et les autres produits spécifiques de l'urine sont éliminés par les cellules épithéliales granuleuses du tube contourné de Ferrein, de la branche ascendante de l'anse de Henlé et de la pièce intermédiaire; au contraire, l'eau du plasma sanguin sort par la capsule de Bowmann du glomérule de Malpighi ([18] et [1]).

Letellier, à l'exemple de Kowaleski, applique cette théorie aux Acéphales : " l'organe de Bojanus, d'une part, dit-il, et d'autre part, soit l'organe de Kéber *(Cardium)*, soit la glande de Grobben *(Pecten)*, interviennent dans la sécrétion urinaire. Autant qu'il est, dès à présent, permis de formuler un jugement, on peut dire que l'organe de Bojanus élimine l'eau en excès, divers corps neutres azotés et les phosphates (il est l'analogue des glomérules de Malpighi); l'organe de Kéber ou la glande de Grobben, analogues des *tubuli contorti,* auraient pour rôle normal d'extraire du sang l'acide urique qu'il renferme „.

Ne pouvons-nous, à notre tour, imiter Kowaleski et Letellier et faire comme eux la comparaison de l'excrétion rénale des Gastéropodes avec celle des Mammifères? Dans ce cas, le rein proprement dit des Stylommatophores, ou mieux, des Gastéropodes en général, répondrait, comme l'organe de Kéber ou la glande de Grobben des Acéphales, aux canalicules contournés et sécrèterait les produits spécifiques de l'urine (concrétions composées, d'après les uns, d'acide urique; d'une leucomaïne xanthique, peut-être de guanine pure, d'après Cuénot). Quant à l'uretère des Pulmonés et de la Paludine, et la prétendue glande néphridienne de Perrier (organes homologues, nous l'avons prouvé), ils auraient une fonction analogue à celle de l'organe de Bojanus des Acéphales et des glomérules de Malpighi des Mammifères : ils serviraient à la filtration rapide de l'eau du plasma sanguin.

Nalepa, dans un chapitre consacré à l'évacuation d'eau par le rein des Stylommatophores ([37]), remarque que les Hélicidés et les Limacidés évacuent, quand on les excite dans le voisinage du pneumostome, des quantités plus ou moins grandes d'un liquide clair comme l'eau. " Le lieu d'évacuation, dit-il, peut être soit le rein, soit le péricarde. En tout cas le rein, par sa structure lamellaire et sa grande richesse en vaisseaux, est plus apte à éliminer, en un temps relativement plus court, de plus grandes quantités d'eau que le péricarde. „

Cet auteur ne parle pas des lamelles de l'uretère; nous le répétons, c'est à ces lamelles de l'uretère que nous sommes porté à attribuer, avant tout, cette élimination d'eau.

En terminant le chapitre précédent, nous disions : nous avons déjà certains indices qui nous donnent l'espoir de ramener ailleurs encore l'appareil rénal des Mollusques au schéma typique d'une néphridie complète telle que nous l'avons décrite. Un de ces indices était la différence de structure et de fonction, chez les Acéphales, entre l'organe de Bojanus, d'une part, et l'organe de Kéber ou la glande de Grobben, d'autre part. On trouve dans l'organe de Kéber des cellules à concrétions.

Il y a là matière, pour l'avenir, à des recherches intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Aubert, *Cours d'anatomie et de physiologie animales et végétales*, 1897.

(2) Amaudrut, *La structure et la circulation de l'Organe de Bojanus de quelques Mollusques Pulmonés*, Bull. de la Soc. Philomathique, Paris, 1886.

(3) Beaunis, *Nouveaux éléments de Physiologie humaine*, 3e éd., 1888.

(4) Bernard Félix, *Recherches anatomiques sur la Valvata Piscinalis*, C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris, 1887.

(5) — *Organes palléaux des Prosobranches*. Annales des Sciences naturelles, t. IX, 1890.

(6) Bouvier, *Système nerveux, morphologie, classification des Gastéropodes Prosobranches*, Ann. des Sc. nat., 7e série, t. III, 1887.

(7) — *Étude sur l'organisation des Ampullaires. Mémoire du centenaire de la Soc. Philom.*, 1888.

(8) Claus, *Traité de Zoologie*, 2e éd. française, 1884.

(9) Cuénot, *Sur la glande de l'oreillette (Paludina vivipara) et la glande néphridienne (Murex brandaris)*, C. R. de l'Acad. des Sciences, t. CIX, Paris, 1890.

(10) — *Étude sur le sang et les glandes lymphatiques dans la série animale* Archives de Zoologie expérimentale, t. IX, 1891.

(11) — *L'excrétion chez les Gastéropodes pulmonés*, C. R. de l'Acad. des Sc. t. CXV, Paris, 1892.

(12) — *Études physiologiques sur les Gastéropodes pulmonés*, Archives de Biologie, t. XII, 1893.

(13) — *Fonctionnement du rein de l'Hélix*, C. R. de l'Acad. des Sc., t. CXIX, Paris, 1894.

(14) Deschamps, *Recherches d'anatomie comparée sur les Gastéropodes pulmonés*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1898.

(15) Erlanger, *Zur Entwicklung der Paludina vivipara*, Morph. Jahrbuch, Bd. 17, 1891.

(16) — *On the paired nephridia of Prosobranchs, the homologies of the only remained nephridium etc.*, Quaterly Journ. Microsc. Sc., t. XXXIII, 1892.

(17) Fol. *Sur le développement des Gastéropodes pulmonés*, Arch. de Zoologie expérim., t. VIII, 1880.

(18) Frédéricq et Nuel. *Éléments de physiologie humaine*, 2e éd., 1888.

(19) Garnault, *Sur l'organisation de la Valvata piscinalis*, C. R. de l'Acad. des Sc., t. CVI, Paris, 1888.

(20) Girod, *Manipulations de Zoologie*, 1889.

(21) — *Recherches sur la circulation bojanienne de l'Escargot. Congrès international de Zoologie.* Moscou, 1892.

(22) — *Observations physiologiques sur le rein de l'Escargot*, C. R. de l'Acad. des Sc., t. CXVIII, Paris, 1894.

(23) Haller (Béla). *Untersuchungen uber marine Rhipidoglossen, 1e Studie*, Morphol. Jahrbuch, Bd. 9, 1885.

(24) — *Beiträge zur Kenntnis der Niere der Prosobranchier*, Morph. Jahrbuch, Bd. 11, 1886.

(25) — *Die Morphologie der Prosobranchier gesammelt auf... Korvette " Vettor Pizani "*, Morph. Jahrb., Bd. 16, 1890.

(26) — *Die Morphologie der Prosobranchier... III Naticiden und Calyptraeiden*, Morph. Jahrb., Bd. 18, 1892.

(27) — *Die Morphologie der Prosobranshier... IV Die longi-commissuraten Neotœnioglossen*, Morph. Jahrb., Bd. 19, 1893.

(28) Hanitsch. *Contributions to the anatomy and histology of Limax agrestis*, Proc. Biolog. Soc. Liverpool, 1888.

(29) Jourdain. *Sur l'appareil respiratoire des Ampullaires*, C. R. de l'Acad. des Sc., Paris, 1879.

(30) Joyeux-Laffuie. *Organisation et développement de l'Oncidie*, Arch. de Zool. expériment., t. IX, 1882.

(31) Jung, *Contributions à l'histoire physiologique de l'Escargot*, Mém. couronnés de l'Ac. de Belgique, t. XXXIX, 1887.

(32) Korschelt et Heider, *Lehrbuch der vergleichenden Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere*, 3 H., 1893.

(33) Lacaze-Duthiers. *Histoire de la Testacelle*, Arch. de Zool. expérim., 2e série, t. V, 1887.

(34) Lameere, *Manuel de la faune de Belgique*, 1895.

(35) Letellier. *La fonction urinaire s'exerce chez les Acéphales, par l'organe de Bojanus et par les glandes de Keber et de Grobben*, C. R. DE L'ACAD. DES SC., Paris, 1891.

(36) Milne-Edwards. *Leçons sur la Physiologie et l'Anatomie comparée*, 1857-1881.

(37) Nalepa, *Beiträge zur Anatomie der Stylommatophoren*, SITZB. DER K. ACAD. DER WISSENSCH., Wien, 1883.

(38) Nüsslin. *Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Pulmonaten*, 1879.

(39) Pelseneer. *Recherches sur divers Opisthobranches*. MÉM. COUR. DE L'AC. DE BELGIQUE, t. XLIII, 1893.

(40) — *Introduction à l'étude des Mollusques*, 1894.

(41) — *Prosobranches aériens et Pulmonés branchifères*, ARCHIVES DE BIOLOGIE, t. XIV, 1895.

(42) Perrier Remy, *Recherches sur l'Anatomie et l'Histologie du rein des Gastéropodes Prosobranches*, ANN. DES SC. NATUR., t. VIII, 1889.

(43) — *Éléments d'Anatomie comparée*, 1893.

(44) Perrier Edmond, *Traité de Zoologie*, fascicule IV, 1897.

(45) Plateau, *Zoologie élémentaire*, 2e éd., 1884.

(46) Rolleston, *Forms of animal Life*, 1870.

(47) Sabatier, *Sur l'appareil respiratoire des Ampullaires*, C. R. DE L'ACAD. DES SC., t. LXXXVIII, Paris, 1879.

(48) Semper, *Uber die Niere der Pulmonaten, ausdem Nachlasse von D. C. Semper; herausgegeben und ergänzt von Dr H. Simroth*. C. R. DU ZOOLOGISCHER JAHRESBERICHT, 1894.

(49) Sicard, *Recherches sur le Zonites Algirus*, ANN. DES SC. NATUR., 6e série, t. I, 1874.

(50) Simroth, *Versuch einer Naturgeschichte der deutschen Nacktschnecken und ihrer europaïschen Verwandten*, ZEITSCH. F. WISS. ZOOL., t. XLII, 1885.

(51) Vogt et Jung, *Traité d'Anatomie comparée pratique*, t. I, 1888.

(52) von Ihering. *Uber der uropneustichen Apparat der Heliceen*, ZEITSCH F. WISS. ZOOL., t. XLI, 1884.

(53) *Sur les relations naturelles des Cochlides et des Ichnopodes*, BULLETIN SCIENTIFIQUE DE FRANCE ET DE BELGIQUE, t. XXIII, 1891.

(54) WEGMANN, *Histoire naturelle des Haliotides*, ARCH. DE ZOOL. EXPÉRIM., 1884.

(55) Willem, *Prosobranches aériens et Pulmonés aquatiques*, BULL. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, t. XXIX, 1895.

LÉGENDE DES FIGURES

I. — Lettres employées

c = communication entre le rein proprement dit et l'uretère.
cBr = cavité branchiale ou palléale chez les Prosobranches.
cg = cellule nerveuse ganglionnaire.
cu = cul-de-sac de l'uretère primaire.
cu' = „ „ „ secondaire.
G = gonade ou glande génitale.
i = intestin.
l = lacune sanguine.
n = néphrostome, ouverture de communication entre le péricarde et le rein.
ou = ouverture de l'uretère dans la cavité branchiale.
o = oreillette.
p = péricarde.
P = pied.
R = rein proprement dit.
Rd = rein droit.
Rg = rein gauche.
Rl = rein latéral ou uretère primaire.
r = rectum.
u = uretère primaire ou rein latéral.
u' = uretère secondaire.
v = ventricule du cœur.

II. — Figures

N. B. — Les huit premières figures sont schématiques; les autres ont été faites à la chambre claire.

Fig. I. *Ancêtre hypothétique des Gastéropodes.*
Schéma de l'appareil rénal, et de ses relations avec le péricarde et la glande génitale (schéma de R. Perrier, modifié d'après Erlanger)

Fig. II. *Fissurelle.*
Schéma des mêmes organes. La portion *u*, qui représente l'uretère et est d'origine ectodermique, porte, à la néphridie droite, quelques papilles.

Fig. III. *Hétéronéphridés (Trochus, Haliotis, etc.).*
Même schéma.
Tout le rein gauche n'est formé que de la portion *u* correspondant à l'uretère primaire des Pulmonés, et du néphrostome *n*. C'est le sac papillaire de Haller (ou plus exactement : canal papillaire).

Fig. IV. *Monotocardes.*
Même schéma : *u* représente ici la glande néphridienne de R. Perrier

Fig. V. *Hélix.*
Rapports entre le cœur, le rein et le rectum.

Fig. VI. *Limace.*
Mêmes rapports.

Fig. VII. *Arion.*
Mêmes rapports.

Fig. VIII. *Néritine.*
Coupe antéro-postérieure à travers le pied, la cavité branchiale, l'appareil rénal, le péricarde et l'intestin.

Ce schéma a pour but de réunir, sous les yeux du lecteur, les divers rapports de la néphridie avec le péricarde et la cavité branchiale ou palléale; et en outre de montrer les relations du rein proprement dit avec l'uretère.

Fig. IX. *Arion.* G : × 50.
Parois de l'uretère primaire *u* et de l'uretère secondaire *u'* ; ces parois sont intimement unies.

On voit dans l'uretère secondaire des culs-de-sac *cu'* provenant de ce que les lamelles ont été coupées obliquement et à leur base.

Fig. X. *Arion.* G : × 50.
Fragment de l'uretère primaire en contact avec le rein, le péricarde et le vaisseau *va* qui ramène à l'oreillette du sang hématosé. Il y a, comme dans la figure précédente, des culs-de-sac *cu* dus à l'obliquité de la coupe.

Fig. XI. *Littorina littorea.* G : × 125.
Coupe à travers la glande néphridienne de R. Perrier. Pour nous, cette prétendue glande n'est autre chose qu'une portion ectodermique de la néphridie, homologue de l'uretère de l'Arion. Comparez cette figure avec les deux précédentes. Vous retrouverez de part et d'autre les mêmes culs-de-sac, *cu* et *cu'*, dus à l'obliquité de la coupe.

Fig. XII. *Paludina vivipara.* G : × 30.
Coupe transversale de l'uretère, homologue de celui des Pulmonés.

Fig. XIII. *Paludina vivipara.* G : × 125.
C'est la portion *A*, de la figure précédente, vue à un plus fort grossissement. On y voit des replis semblables à ceux de l'uretère de l'Arion, et de la prétendue glande néphridienne de la Littorine.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 215

CHAPITRE PREMIER

Homologies de la néphridie chez les Gastéropodes Prosobranches et Pulmonés 218

§ 1. — État de la question 219

I. **Historique** 219

II. Hypothèse actuelle sur la double torsion et l'asymétrie des Gastéropodes 219

III. Théorie de Remy Perrier sur le rein des Prosobranches. — Sa classification des Prosobranches. 222

§ 2. — Examen de la théorie de R. Perrier 225

Première proposition. — Le rein unique des Monotocardes ne provient pas de la fusion des deux reins des Diotocardes, mais en représente uniquement le rein gauche. Il ne reste du rein droit que **le canal extérieur, qui sert de conduit génital** 225

Deuxième proposition. — La glande néphridienne, que décrit R. Perrier chez les Monotocardes, n'est pas une formation spéciale à ce groupe; c'est une portion de l'appareil rénal, homologue de **l'uretère primaire des Stylommatophores**. 226

Troisième proposition. — L'uretère de la Paludine et de la Valvée est l'homologue de l'uretère primaire des Stylommatophores . . 234

Quatrième proposition. — L'uretère de la Paludine, et par conséquent l'uretère des Stylommatophores, est l'homologue du canal ou sac papillaire (expression de B. Haller) ou rein gauche des Diotocardes **hétéronéphridés (*Haliotis, Turbo, Trochus*)**. 235

Cinquième proposition. — Chez les Monotocardes supérieurs (Épinéphridés parmi les Ténioglosses; Sténoglosses), le lobe gauche du rein (différenciation du rein proprement dit, d'après R. Perrier) appartient à la portion ectodermique de la néphridie, et il correspond, avec la glande néphridienne de ces Monotocardes, à l'uretère **de la Paludine** 236

§ 3. — Notre hypothèse sur les homologies de la néphridie des Gastéropodes Prosobranches et Pulmonés 237
I. Néphridie typique des Gastéropodes 237
II. Ancêtre hypothétique des Gastéropodes 238
III. Diotocardes 238
A. Néphridies des Diotocardes Homonéphridés 238
B. Néphridies des Diotocardes Hétéronéphridés. 239
C. Néphridie unique des Diotocardes Mononéphridés. — Néritines 240
IV. Monotocardes 242
A. Ténioglosses 242
1. Holonéphridés 242
2. Épinéphridés 244
B. Sténoglosses 244
1. Méronéphridés 244
2. Pycnonéphridés 245
V. Néphridie des Pulmonés 245
Résumé de ce chapitre 246

CHAPITRE II

Quelques considérations sur les fonctions de la néphridie des Gastéropodes. 247
§ 1. — Rein proprement dit 248
I. Constitution des concrétions rénales 248
II. Mécanisme de leur expulsion 248
§ 2. — Uretère 249
I. Circulation de l'uretère 249
II. Fonctions de l'uretère 249
A. Canal excréteur 249
B. Résorption (opinion de Simroth) 249
C. Sécrétion 250
Bibliographie 252
Légende des figures 255

FIN DE LA SECONDE PARTIE

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Statuts 5
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques. 9
Lettres de S. S. le Pape Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 11
Liste des membres de la Société scientifique de Bruxelles 15
  Liste des membres fondateurs 15
    — des membres honoraires 16
    — générale 18
    — géographique 40
    — des membres décédés 46
    — des membres inscrits dans les Sections 47
  Membres du Conseil 1900-1901 53
    — — 1901-1902 54
  Bureaux des sections 1901-1902. 55
Questions de concours proposées en 1901 56
Sessions de 1901-1902. Extraits des procès-verbaux 57
  Session du jeudi 21 novembre 1901 à Gand. 57
    Séances des sections : Première section 57
      Deuxième — 68
      Troisième — 78
      Quatrième — 87
      Cinquième — 89

PAGES

Assemblée générale 90
Discours de M. le Chanoine Boulay 91
Conférence du R. P. Lucas, S. J. 99
Discours de M. E. Pasquier 102
Session du jeudi 30 janvier 1902 à Bruxelles 107
Séances des sections : Première section 107
Deuxième — 116
Troisième — 131
Quatrième — 136
Cinquième — 138
Assemblée générale 139
Conférence de M. Heymans 139
Discussion sur l'utilité d'une langue scientifique internationale. . 142
Session des 8, 9, 10 avril 1902 à Bruxelles 143
Séances des sections : Première section 143
Deuxième — 147
Troisième — 165
Cinquième — 181
Assemblée générale du 8 avril 1902 181
Rapport du Secrétaire général 181
Rapport du Trésorier 188
Conférence de M. le Commandant J. Henry. 188
Assemblée générale du 9 avril 1902 192
Conférence du R. P. G. Hahn, S. J. 192
Assemblée générale du 10 avril 1902 194
Conférence de M. F. Meunier 195
Communications du Conseil de la Société 198
Membres du Conseil pour 1902-1903 199
Rapport sommaire de M. le M^{is} de Beaucourt sur la *Société bibliographique* pendant les années 1900 et 1901 200
Liste des ouvrages offerts à la *Société scientifique de Bruxelles* du 1er mai 1901 au 1er mai 1902 204

COMMUNICATIONS DIVERSES

Note sur le mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, intitulé : Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée, par M. P. Mansion 57
Analyse du mémoire de M. Neuberg, intitulé : Sur le quadrilatère complet, par M. P. Mansion 58
Sur une équation aux dérivées partielles à caractéristiques réelles, par M. le V^{te} R. d'Adhémar. 59
Rapport de M. Neuberg sur le mémoire de M. P. Mansion, intitulé : Démonstration du Théorème de Jacques Bernoulli 67

PAGES

L'erreur moyenne dans la méthode des moindres carrés, par M. Éd. Goedseels 68
Sur divers alcools-amines aliphatiques en C_4 et en C_5, par M. L. Henry . 68
Sur certains dérivés éthyléniques, par M. L. Henry 71
Sur certaines équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en physique mathématique et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité, par M. J. Delemer 77
Sur une expérience de capillarité, par M. G. Van der Mensbrugghe . . 77
Le Néolithique de la Flandre occidentale, par M. l'abbé J. Claerhout . 79
Sur la culture du raisin en plein air, par M. A. Proost 83
Sur la champagnisation, par M. A. Proost 84
A propos de diptères arrêtés au cours de leur développement à l'état d'*imago*. Remarques de M. F. Meunier 85
Un essai de restitution de flore mio-pliocène, par le R. P. G. Schmitz, S. J. 86
Les laboraroires de MM. les professeurs Lahousse et Heymans à Gand . 87
Le *Strop* à Gand et l'Institut chirurgical 87
Exposé critique des différents projets de loi sur les retraites ouvrières en France, par M. M. Vanlaer 89
Rapport de M. De Tilly sur le Mémoire de M. le comte de Sparre, intitulé : Sur le mouvement du pendule conique dans le cas de petites oscillations 107
A propos de la discussion d'un groupe de *n* équations à *n* inconnues, par M. P. Mansion 108
Sur une trigonométrie non symétrique, par M. De Tilly 109
Sur les systèmes au repos absolu, par M. Éd. Goedseels 141
Sur la fabrication et le prix actuel des composés éthyléniques, par M. L. Henry. 116
Sur un procédé d'éclairage électrique des trains, par M. E. Gérard . . 126
Préparation d'un isolant soufre-paraffine, par le R P. J.-D. Lucas, S. J. 127
Quelques détails de l'anatomie d'une hirudinée, *Helobdella Algira*, relatifs au trajet du sperme pour arriver près des ovules, par le R. P. H. Bolsius, S. J. 132
Sur la mouche *tsé-tsé*, par M. A. Proost. 133
Le Bahr-el-Gazal, par M. A. Proost 134
Le traitement des plaies perforantes de la cornée et de la sclérotique lorsqu'elles sont suivies d'une hernie de l'iris, par M. le Dr De Lantsheere 136
Présentation de deux malades, par M. le Dr Glorieux 136
L'économie nationale et l'économie internationale, par M. Vanhoutte . 138
La géométrie projective est-elle indépendante de la géométrie métrique, par M. P. Mansion 143
Section plane de l'hyperboloïde défini par ses trois directrices rectilignes dont l'une est verticale et les deux autres horizontales, par M. L. de Locht-Labye 145
Sur l'intégration des fractions rationnelles, par M. H. Dutordoir . . . 146

PAGES

Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités, par M. P. Mansion 146
Sur la méthode de Cauchy. par M. Éd. Goedseels 146
Sur la découverte de la géométrie non-euclidienne par Jean Bolyai, par M. P. Mansion 146
Action de la lumière sur la conductibilité électrique des diélectriques liquides, par M. A. de Hemptinne 147
Du déplacement de l'oxygène dans les chaînes carbonées normales - C - C - C … C - C - C -, au point de vue de la volatilité, par M. L. Henry 150
L'histoire du problème de la pression de la lumière, par le R. P. J. Thirion, S. J. 152
A propos d'optique élémentaire, par le R. P. J. Thirion, S. J. 152
De la volatilité dans les composés carbonés, par M. L. Henry 157
De l'enquête du Dr Karl T. Fischer sur l'enseignement de la physique et de la chimie en Angleterre, par le R. P. V. Schaffers, S. J. 165
L'interrupteur de G. Contremoulins et la méthode métroradioscopique du même auteur, par le R. P. J.-D. Lucas, S. J. 165
Sur le récent ouvrage *The Gold of Ophir. Whence brought and by Whom?* de M. A. H. Keane, par le R. P. J. Van den Gheyn, S. J. . 165
Les Halictes, par M. J.-H. Fabre 166
L'âge du cuivre, par M. le Mis de Nadaillac 166
Antoni van Leeuwenhoek, premier révélateur du noyau cellulaire en 1682 et 1685, par le R. P. H. Bolsius, S. J. 166
Sur les dépôts ferrugineux de Franche-Comté, par M. le Chanoine Bourgeat 174
Sur une nouvelle moisissure découverte dans du beurre, par M. M. Lefebvre 174
Sur la formation de la houille, par le R. P. G. Schmitz, S. J. 175
Sur les vestiges d'animaux domestiques trouvés dans les amas de détritus du Danemark, par M. l'abbé J. Claerhout 176
La question des sucres en 1902, par M. F. Vergauwen 181

CONFÉRENCES

L'enseignement des sciences naturelles dans les séminaires et les collèges, par M. le Chanoine Boulay 91
La lumière noire et les radiations nouvelles, par le R. P. J.-D. Lucas, S. J. 99
La tuberculose, par M. J.-F. Heymans 139
La conquête du Haut-Nil, par M. le Commandant J. Henry. 188
Les multiples organes de locomotion chez les Vertébrés, par le R. P. G. Hahn, S. J. 192
Les travailleurs de la mort, par M. F. Meunier 195

AUTEURS

d'Adhémar, 59. — Bolsius, 132, 166. — Bourgeat, 174. — Claerhout, 79, 176. — Dr De Lantsheere, 136. — Delemer, 77. — Dutordoir, 146. — J.-H. Fabre, 166. — E. Gérard, 126. — Glorieux, 136. — Goedseels, 68, 114, 146. — A. de Hemptinne, 147. — L. Henry, 68, 71, 116, 150, 157. — M. Lefebvre, 174. — de Locht-Labye, 145. — Lucas, 127, 165. — Mansion, 57, 58, 108, 143, 146. — F. Meunier, 85. — de Nadaillac, 166. — Neuberg, 67. — Proost, 83, 84, 133, 134. — Schaffers, 165. — Schmitz, 86, 175. — Thirion, 152. — de Tilly, 107, 109. — Ch.-J. de la Vallée Poussin, 57. — J. Van den Gheyn, 165. — Van der Mensbrugge, 77. — Vanhoutte, 138. — Vanlaer, 89. — Vergauwen, 181.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PAGES

Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée, par M. Ch.-J. de la Vallée-Poussin . . 1
Sur le quadrilatère complet, par M. J. Neuberg 13
Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent, publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de Saint-Vincent et les manuscrits de della Faille, par le R. P. H. Bosmans, S. J. . . 22
Sur la génération de quelques courbes remarquables par le campylographe du P. Marc Dechevrens, S. J., par le R. P. Potron, S. J. . . 41
Quelques observations sur la Serre et les régions voisines, par M. le Chanoine Bourgeat 57
Sur certaines équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en physique mathématique et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité, par M. J. Delemer 69
Description de quelques diptères de l'ambre, par M. Fernand Meunier. 96
Analyse des terres et leur représentation graphique, par M. P. Nyssens. 105
Complications cutanées graves de la rougeole, par M. Alex. Faidherbe. 111
Sur le mouvement du pendule conique dans le cas des petites oscillations, par M. le Comte de Sparre 133
Sur l'application de la méthode de Cauchy aux moindres carrés, par M. Éd. Goedseels 148
Sur les dépôts ferrugineux de Franche-Comté, par M. le Chanoine Bourgeat. 157
Nouvelle contribution à l'étude du glaciaire dans le Jura méridional, par M. le Chanoine Bourgeat 165
Localisations nucléaires de la moelle épinière, par M. le Dr D. De Buck. 171
Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli, par M. P. Mansion. 191
Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités, par M. P. Mansion. 211
Étude comparée du rein (néphridie) chez les gastéropodes prosobranches et pulmonés, par le R. P. A. Deschamps, S. J. 215

AUTEURS

Bosmans, 22. — Bourgeat, 57, 157, 165. — De Buck, 171. — Delemer, 69. — Deschamps, 215. — Dr Faidherbe, 111. — Goedseels, 148. — P. Mansion, 191, 211. — F. Meunier, 96. — J. Neuberg, 13. — Nyssens, 105. — Potron, 41. — de Sparre, 133. — Ch.-J. de la Vallée Poussin, 1.

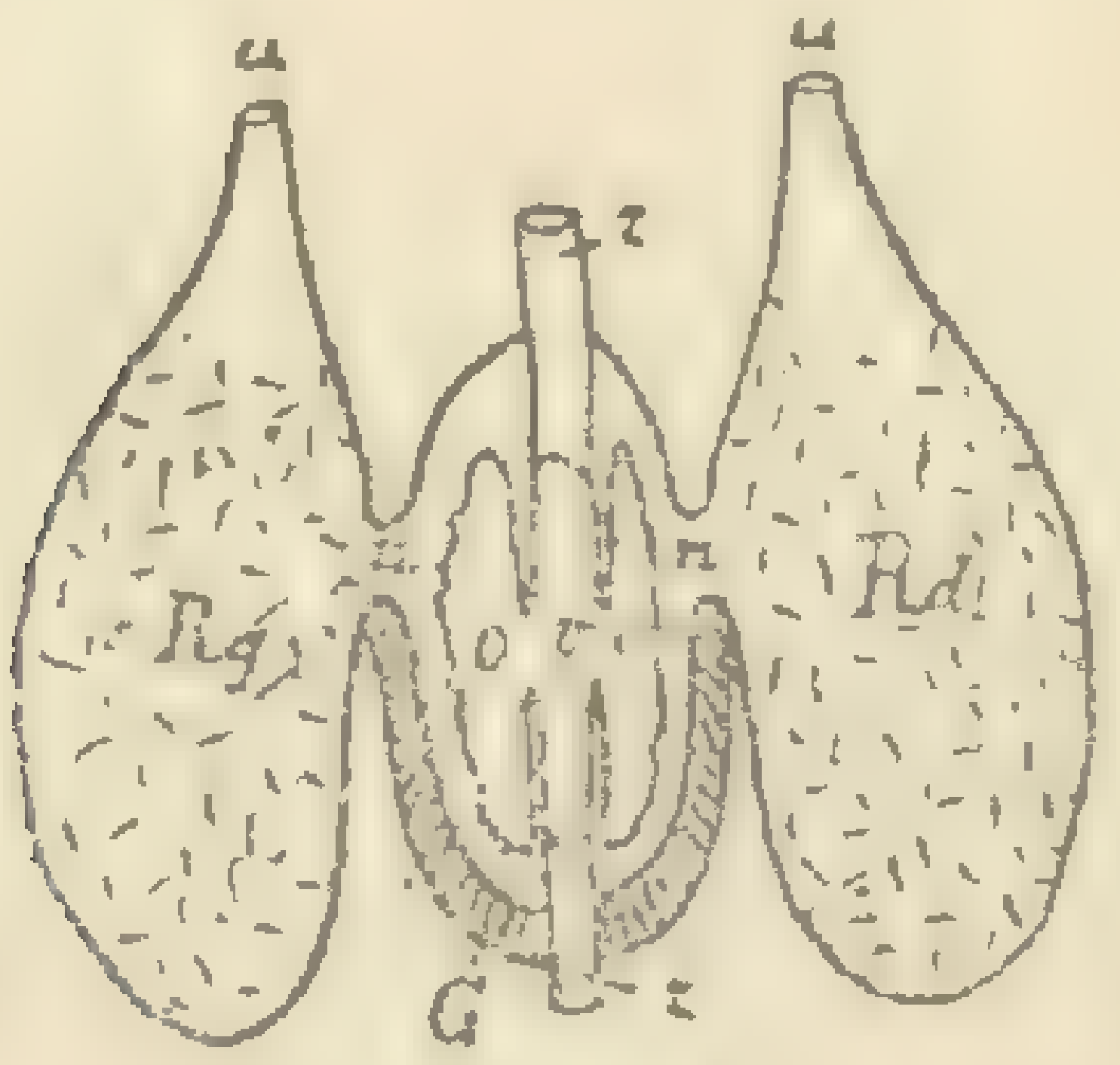

u
u
r
Rg
Rd
o
v
n
G
r

FIG I

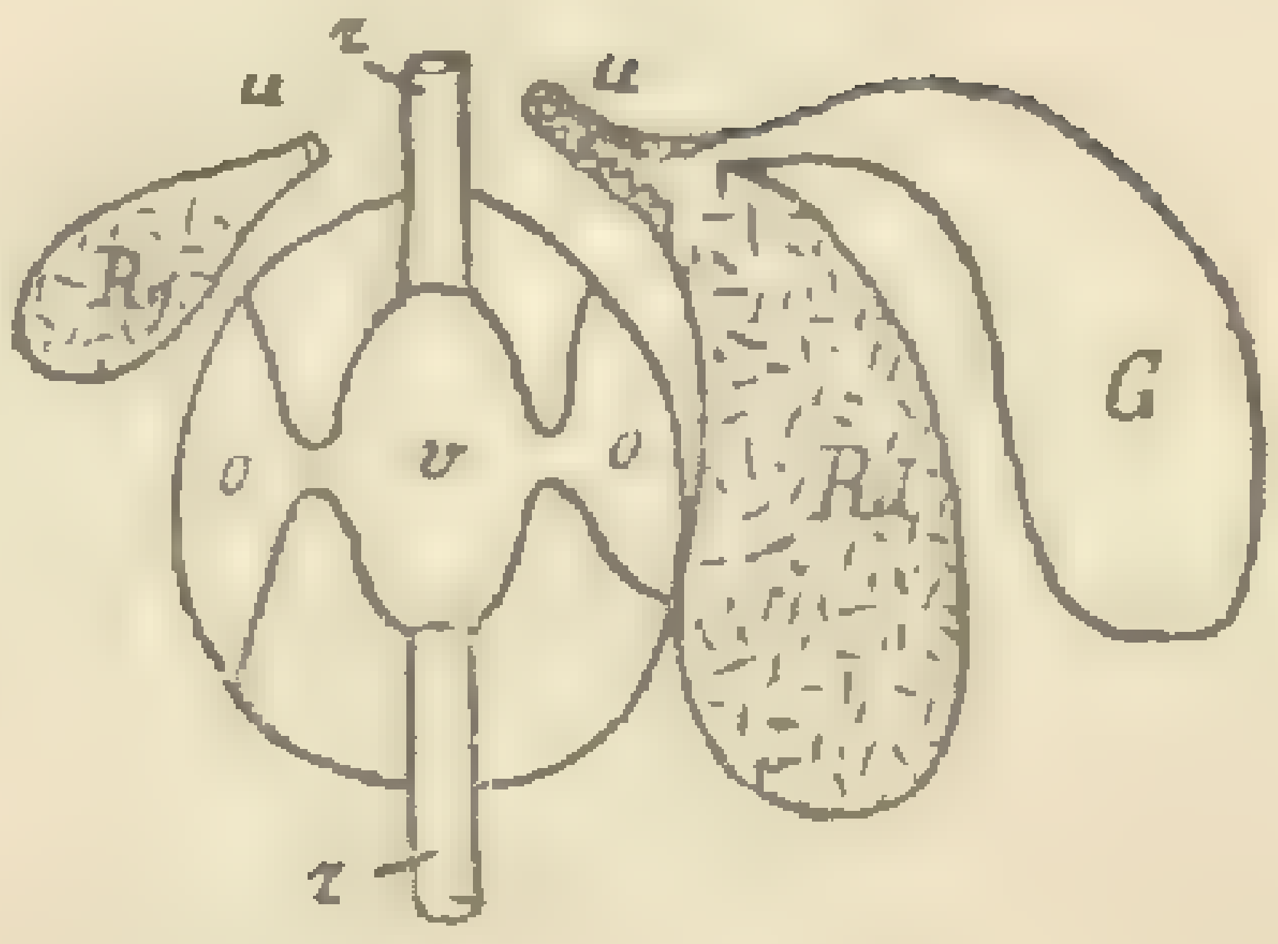

u
r
u
Rg
G
o
v
o
Rd
r

FIG. II

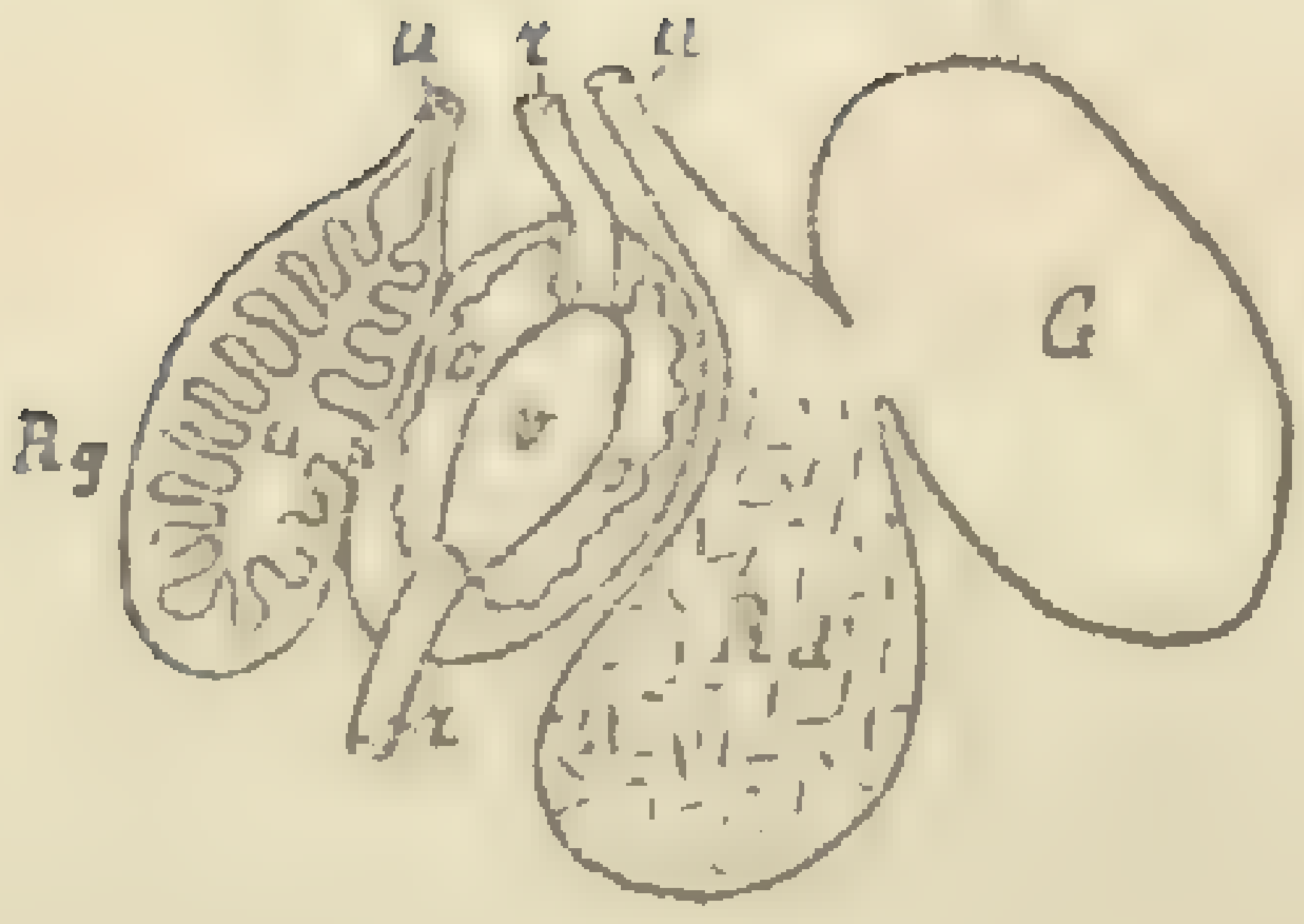

u
r
u
G
Rg
c
v
Rd
r

FIG. III

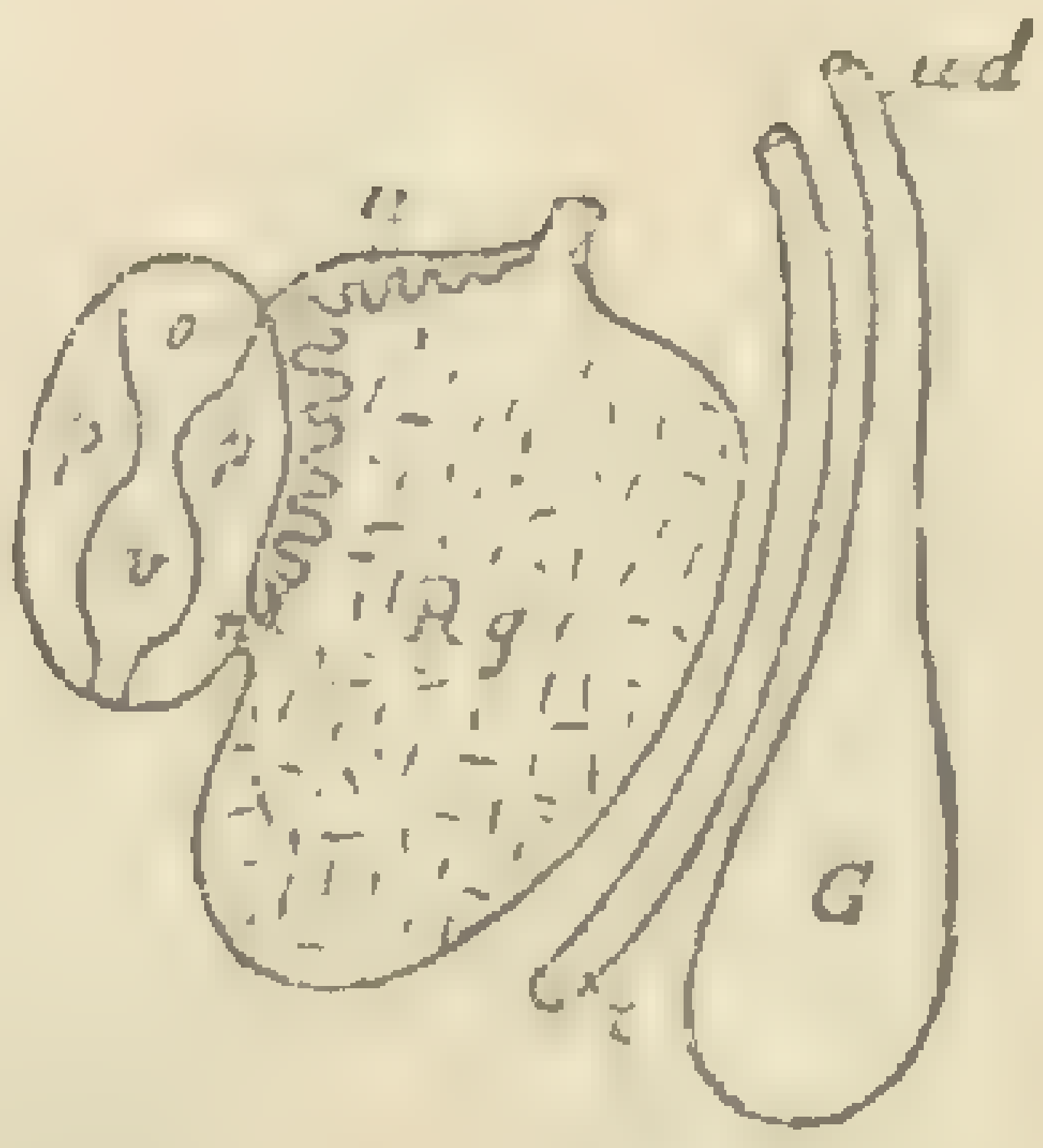


FIG. IV

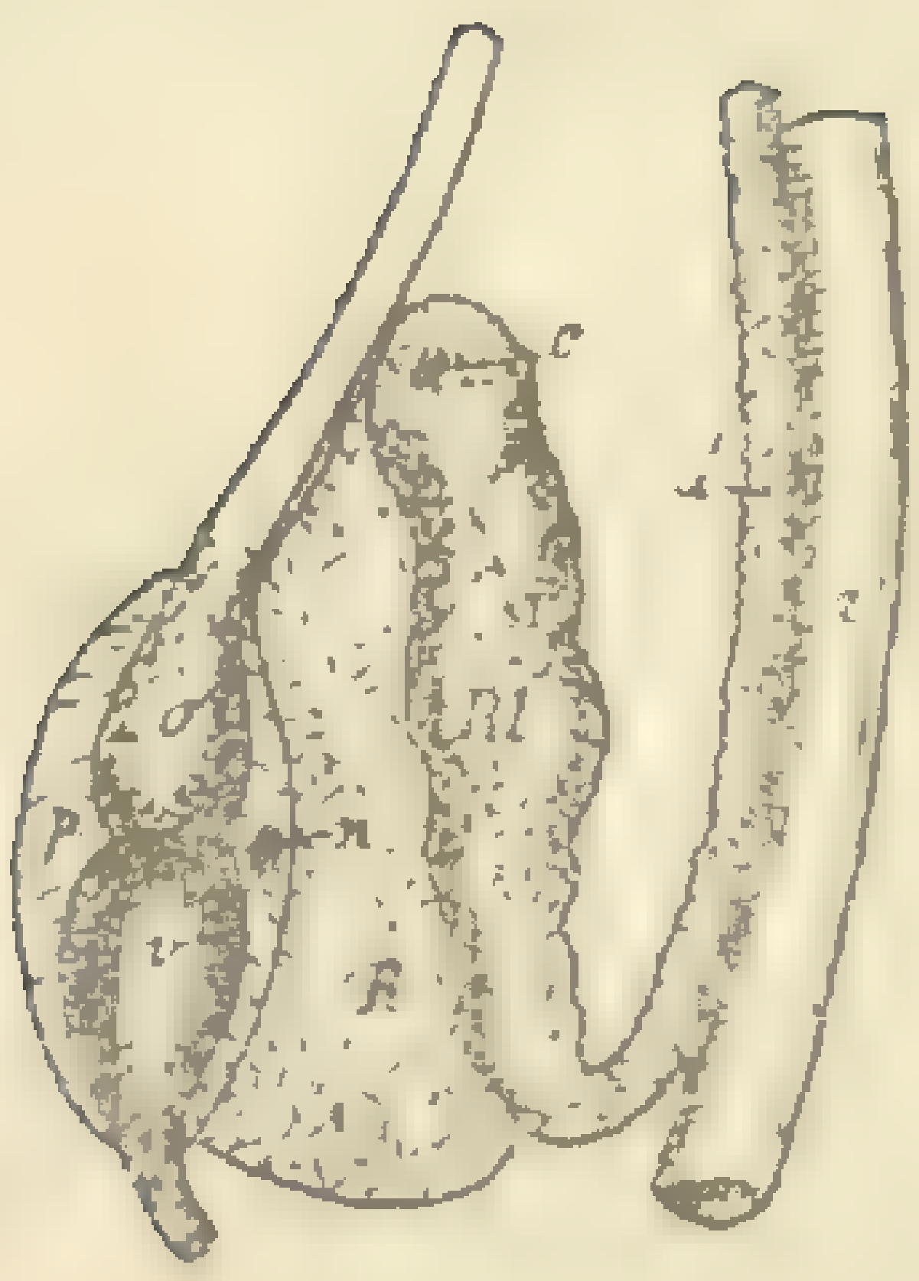

c
u
r
Rl
o
p
n
v
R

FIG. V

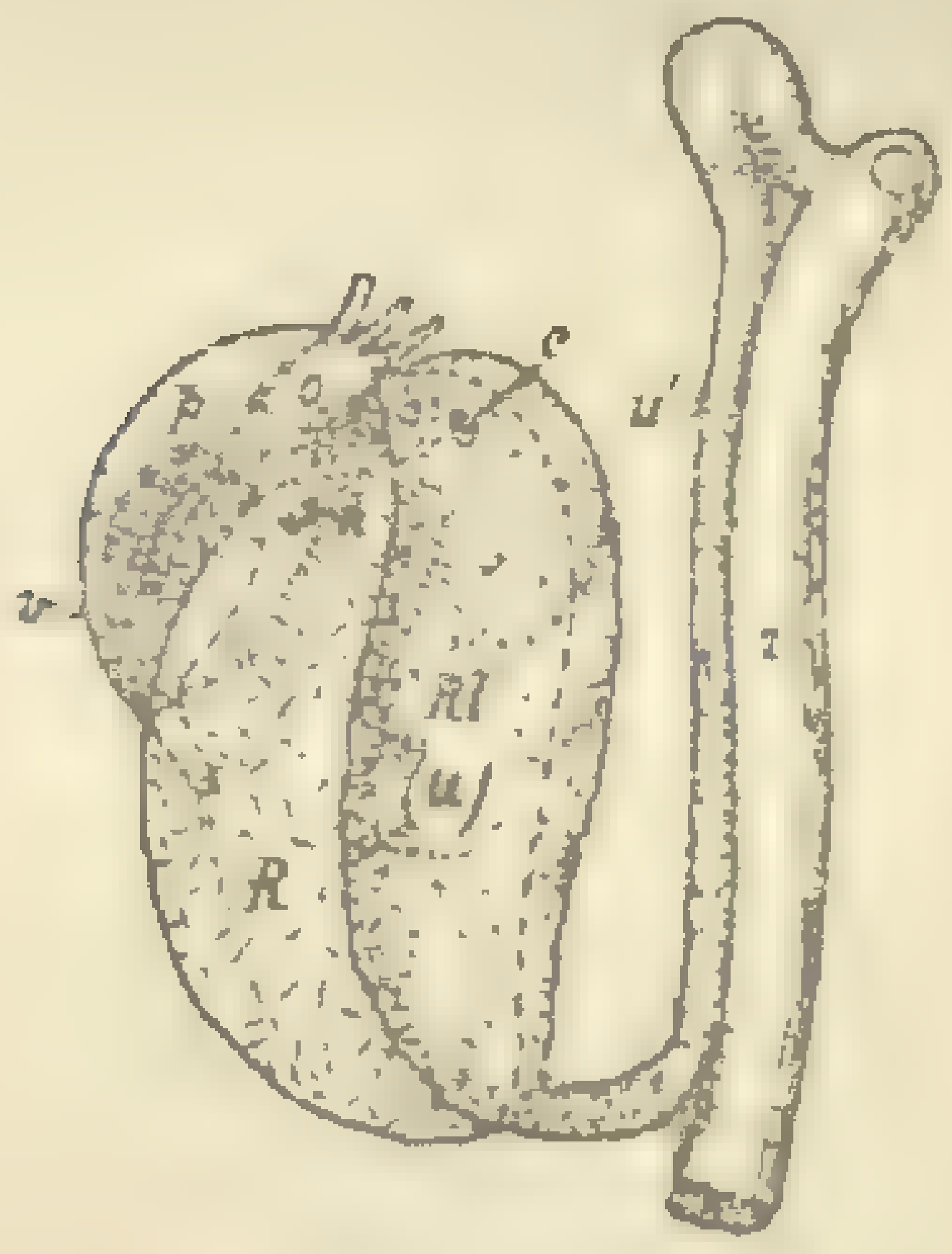

p
o
c
u'
v
Rl
u
r
R

FIG. VI

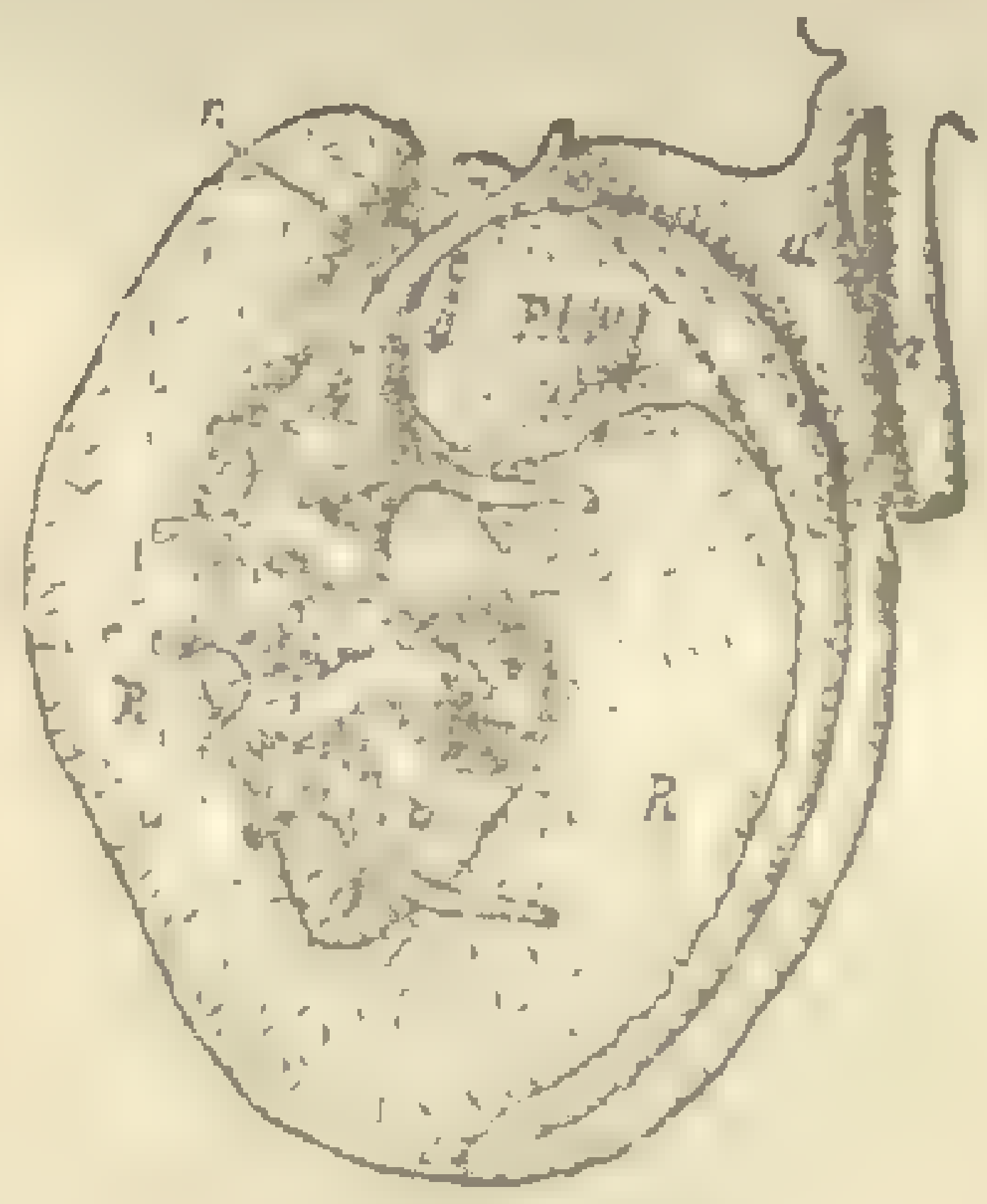


FIG. VII

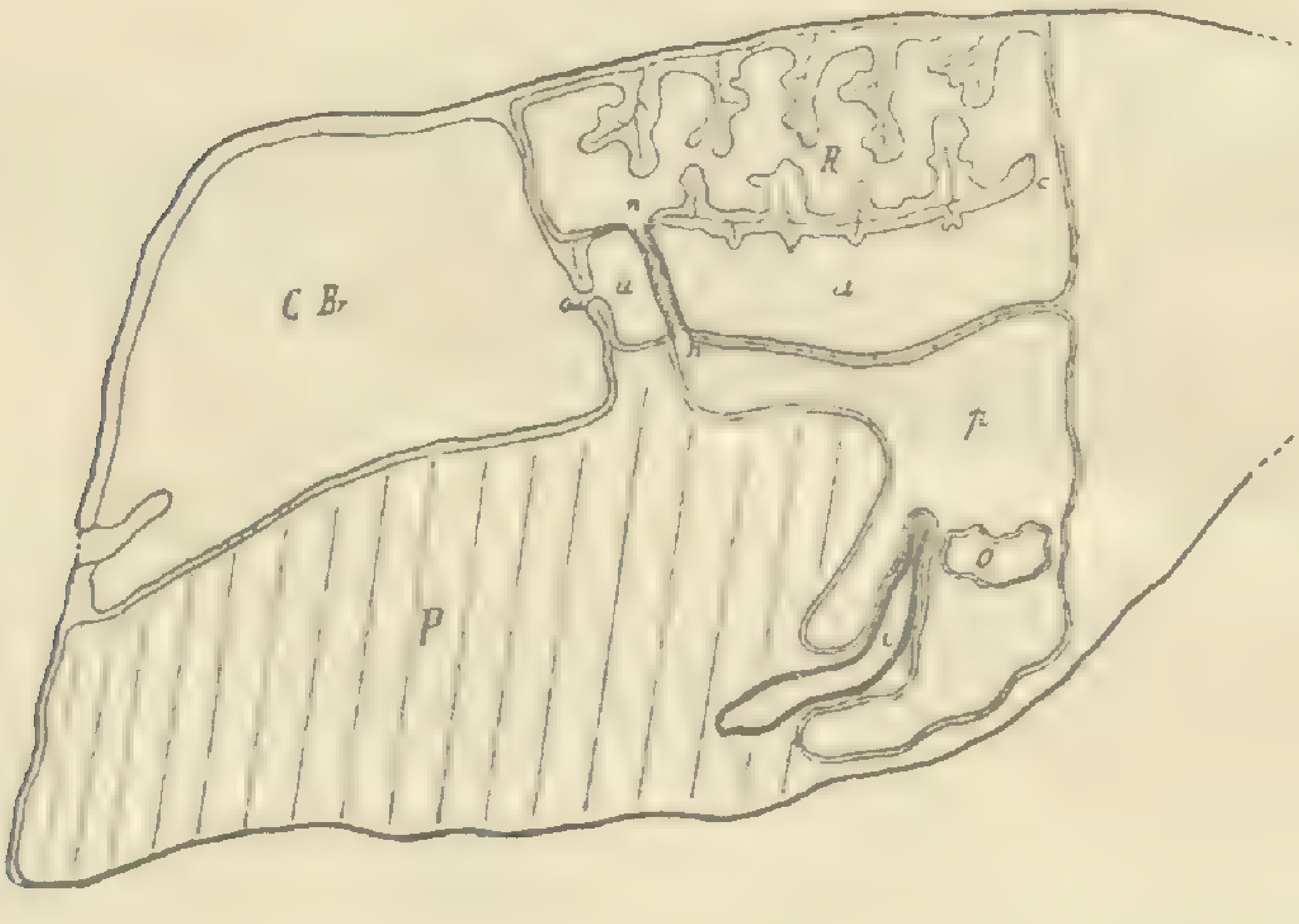

R
c
n
C Br
u
a
p
o
P
i

FIG. VIII

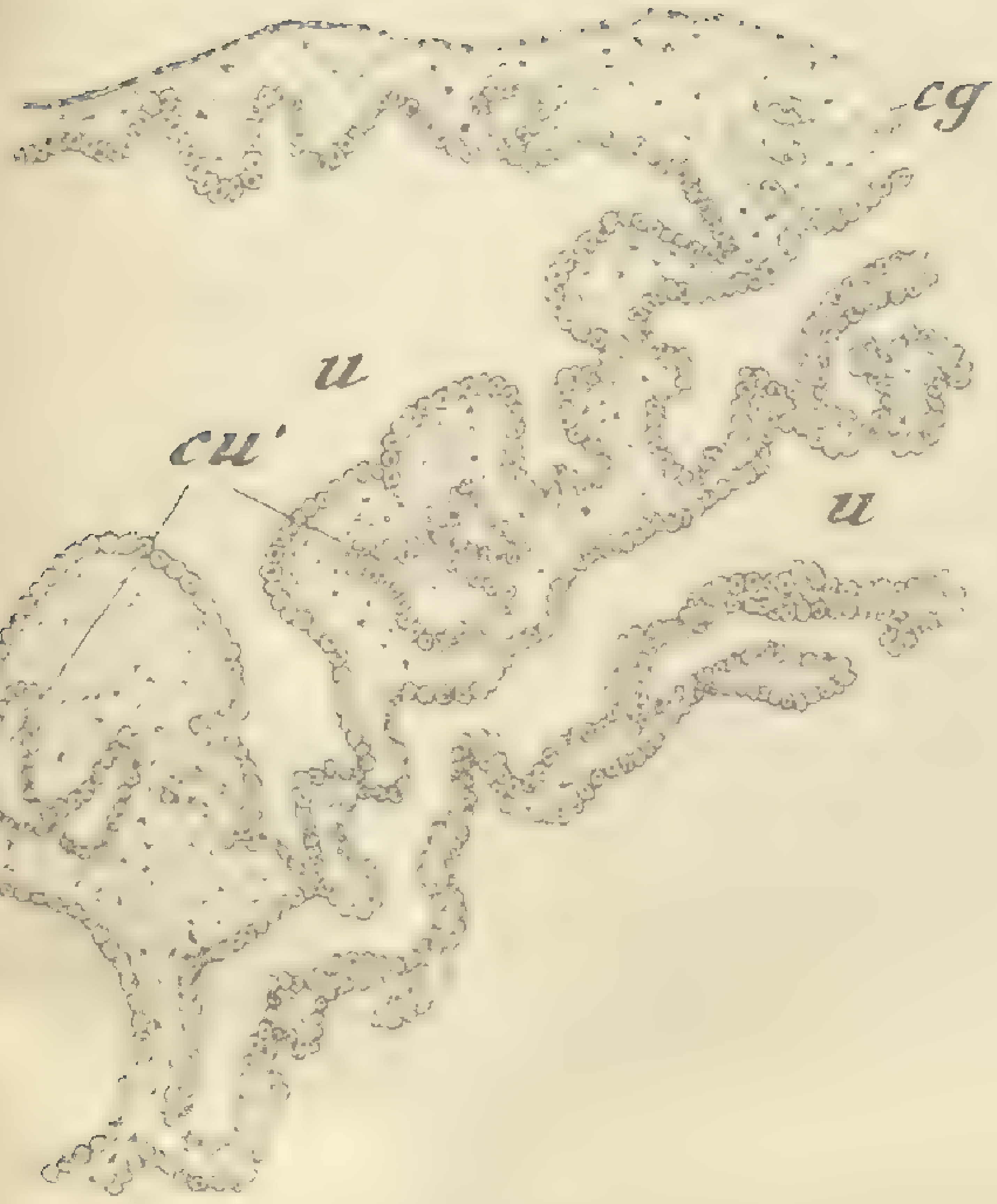


Fig. IX

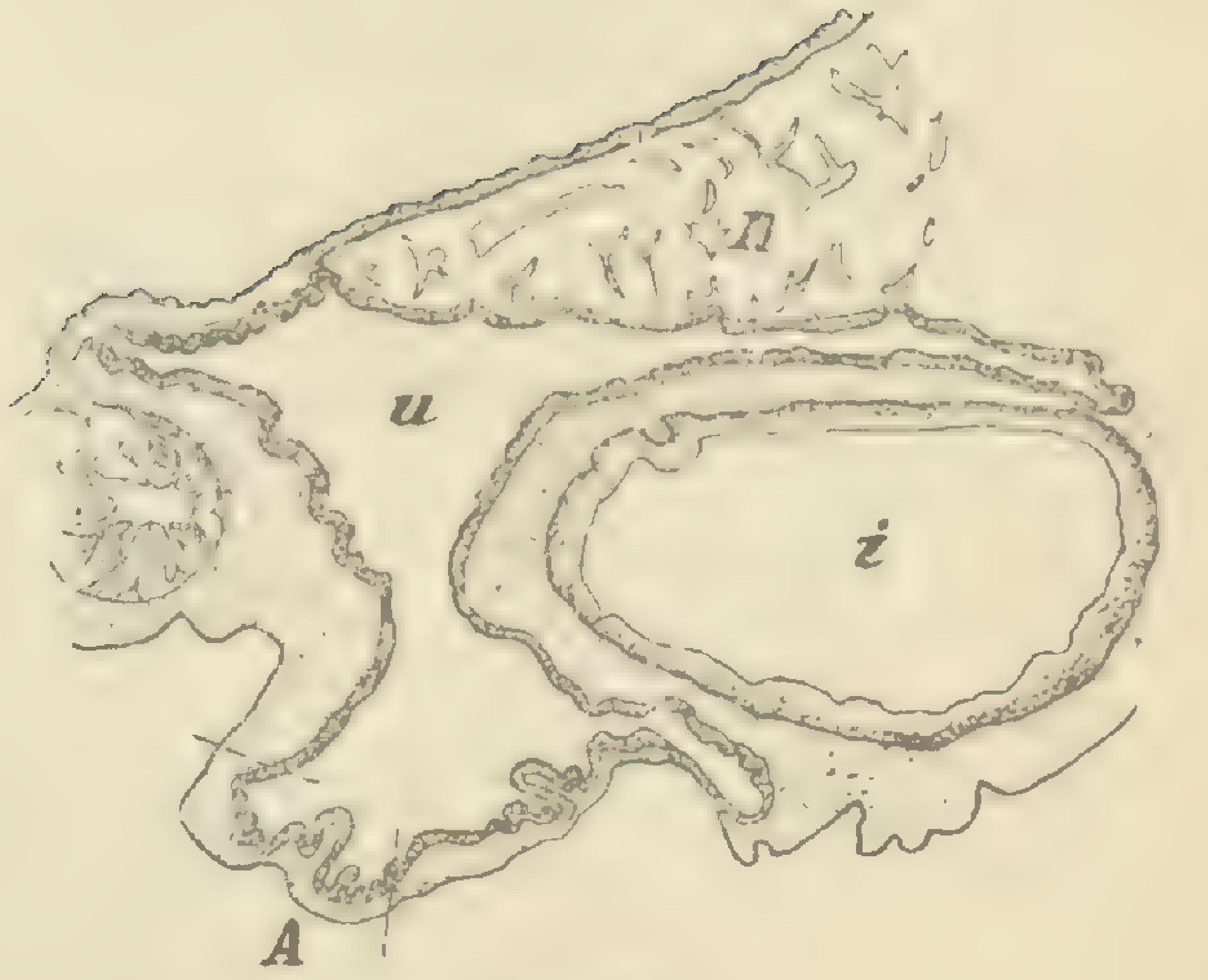


Fig. X

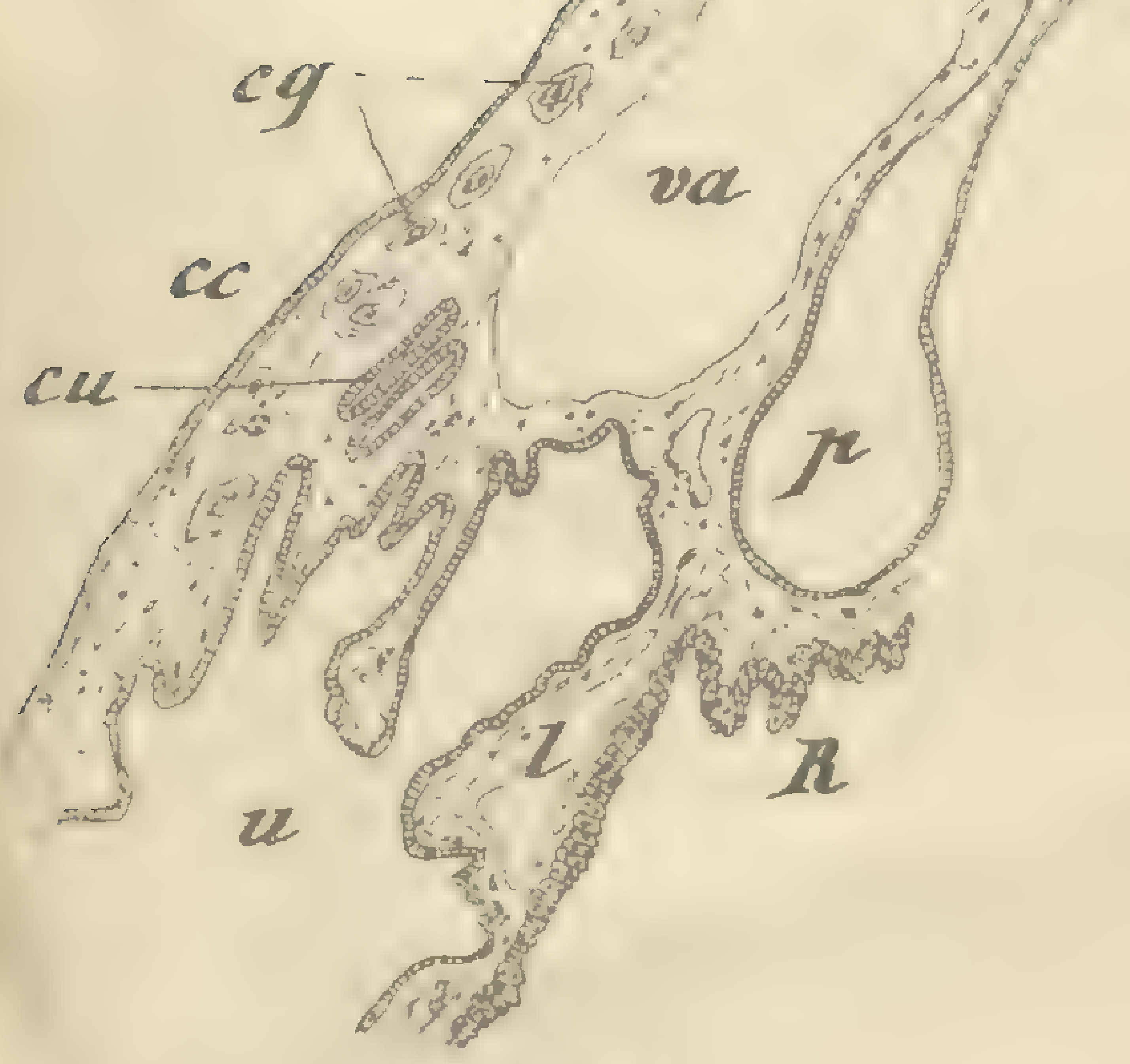

cg
va
cc
cu
p
u
l
h

Fig. XI

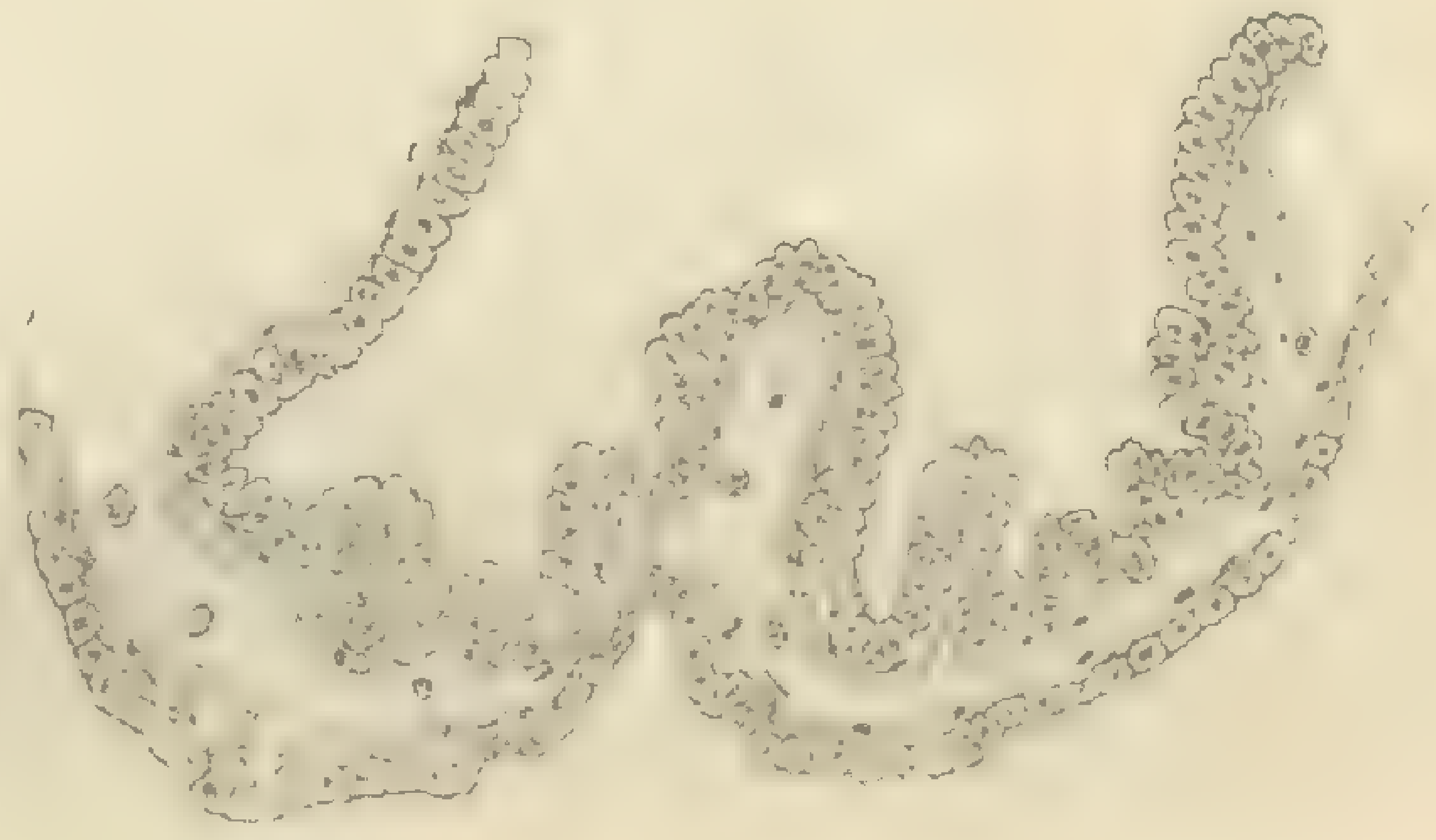


Fig. XII

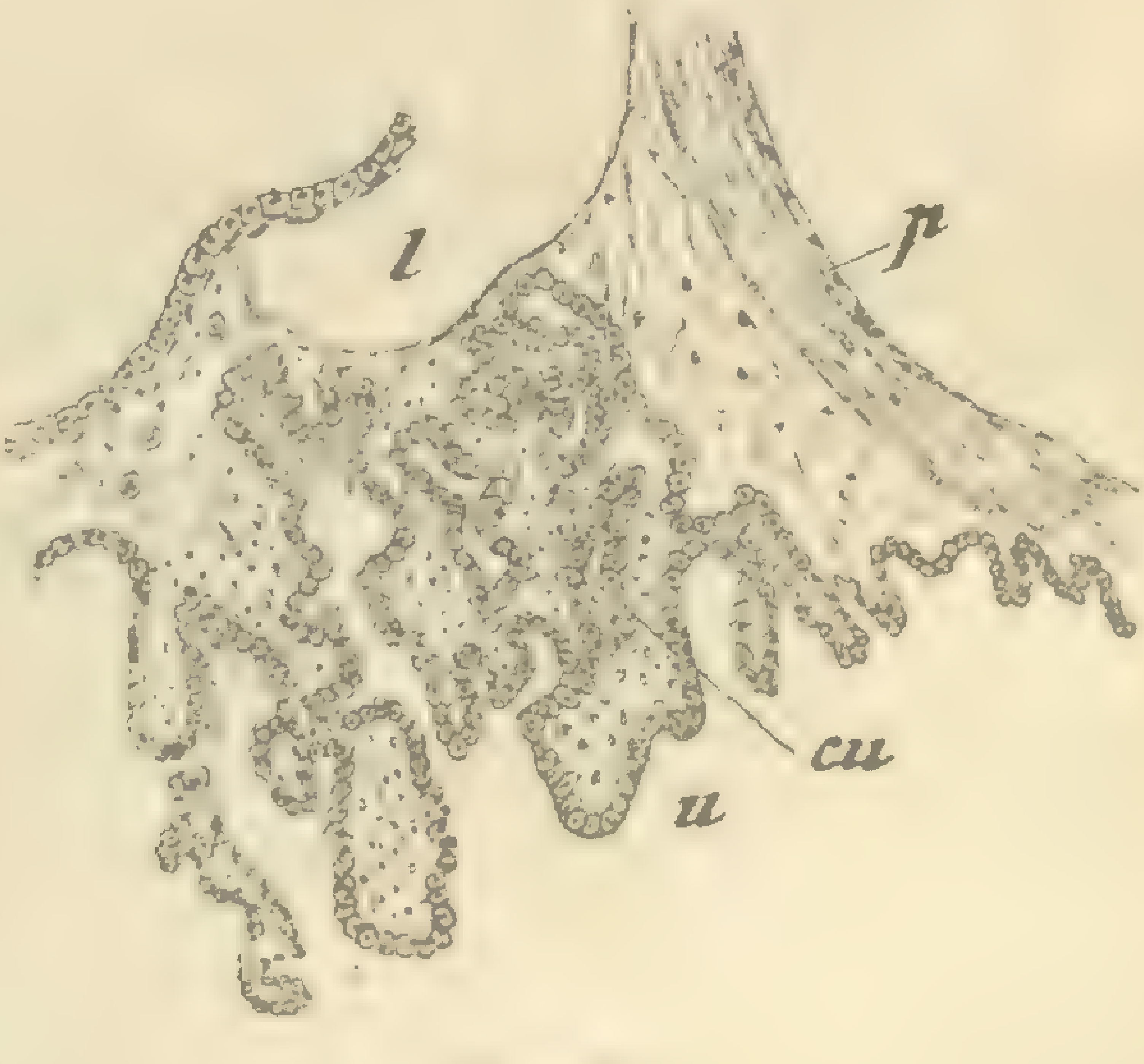


Fig. XIII

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/₀ ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins ;
à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVI, 1877 à 1902.
Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . fr. 20 00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.
Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, 1902. Deux volumes.
Chaque volume de 700 pages in-8° . . . . fr. 20 00

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . fr. 2 00

P. H. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . fr. 7 50

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris**, *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins;
à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVI, 1877 à 1902.

Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . . . .fr. **20 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, 1902. Deux volumes.

Chaque volume de 700 pages in-8° . . . . .fr. **20 00**

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . .fr. **2 00**

P. H. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . .fr. **7 50**

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (**Émile**), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

—— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (**J.**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique,** réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.
Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (**Jules**), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (**E.**), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (**Ch.-Ed.**), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (**H.**), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (**C.**), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.